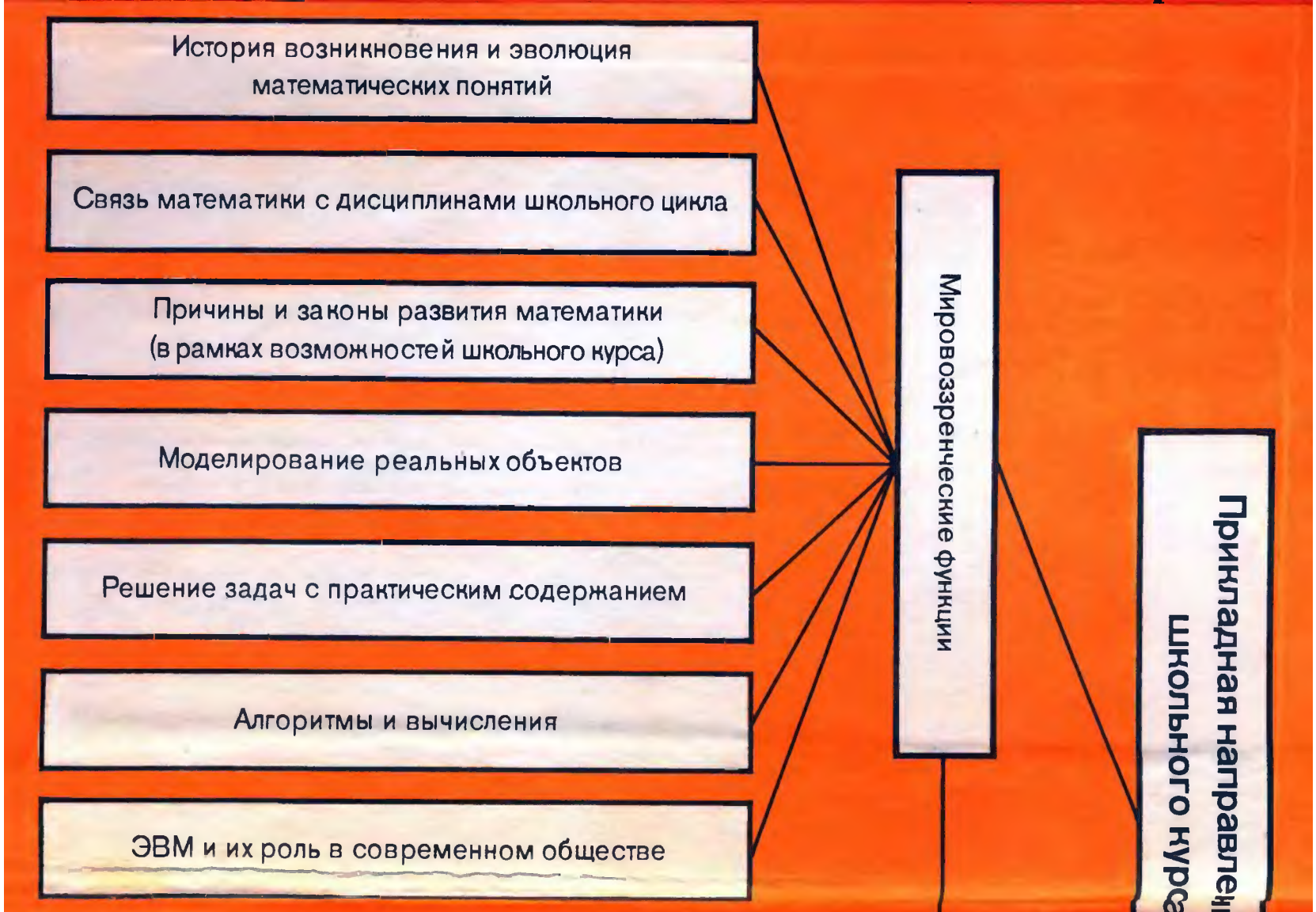
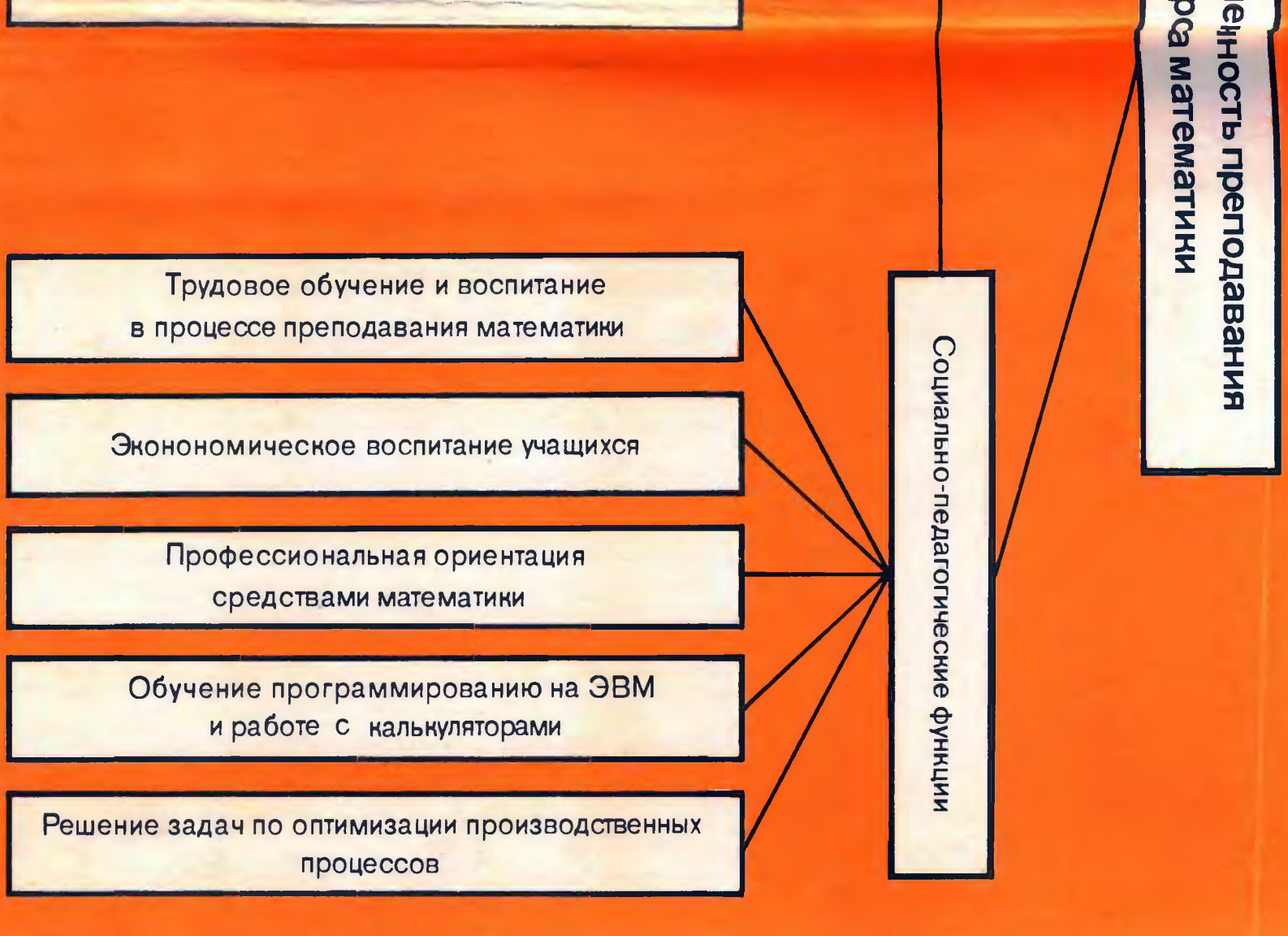
учебное пособие
для педагогических
ИНСТИТУТОВ

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Частная методика


История возникновения и эволюция математических понятий
Связь математики с дисциплинами школьного цикла
Причины и законы развития математики (в рамках возможностей школьного курса)
Моделирование реальных объектов
Решение задач с практическим содержанием
Алгоритмы и вычисления
ЭВМ и их роль в современном обществе
Мировоззренческие функции
Прикладная направленность школьного курса


Трудовое обучение и воспитание в процессе преподавания математики
Экономическое воспитание учащихся
Профессиональная ориентация средствами математики
Обучение программированию на ЭВМ и работе с калькуляторами
Решение задач по оптимизации производственных процессов
Социально-педагогические функции
ность преподавания
рса математики

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Частная методика

Составитель В. И. МИШИН

Допущено
Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
педагогических институтов
по физико-математическим специальностям

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1987

ББК 74.262
М54

А. Я. БЛОХ, В. А. ГУСЕВ, Г. В. ДОРОФЕЕВ, К. И. ДУНИЧЕВ,
А. Е. ЗАХАРОВА, В. С. КОПЫЛОВ, М. Д. КОШКИНА, В. И. КРУПИЧ,
Э. И. КУЗНЕЦОВ, Т. В. МАЛКОВА, В. И. МИШИН, Л. З. МУДРАЯ,
И. А. ПАВЛЕНКОВА, Н. А. ТЕРЕШИН, Н. И. ЧИКАНЦЕВА

Рецензенты:

кафедра методики преподавания математики Свердловского ГПИ,
зав. кафедрой *Н. А. Шмакова;*

зав. кафедрой математики и методики преподавания математики
Киевского ГПИ им. А. М. Горького *З. И. Слепкань*

М54 **Методика** преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин.— М.: Просвещение, 1987.— 416 с.: ил.

В книге освещаются узловые вопросы частной методики, касающиеся преподавания в общеобразовательной школе математики в IV—V кл., алгебры, геометрии, алгебры и начал анализа в VI—X кл.

М $\frac{4309020000-769}{103\ (03)-87}$ 23—87 ББК 74.262

Арнольд Яковлевич Блох
Валерий Александрович Гусев
Георгий Владимирович Дорофеев и др.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Частная методика

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб.* Редактор *Н. И. Никитина.* Младшие редакторы *Л. Е. Козырева, М. В. Зарвирова.* Художественный редактор *Е. Р. Дашук.* Художник переплета *А. Е. Тачков.* Художник рисунков *В. В. Костин.* Технические редакторы *Т. Г. Костина, Н. Н. Матвеева.* Корректор *М. Ю. Сергеева.*

ИБ № 10283

Сдано в набор 20.02.87. Подписано к печати 09.09.87. Формат 60×90 1/16. Бум. офсетная № 2. Гарнит. литерат. Печать офсетная. Усл. печ. л. 26+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 52,69. Уч.-изд. л. 29,39+0,45 форз. Тираж 72 000 экз. Заказ 63. Цена 1 руб. 30 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

© Издательство «Просвещение», 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Раздел I. Методика преподавания математики в IV—V классах 5

Глава 1. Целые и дробные числа —
Глава 2. Элементы алгебры 29
Глава 3. Элементы геометрии 44

Раздел II. Методика преподавания алгебры и начал анализа 62

Глава 4. Числовые системы 63
Глава 5. Тождественные преобразования 90
Глава 6. Уравнения и неравенства . . . 104
Глава 7. Текстовые алгебраические задачи 137
Глава 8. Функции и графики 151
Глава 9. Элементы дифференциального и интегрального исчисления . . . 168
Глава 10. Прикладная направленность преподавания алгебры и начал анализа 227
Глава 11. Машинные вычисления . . 240

Раздел III. Методика преподавания геометрии 256

Глава 12. Взаимное расположение прямых и плоскостей 258
Глава 13. Многоугольники и многогранники . 296
Глава 14. Окружность. Круг. Тела вращения . 326
Глава 15. Координаты, преобразования, векторы 348
Глава 16. Принципы построения школьного курса геометрии 387

Литература 410

Настоящее учебное пособие содержит изложение специальной (частной) методики преподавания математики. В нем получили свое дальнейшее развитие и конкретизацию при раскрытии методики преподавания основных разделов школьного курса математики идеи и положения, составляющие основу общей методики преподавания математики[1].

Пособие написано с учетом программы по методике преподавания математики для педагогических вузов и программы по математике для средней школы, адресовано студентам математических и физико-математических факультетов педагогических институтов. В процессе работы над пособием в большой степени был использован накопленный опыт преподавания курса математики в средней школе.

Во избежание рецептурности изложения в пособии рассматриваются различные возможные подходы к изложению основных разделов школьного курса математики, нашедшие отражение в учебниках, учебных пособиях и пробных учебниках по математике для средней школы, дается их сравнительный анализ.

Структура книги определяется характером курса математики средней школы, изучаемого на различных ступенях обучения (пропедевтический и систематический курсы математики), а также изучаемыми в школе учебными математическими дисциплинами (подготовительный курс математики, изучаемый в течение двух лет на базе начальной школы, курс алгебры, курс геометрии, курс алгебры и начал анализа).

Методика преподавания конкретных разделов курса математики средней школы раскрывается по содержательно-методическим линиям, что дает возможность подчеркнуть в большей степени идейную направленность изучаемого математического содержания; в их число входят: числовые системы, уравнения и неравенства, функции, алгоритмы и вычисления, вопросы приложения математики, логическое строение геометрии, геометрические фигуры и их построения, измерение геометрических величин, геометрические преобразования, векторы и координаты.

Во всех разделах пособия авторы стремились уделить должное внимание воспитывающей роли математики: развитию логического мышления учащихся, организации и содержанию профориентацион-

[1] Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика / Сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр.— М.: Просвещение, 1985.

ной работы и трудового воспитания, реализации прикладной направленности.

Пособие состоит из трех разделов, разделенных на главы: I раздел «Методика преподавания математики в IV—V классах»; II раздел «Методика преподавания алгебры и начал анализа»; III раздел «Методика преподавания геометрии».

Пособие написано коллективом кафедры методики преподавания математики МГПИ им. В. И. Ленина. I раздел написан: глава 1 доц. М. Д. Кошкиной, глава 2 доц. В. С. Копыловым, глава 3 доц. Н. И. Чиканцевой; II раздел написан: § 11, 12 (гл. 4) доц. Н. А. Терешиным, § 13 (гл. 4) доц. Т. В. Малковой, глава 5 доц. А. Я. Блохом, глава 6 доц. А. Я. Блохом и доц. И. А. Павленковой, глава 7 доц. В. И. Крупичем, глава 8 доц. А. Я. Блохом и проф. Г. В. Дорофеевым, § 28, 29, 31, 33 (гл. 9) ст. преподавателем Л. З. Мудрой, § 30 (гл. 9) доц. Н. А. Терешиным, § 32 (гл. 9) доц. И. А. Павленковой, § 34, 35 (гл. 10) доц. Н. А. Терешиным, § 36 (гл. 10) доц. А. Я. Блохом и доц. Э. И. Кузнецовым, глава 11 доц. Э. И. Кузнецовым; III раздел написан: глава 12 проф. В. И. Мишиным, главы 13 и 14 доц. А. Е. Захаровой, глава 15 доц. В. А. Гусевым, глава 16 доц. К. И. Дуничевым.

Коллектив авторов пособия выражает благодарность рецензентам — кафедре методики преподавания математики Свердловского государственного педагогического института во главе с зав. кафедрой доц. Н. А. Шмаковой и зав. кафедрой математики и методики преподавания математики Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького доц. З. И. Слепкань.

Все отзывы и пожелания по совершенствованию пособия просим направлять по адресу: 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной Рощи, 41.

РАЗДЕЛ I

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В IV—V КЛАССАХ

Курс математики IV—V классов представляет собой органическую составную часть всей школьной математики. Поэтому основным требованием к его построению является структурирование содержания на единой идейной основе, которая, с одной стороны, является продолжением и развитием идей, реализованных при обучении математике в начальной школе, и, с другой стороны, служит последующему изучению математики в старших классах.

В содержании школьного предмета математики выделяется несколько сквозных идейных линий: числовая, функциональная, формально-оперативная, содержательно-прикладная, вычислительно-графическая, алгоритмическая и др. Не все они одинаково воплощаются на разных этапах обучения математике, но все значимы. В курсе математики IV—V классов они реализуются на числовом, алгебраическом и геометрическом материале. Такая компоновка учебного материала, являясь достижением методической науки, значительно обогащает содержание курса, служит облегчению усвоения изучаемых знаний и содействует развитию мышления школьников.

Распределение учебного материала осуществляется таким образом, что при изучении числовых множеств систематически используется геометрический и алгебраический материал. Так, например, изучение многих вопросов о числе проводится с использованием геометрической интерпретации: при сравнении чисел, введении понятия модуля числа, сложения положительных и отрицательных чисел используются активно координатный луч и координатная прямая, при изучении свойств и законов действий — буквенная символика, при обосновании свойств действий и выводе правил — понятия площади прямоугольника и объема параллелепипеда. Такая организация учебного материала способствует наилучшему раскрытию содержания изучаемых знаний и взаимосвязей между ними.

Глава 1. ЦЕЛЫЕ И ДРОБНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Понятие числа

Понятие числа является стержневым понятием школьного курса математики и служит также фундаментом, на котором строится изучение функций, тождественных преобразований, уравнений и т. п. Понятие числа относится к основным понятиям математики. Это значит, что нельзя ответить на вопрос «Что такое число?»,

используя ранее введенные понятия и отношения между ними. Оно просто, если рассматривать математические понятия, на нем основанные, и бесконечно сложно по многогранности содержания и диалектике развития. Поэтому учение о числе является одним из главных вопросов курса математики средней школы.

Программы средней школы, учебные и методические пособия дают рекомендации, помогающие учителям знакомить учащихся с новыми числами и действиями над ними. Наиболее интересны по этому вопросу рекомендации А. Я. Хинчина [165][1]. Он считает, что у учащихся должно сложиться представление о числе как об объекте, над которым можно производить арифметические операции.

Современная математика имеет дело с различными по природе числами: с натуральными (1, 2, 3, ...); с целыми (0, ± 1, ± 2, ± 3, ...), включающими и все натуральные; с рациональными (множество целых чисел, дополненное множеством дробей); с действительными (множество всех рациональных и иррациональных чисел); с комплексными (числа вида $a+bi$, где a и b — любые действительные числа, i — мнимая единица); с гиперкомплексными, простейшим видом которых являются кватернионы, т. е. числа вида $a+bi+cj+dk$, где a, b, c, d — любые действительные числа, а i, j, k — особые единицы, и т. д. Перечисленные классы чисел являются примерами колец и полей, изучаемых в алгебраической науке с единой точки зрения. Примером кольца может служить совокупность всех целых чисел, где всегда выполнимо сложение, вычитание, умножение, но не всегда выполнимо деление (даже если исключить деление на нуль); примером поля может служить множество рациональных чисел, где и вычитание и деление выполнимо (конечно, кроме деления на нуль). Числа и операции над ними изучаются в таких математических дисциплинах, как алгебра и теория чисел.

Согласно программе по математике вопросы, связанные с расширением понятия числа в школе, начинают изучаться в курсе математики IV—V классов, затем их изучение продолжается в курсе алгебры VI—VIII классов и далее в курсе алгебры и начал анализа в IX—X классах. Причем основные положения, связанные с развитием у учащихся представления о числе, отнесены к курсу математики IV—V классов (введение дробных и отрицательных чисел), что находится в соответствии с местом этого вопроса в фундаментальных разделах математики.

Проводя в школьном курсе математики линию развития понятия числа, учитель придерживается принципа расширения множества A до множества B, определяемого следующими условиями:

1) A должно быть подмножеством B ($A \subset B$).

2) Операции над элементами из множества A те же, что и для элементов из множества B, но смысл тех операций, которые были только в множестве A, остается неизменным.

Например, при изучении натуральных чисел рассматривалась

[1] Здесь и далее число в скобках [ ] означает ссылку на источник, указанный под этим номером в списке литературы в конце книги.

операция умножения натуральных чисел ($8 \cdot 3 = 24$), которая сводилась к сложению. Изучая дробные числа, вводим операцию умножения дробных чисел, которая носит уже другой характер. Теряет ли при этом смысл правило умножения натуральных чисел? Нет:

$$\frac{8}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{8 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 8 \cdot 3.$$

3) В множестве B должна быть выполнена операция, которая в множестве A была невыполнима или не всегда выполнима.

4) Расширение B должно быть минимальным из всех расширений множества A и должно определяться однозначно с точностью до изоморфизма.

Например, расширение множества целых чисел $\boldsymbol{Z}$ до множества рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$:

1) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$;

2) $-3+5=2 \left(\frac{-3}{1}+\frac{5}{1}=\frac{-3+5}{1}=\frac{2}{1}=2\right)$;

3) $6:2=3$

$6:4=?$ $\quad \frac{6}{4}=\frac{3}{2} \subset \boldsymbol{Q}$.

Некоторые замечания по пункту 4.

Два множества называются *изоморфными* относительно какой-либо операции, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие таким образом, что это соответствие распространяется и на результаты операции; например, сумме и произведению произвольных двух элементов первого множества будет соответствовать сумма и произведение соответствующих элементов второго множества. В таком случае по соотношениям, имеющимся в одном множестве, можно судить об отношениях, которые существуют в другом, изоморфном ему. Поэтому изоморфные группы, кольца и поля в алгебре принято считать тождественными. Элементы двух множеств, отвечающие друг другу при изоморфизме, обладают одинаковыми свойствами по отношению к рассматриваемым операциям. Поэтому если одно из множеств значительно легче обозримо, чем другое, то оно может служить в известном смысле моделью этого множества.

Алгебра изучает множества с точностью до изоморфизма относительно той операции, которая рассматривается в данной теории, а именно в теории групп относительно одной операции, в теории колец и полей относительно двух операций.

В школьном курсе рассматривается поле рациональных чисел. Ранее в школе рассматривалось поле комплексных чисел. В настоящее время этот материал изучается на факультативных занятиях. Эти числовые поля могут служить моделями всех тех полей, которые им изоморфны.

Например, множество всех рациональных чисел и множество всех рациональных точек числовой прямой изоморфны относительно

сложения и умножения, если сложение и умножение точек определить следующим образом:

суммой $A+B$ и произведением AB двух точек числовой оси $A(a)$, $B(b)$ называются соответственно точки $C(a+b)$ и $D(ab)$.

Преподавание вопросов, связанных с развитием учения о числе, учитель строит таким образом, чтобы ясна была связь понятий равенства, суммы и произведения, с одной стороны, и понятия числа, с другой. Нет понятия равенства, суммы, произведения без понятия числа, но нет также понятия числа без понятия равенства, суммы, произведения. Об этих четырех понятиях нельзя в школе говорить порознь. Они имеют смысл лишь в отношениях друг к другу. Числа обладают свойствами, которые мы выражаем в понятиях их равенства, суммы и произведения. Эволюция числа неразрывно связана с эволюцией понятия равенства, суммы и произведения. Развитие этих понятий и есть, по существу, эволюция понятия числа. Мы меняем условия равенства, суммы и произведения и получаем новые числа. Первично не число, а понятия равенства, суммы, произведения. Однако число не вторично. На определенном этапе эволюции новое число, созданное в результате развития равенства, суммы, произведения, в применении к старому числу приобретает в единстве с этими понятиями новые качества. Эволюция понятия равенства, суммы и произведения в применении к только что созданному числу приводит к новому этапу развития понятия числа. В логическом смысле этот процесс направляется идеей перманентности.

Таким образом, для того чтобы новые числа были равноправными, были узаконены, необходимо введение определения:

I. 1) Понятия равенства.

2) Понятия «больше», «меньше», т. е. установление критерия сравнения новых чисел между собой и с ранее известными числами.

II. Понятия суммы.

III. Понятия произведения.

Надо показать также, что новые числа подчиняются всем законам арифметических действий, установленным для изучаемых раньше чисел.

В теоретических курсах понятия I, II, III вводятся путем определений, в школьном курсе математики надо показать целесообразность вводимых определений путем рассмотрения конкретных примеров.

§ 2. Натуральные числа

В математике имеются различные теории построения каждого множества чисел. Для построения арифметики натуральных чисел используется обычно аксиоматический подход, например, основанный на системе аксиом Пеано [100]. Учителю математики известно и другое построение арифметики натуральных чисел, связанное с именем Кантора, основанное на теории множеств и, в частности, на понятии мощности любого множества.

В школьном курсе математики изучение арифметики натуральных чисел основано прежде всего на наглядности. Однако основой изложения этого материала в учебниках и на уроках является ясное и последовательное логическое строение его. Причем обучение арифметике натуральных чисел исходит из самостоятельного происхождения этих чисел из счета предметов. Формирование понятия натурального числа начинается в начальной школе.

В IV классе проводится систематизация и расширение сведений о натуральном числе, полученных в начальной школе. Изучение натуральных чисел здесь связано с формированием таких важных для математики понятий, как «координатный луч», «уравнение» и «неравенство».

При этом учащиеся должны твердо усвоить, что любое натуральное число может быть изображено точкой на координатном луче. Путем построения координатного луча учащиеся убеждаются, что каждому натуральному числу соответствует единственная точка на координатном луче, но не каждой точке координатного луча соответствует натуральное число. На последний момент важно обратить особое внимание, ибо это готовит к пониманию необходимости введения новых чисел, т. е. к расширению понятия числа. Выясняется такое свойство множества натуральных чисел, как бесконечность. С помощью координатного луча сравниваются натуральные числа между собой, устанавливаются понятия «равно», «больше» и «меньше» для натуральных чисел. Важно, чтобы ученики усвоили такие понятия, как «числа, следующие за данным», «числа, предшествующие данному», умели ответить на вопросы: сколько чисел может непосредственно следовать за данным, сколько чисел может непосредственно предшествовать данному, кроме 1. Дается запись четного и нечетного чисел формулами: $2n$, $2n+1$.

Особое внимание уделяется действиям над многозначными числами, трудным случаям умножения и деления, действиям с нулем и единицей и, в частности, «закону поглощения 0 ($a+0=a$, $0+a=a$)». Показывается, например, что действия $1 \cdot a=a$, $0 \cdot a=0$ являются, по существу, следствиями из определения действия умножения, а $a:1=a$, $a:a=1$, $0:a=0$, $a:0$ — из определения действия деления.

После изучений действий над натуральными числами важно рассмотреть с учениками вопрос о замкнутости множества натуральных чисел относительно сложения и умножения и отметить, что в отношении вычитания это свойство не выполняется.

Большое внимание уделяется в этой теме законам арифметических действий. Важно показать глубокое теоретическое значение законов, так как у учащихся обычно создается впечатление, что законы нужны лишь для упрощения арифметических действий. В IV классе законы арифметических действий записываются в общем виде с использованием буквенной символики. Рассмотрение коммутативного и ассоциативного законов умножения целесообразно связать с геометрическим материалом, а именно с вычислением площадей прямоугольников и объемов прямоугольных параллелепипедов.

§ 3. Дробные числа

Введение дробных чисел в курсе математики IV класса является, по существу, для учащихся первым расширением понятия числа.

Программой предусматривается изучение дробных чисел в IV классе, а отрицательных чисел в V классе. К такой последовательности изучения этих тем готовит изучение математики в младших классах средней школы. Действительно, с дробными числами учащимся приходится значительно чаще встречаться в окружающей жизни, чем с отрицательными. Следует учитывать также и то, что исторически дробные числа появились значительно раньше отрицательных и, значит, должны легче усваиваться учениками.

Следует отметить, что в нашей стране изменена последовательность изучения обыкновенных и десятичных дробей. В течение многих десятилетий в школе сначала изучались обыкновенные дроби, а затем десятичные. Принятое в 1966 г. постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О мерах дальнейшего улучшения работы средней общеобразовательной школы» предусматривало введение в школу научно обоснованных учебных планов и программ.

В соответствии с программой по математике, которая после этого постановления вошла в школу, сначала стали изучаться десятичные дроби, а затем обыкновенные. Такая последовательность изучения дробей объясняется главным образом тем, что:

1. Запись десятичных дробей составляет, по существу, естественное и простейшее продолжение нумерации целых чисел, нумерации «вправо», что обеспечивает большую доступность для их введения.

2. Десятичные дроби имеют гораздо большую практическую значимость и применение, чем обыкновенные, ибо они органически связаны с метрической системой мер.

3. Техника операций над десятичными дробями проще, чем над обыкновенными.

4. Проще также и обоснование правил сложения и вычитания десятичных дробей, которое может быть дано по аналогии с соответствующими действиями над целыми положительными числами.

Однако изучение десятичных дробей без предварительного ознакомления с обыкновенными дробями вызывает некоторые трудности методического порядка. К ним можно отнести следующие:

1. Учащимся IV класса довольно трудно представить сотую, тысячную долю числа и т. д., без ссылок на такие простые доли, как половина, треть, четверть и др.

2. Введение понятия десятичной дроби в IV классе должно опираться на сведения об обыкновенных дробях, полученные учениками в начальной школе. Введение десятичной дроби вне всякой связи с понятием обыкновенной дроби дает формальное представление о десятичной дроби, и у учащихся создается впечатление, что обыкновенные и десятичные дроби — это разные числа.

3. При решении задач нахождения дроби числа и числа по его дроби учащиеся должны отчетливо понимать дробь как результат

деления целого на равные доли и взятия нескольких таких долей. Если не опираться на понятие обыкновенной дроби, то суть этих задач останется неясной учащимся.

Учитывая все это, программа предусматривает при изучении в IV классе десятичных дробей исходить из имеющихся у учащихся по курсу начальной школы сведений об обыкновенных дробях и некоторых их преобразованиях, а также из знакомства учащихся с метрической системой мер. К IV классу учащиеся знают, что один дециметр есть десятая доля метра; один сантиметр — десятая доля дециметра и т. д.

Повторение и обобщение полученных в начальной школе сведений об обыкновенных дробях связывается с расширением этих знаний: учащиеся знакомятся с такими вопросами, как доля единицы; изображение дробей на координатном луче; правильные и неправильные дроби; основное свойство дроби, которое позволяет сокращать дроби, приводить дроби к одинаковому знаменателю или числителю, сравнивать дроби; представление натурального числа в виде дроби. Такова пропедевтика обыкновенных дробей в IV классе.

Работа над темой «Десятичные дроби», в которой учащиеся впервые встречаются с расширением понятия числа, начинается с формирования понятия обыкновенной дроби. Десятичная дробь рассматривается как частный случай обыкновенной дроби, как способ записи дробей со знаменателем вида 10^n.

Введение понятия нового числа связывается с происхождением этих чисел, с их возникновением. Дробные числа возникли при измерении величин. Но не только практика людей вызывает к жизни новые числа, развитие самой математики также требует расширения понятия числа. В математике новые числа вводятся обычно для того, чтобы выразить результаты обратных действий в том случае, когда эти результаты не могут быть выражены числами того же множества, к которому принадлежат данные числа. Невозможность выразить результат деления одного натурального числа a на другое натуральное число b в случае, когда b отлично от нуля и a не представляет суммы слагаемых, равных b, некоторым числом c, также принадлежащим множеству натуральных чисел, привело к необходимости расширения множества натуральных чисел и 0 путем присоединения к нему множества дробей. В расширенном множестве становится выполнимым деление (исключая деление на нуль).

В математической науке имеются различные теории дробей. Наиболее распространенной является теория пар. Дробные числа определяются как числовые пары второй группы, состоящие из двух целых чисел a и b $<a, b>$, взятых в неизменном порядке, причем второй компонент пары не может равняться нулю. Известным предполагается только совокупность целых чисел и действия над ними. Даются определения понятиям «равно», «больше» и «меньше», «сумма» и «произведение» двух дробных чисел. Остальные операции выводятся из принятых определений.

Введенные действия в этой расширенной числовой области должны подчиняться тем же основным законам, которые имеют место при

действиях с целыми числами. В этом суть принципа перманентности основных законов.

Формально-логическое изложение теории дробных чисел может быть дано учащимся только в старших классах в порядке обзора либо на факультативных занятиях.

В практике преподавания основным методом изучения новых чисел, в частности дробных, являются поясняющие описания, которые опираются на знания, жизненный опыт учащихся. Поясняющие описания не заменяют определений, понятий, а лишь показывают целесообразность их введения.

Каждый этап развития понятия числа в школе состоит из двух частей: 1) мотивировка; 2) подтверждение.

Такова структура поясняющих описаний.

Мотивировка введения нового числа опирается обычно на жизненный опыт учащихся. Так, введение дробных чисел связывается с изменением, делением целого на части. Мотивировка может быть алгебраической, практической.

Подтверждение факта расширения, связанное прежде всего с соответствующими задачами, обычно хуже представлено в школьных учебниках, чем мотивировка введения новых чисел.

Введение дробных чисел в школьном курсе связывается с необходимостью более точного измерения величин, с делением чисел. В связи с этим целесообразно познакомить учащихся с возникновением дробных чисел в процессе практической деятельности человека, а именно в процессе измерения. Краткая историческая справка поможет учащимся лучше овладеть данным материалом. Содержание ее может быть примерно следующим.

Измерение, так же как и счет, имело место у всех народов с самых древних времен; измерение было непосредственно связано со счетом. Потребность в более точном измерении явилась причиной того, что единицы мер стали раздроблять на две, на три и более частей. Этим более мелким мерам давали особые наименования, и в дальнейшем величины измерялись уже этими более мелкими единицами, однородными с ними. Так возникли первые конкретные дроби. Отвлеченных дробей в это время еще не знали.

Длинен был путь перенесения названия какой-либо части одной меры на такую же часть другой меры, это был путь создания абстрактного понятия дроби.

Так, например, в России была земельная мера четверть и более мелкая — полчетверть, которая называлась осьмина. Это были конкретные дроби, единицы для измерения площади земли, но осьминой нельзя было измерить время или скорость и др. Значительно позднее осьмина стала означать отвлеченную дробь $\frac{1}{8}$, которой можно выразить любую величину. Дроби первоначально в русских рукописях назывались долями, затем ломаными числами. При записи дробного числа использовалась горизонтальная черта.

Довольно долгим был путь и к введению десятичных дробей. В древности некоторые народы пользовались шестидесятеричной систе-

ной счисления и дроби записывали в шестидесятеричной системе так же, как в настоящее время записывают наши десятичные дроби. Римляне пользовались двенадцатеричными дробями.

В XVI—XVII вв. в связи с развитием общества, с развитием науки и техники возникла необходимость облегчить громоздкие вычисления. Внимание математиков было обращено к десятичным дробям, к десятичной системе мер. В России учение о десятичных дробях впервые было изложено в «Арифметике» Магницкого, где были приведены и десятичные меры длины и площади. В этой же работе излагается и учение о шестидесятеричных дробях.

Как возникла запись десятичной дроби?

Всякое целое число N в данной системе счисления, основанием которой служит некоторое число k, может быть представлено следующим образом:

$$N=a_0k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n,$$

где a_0, a_1, ..., a_n изображают цифры от нуля до $k-1$.

Такое письменное обозначение чисел основано на принципе поместного значения цифр: при передвижении на один разряд влево каждая цифра принимает значение в k раз больше предыдущего и, обратно, при передвижении на один разряд вправо значение цифры соответственно уменьшается в k раз. Принцип поместного значения цифр сохраняется и при дальнейшем передвижении вправо. Так, при передвижении вправо на один разряд после единиц цифра получает значение, в k раз меньшее, и т. д. Раньше имели единицы счета k, k^2, k^3, ... и т. д. Теперь вводится новая единица счета: $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{k^3}$, и т. д. В десятичной системе счисления $k=10$. Таким образом, число N может быть записано следующим образом:

$$N=a_010^n+a_110^{n-1}+\ldots+a_{n-1}10+a_n+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\ldots+\frac{b_m}{10^m},$$

где a_0, a_1, ..., a_n и b_1, b_2, ..., b_m — цифры от 0 до 9.

После появления способа записи числа N без знаменателя в математику вошла десятичная дробь. Был введен условный знак «,» для отделения десятых долей единицы от единиц. С введением десятичной дроби все записи и вычисления значительно упростились.

Итак,

$$N=M+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\ldots+\frac{b_m}{10^m}=\frac{M\cdot10^m+b_110^{m-1}+b_210^{m-2}+\ldots+b_m}{10^m},$$

где M — целая часть числа. Без знаменателя и с использованием запятой — условного знака для отделения целой части от дробной — число N можно записать следующим образом:

$$N=a_0a_1a_2\ldots a_n,\ b_1b_2\ldots b_m,$$

или

$$N=M,\ b_1b_2\ldots b_m.$$

Если $M=0$, то $N=0,\ b_1b_2\ldots b_m$.

Согласно программе и учебнику по математике формирование понятия дроби начинается с умения получать доли при делении какой-либо величины на несколько равных частей. Учащиеся должны уметь называть и показывать доли отрезка, круга, прямоугольника и других предметов. Ряд упражнений с широким использованием наглядности призван сформировать у учащихся представление о том, что одно и то же число долей или частей какого-либо предмета означает одну и ту же дробь.

Учащимся предлагается разделить на равные части знакомые предметы, такие, как арбуз, дыня, пирог и др., и выделить одну из частей, одну из долей. Такие же по характеру упражнения выполняют учащиеся с использованием геометрического материала: деление отрезка, круга, квадрата на равные части, на равные доли и взятие одной такой части, одной доли. От выделения одной части учащиеся переходят к делению целого на равные части и взятию нескольких таких частей.

На базе целесообразно подобранных упражнений, на основе жизненного опыта учащихся, что является мотивировкой введения понятия дроби, дается описание нового числа. Учащимся сообщается, что для выражения одной или нескольких долей предмета нужны новые числа, а именно дроби. Далее приводятся примеры обыкновенных дробей и дается форма записи обыкновенной дроби.

Уделяется внимание в учебниках получению дроби, возникновению дроби в связи с необходимостью более точного измерения и деления натуральных чисел.

Большое значение в изучении дробей имеет использование графического метода, в частности координатного луча. Ученики выполняют ряд упражнений, с помощью которых формируются умения отмечать на луче точку, соответствующую заданной дроби, и, наоборот, называть дробь, соответствующую отмеченной точке. Координатный луч широко используется также для сравнения дробей и для изучения основного свойства дроби.

Под руководством учителя учащиеся строят координатный луч. На луче получают точки, против которых ставят числа, показывающие, сколько раз единица длины была отложена от начала до данной точки. Затем откладывают доли единицы $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и т. д. Против полученных точек записывают соответствующие дроби (рис. 1). Такая графическая иллюстрация служит подготовкой к усвоению основного свойства дроби. Действительно, ученики наблюдают, что одной и той же точке координатного луча может соответствовать несколько дробей. Эти дроби равны, так как они выражают длину одного и того же отрезка. В этом случае вывод основного свойства

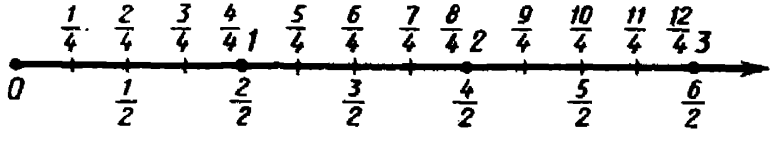


Рис. 1

дроби строится на том положении, что дроби, измеряющие одну и ту же величину при одной и той же единице измерения, равны. Таким образом, основное свойство дроби является при такой трактовке следствием определения равенства дробей.

Учащимся можно предложить следующее упражнение (рис. 2). Начертить отрезок (удобно взять за единицу отрезок длиной в 16 клеток). Выделить отрезок в $\frac{3}{4}$ единицы и показать, что полученный отрезок составляет также $\frac{6}{8}$ и $\frac{12}{16}$ единицы. Используя графическую иллюстрацию, учащимся можно предложить выяснить, как получились знаменатель и числитель каждой из указанных дробей из знаменателя и числителя $\frac{3}{4}$ и, обратно, как можно получить знаменатель и числитель дроби $\frac{3}{4}$ из знаменателя и числителя, полученных дробей:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{12}{16},$$

$$\frac{12:4}{16:4}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4},$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{3\cdot 4}{4\cdot 4}.$$

Рис. 2

Основное свойство дроби вводится на базе поясняющих описаний. В математике, например, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{6}$ — дроби разные, но принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности, в школьном курсе эти дроби являются разными записями одного и того же числа.

Десятичные дроби вводятся в связи с рассмотрением позиционной системы. Десятичная дробь появляется как частный случай обыкновенной дроби, как способ записи дробей со знаменателем 10^n. Таким образом, школьникам дается пояснение, в которое входят два условия, характеризующие десятичную дробь: это дробь, знаменатель которой 10^n $\left(\frac{1}{10}, \frac{3}{1000}\right.$ и др.$\left.\right)$, второе условие относится к форме записи (0,1; 0,003 и др.).

В учебниках, которые были приняты в общеобразовательной школе до 1966 г. ([89], [170]), десятичная дробь рассматривалась как дробь со знаменателем 10, 100, 1000 и т. д. Второе условие, относящееся к форме записи дроби, не требовалось. В учебнике математики для IV класса ([57]) большое внимание уделяется выработке навыков чтения и записи десятичных дробей, умению записывать с помощью запятой числа вида $\frac{m}{10^n}$, где $m \in N$, а также записывать результаты измерения десятичной дробью.

Вопрос о сравнении дробей рассматривается в неразрывной связи с основным свойством обыкновенной дроби. Использование

его позволяет установить важное свойство десятичных дробей, состоящее в возможности приписывания и отбрасывания нулей справа. После рассмотрения вопроса о равенстве десятичных дробей учащиеся переходят к выяснению понятий «меньше» и «больше» для десятичных дробей. Использование координатного луча позволяет этот вопрос сделать более доступным и интересным учащимся.

Сложение и вычитание десятичных дробей дается по аналогии со сложением и вычитанием натуральных чисел. Опыт учащихся по выполнению этих операций позволяет довольно легко сформулировать правила сложения и вычитания десятичных дробей.

Одновременно с введением сложения учащиеся знакомятся с переместительным и сочетательным законами. Они должны знать формулировку этих законов, уметь записывать эти законы в общем виде с помощью букв и применять их при вычислениях.

Изучение умножения и деления десятичных дробей начинается с рассмотрения простейших случаев, т. е. с умножения и деления десятичной дроби на натуральное число. При рассмотрении ряда примеров выясняется, что умножение и деление десятичной дроби на натуральное число имеет тот же смысл, что и умножение и деление натурального числа на натуральное число, а именно: умножить число a на b — это значит найти сумму b слагаемых, каждое из которых равно a; разделить число a на число b — это значит найти такое число, которое, будучи умножено на b, дает число a.

Для того чтобы подвести учащихся к правилу умножения десятичной дроби на натуральное число, главным образом к той его части, где говорится о числе цифр, которые надо отделить справа запятой, выполняется ряд упражнений, в которых сопоставляется результат сложения a равных слагаемых с результатом умножения числа a на число b, равное числу слагаемых.

При делении десятичной дроби на натуральное число важным моментом является постановка запятой после окончания деления целой части данного числа.

К простейшим случаям умножения и деления десятичных дробей относятся умножение и деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. Путем рассмотрения ряда соответствующих примеров и использования правил умножения и деления натурального числа на 10, 100, 1000 и т. д. учащихся подводят к формулировке нужного правила. Только после рассмотрения частных случаев умножения и деления десятичных дробей предлагается изучение умножения и деления десятичной дроби на десятичную дробь.

Умножение на десятичную дробь рассматривается в связи с решением задачи на нахождение площади прямоугольника. Вычисление площади прямоугольника для случая целых чисел сопоставляется с необходимостью выполнения также действия умножения и в случае измерения длин сторон десятыми, сотыми или тысячными долями ранее избранной единицы длины.

После разбора отдельных задач, решение которых требует выполнения умножения на десятичную дробь, дается общее правило умно-

жения десятичных дробей. Большое внимание уделяется выяснению свойств умножения. Утверждается справедливость переместительного, сочетательного и распределительного законов для умножения десятичных дробей. Целесообразно ввести запись этих законов с помощью букв, а именно:

1) переместительный закон — при любых значениях a и b верно равенство $ab=ba$;

2) сочетательный закон — при любых значениях a, b и c верно равенство: $(a\cdot b)\cdot c=a(b\cdot c)$;

3) распределительный закон — при любых значениях a, b и c верно равенство: $(a+b)\cdot c=ac+bc$; при любых значениях a, b и c, если a больше или равно b, верно равенство $(a-b)\cdot c=ac-bc$.

Дается свойство нуля и единицы для десятичных дробей, а именно: при любых значениях a верны равенства

$$a\cdot 1=1\cdot a=a,$$
$$a\cdot 0=0\cdot a=0.$$

Большое внимание уделяется использованию свойств умножения для более рационального выполнения умножения десятичных дробей.

Деление на десятичную дробь вводится в связи с определением деления как действия, обратного умножению десятичных дробей.

Учащихся подводят к правилу деления на десятичную дробь, которое требует хорошего усвоения прежде всего свойств умножения и навыков деления на натуральное число.

Большое место при изучении десятичных дробей занимают задачи на все действия.

Материал этого раздела подводит итог рассмотрения десятичных дробей в курсе математики IV класса. Особое внимание при решении задач уделяется выработке навыков выполнения операций над десятичными дробями и порядку выполнения действий. Много места занимает решение уравнений, решение задач арифметическим и алгебраическим способом, где данные задаются десятичными дробями.

Изучением десятичных дробей заканчивается курс математики в IV классе.

§ 4. Положительные и отрицательные числа

Знакомство с отрицательными числами является следующим расширением понятия числа после введения дробных чисел. Вопросы, связанные с введением отрицательных чисел, с изучением положительных и отрицательных чисел, являются наиболее трудными для учащихся. История развития математики показывает, что отрицательные числа значительно труднее дались человечеству, значительно труднее вошли в математику, чем дроби. Это объясняется тем, что отрицательные числа значительно меньше, чем дроби, связаны с жизнью, практикой.

Отрицательные числа возникли внутри самой математики в связи с выполнением действий, преобразований с уже известными числами (натуральные, нуль, дроби). Математики Древней Греции

не признавали отрицательных чисел, они не могли им дать конкретное истолкование. Лишь в работах Диофанта (III в. н. э.) встречаются преобразования, которые приводят к необходимости выполнения операций над отрицательными числами, и отрицательные числа начинают появляться в некоторых математических трудах.

Довольно широкое использование получили отрицательные числа в работах индийских ученых. Так, например, в их трудах встречается решение уравнений, где данные и ответы — числа положительные, известные числа, а в промежуточных вычислениях получаются отрицательные числа. Положительные числа они называли настоящими, а отрицательные — ненастоящими, ложными. Отрицательные числа рассматривали как денежный долг, а положительные — как наличные деньги.

Первые правила сложения и вычитания отрицательных чисел принадлежат также индийским ученым и связаны с трактовкой положительных и отрицательных чисел как имущество и долг.

Сумма двух имуществ есть имущество.

Сумма двух долгов есть долг.

Сумма имущества и 0 есть имущество.

Первые правила умножения появились позже. В работах Оскара (XII в.) дано такое правило:

Произведение двух долгов или имуществ — есть имущество.

Если приведенные выше правила сложения положительных и отрицательных чисел достаточно ясны, то для правила умножения этих чисел не могли найти обоснование. Почему произведение двух долгов есть имущество, оставалось непонятным.

Имели распространение довольно оригинальные правила действий с положительными и отрицательными числами, а именно:

друг моего друга — мой друг,

враг моего друга — мой враг,

друг моего врага — мой враг.

Вплоть до XVII в. математикам не удавалось должным образом обосновать правило умножения отрицательных чисел.

Леонард Эйлер (1707—1783) говорит по этому поводу примерно следующее:

имеем два числа a и b, рассмотрим, как умножить эти числа:

1) если $a>0$, $b>0$ — ясно, т. е. произведение будет иметь знак «+»;

2) если $a<0$, $b>0$ — ясно, т. е. произведение будет иметь знак «—»;

3) если $a>0$, $b<0$, то применяем переместительный закон и получаем случай второй;

4) если $a<0$, $b<0$, то произведение знак «—» не может иметь, так как произведение со знаком «—» было в другом случае, значит, произведение будет иметь знак «+». (Под другим случаем понимается тот случай, когда числа a и b имеют разные знаки. Другого обоснования Эйлер не дал.)

Были попытки обосновать правила действий с положительными и отрицательными числами исходя из геометрических образов. Так,

для обоснования правила умножения положительных и отрицательных чисел вычисляли площадь заштрихованного прямоугольника (рис. 3) непосредственно и путем выполнения операции умножения:

$$(a-c)(b-d)=$$
$$=ab-bc-ad+cd.$$

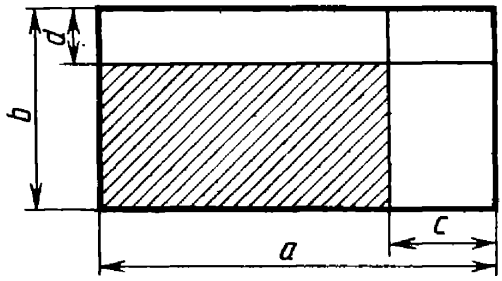


Рис. 3

Полученный один и тот же результат являлся основанием для формулировки правила умножения. Ошибочность возникновения этого правила связана с тем, что, выполняя умножение $a-c$ на $b-d$ в скрытой форме, предполагают, что для отрицательных чисел справедлив распределительный закон, хотя отрицательное число не введено, не дан критерий сравнения, не определены действия сложения и умножения.

Таким образом, отрицательные числа довольно долго не получали признания.

Права гражданства отрицательные числа получили лишь после того, как Рене Декарт (1596—1650) применил их в построении аналитической геометрии. Р. Декарт дал определенное истолкование отрицательным числам, они получили математическую интерпретацию. Отрицательные числа он рассматривал как самостоятельные, расположенные на оси x влево от начала координат. Декарт называл их ложными. Так отрицательные числа вошли в математику.

Основная цель ознакомления учителя математики с историей любого математического вопроса прежде всего в том, что этот материал, как правило, помогает предвидеть трудности, которые могут возникнуть при объяснении соответствующей темы на уроке.

С методической стороны введение отрицательных чисел особых затруднений не представляет, так как с величинами такого рода дети часто встречаются в жизни. Наибольшую трудность в изучении отрицательных чисел представляет обоснование действий над ними. Приведенные выше факты из истории открытия отрицательных чисел показывают, что в течение многих веков математики не могли дать обоснования действий над отрицательными числами. Даже такие крупнейшие математики своего времени, как Эйлер и Коши, не могли справиться с этой задачей. Поэтому учитель должен очень серьезно отнестись к изучению школьниками этого вопроса, с большим терпением помогать учащимся освоить его.

В математике имеются различные интерпретации рациональных чисел. Наиболее распространенной является построение рациональных чисел на основе теории пар.

Изучение рациональных чисел в школе основывается на генетическом и индуктивном изложении и начинается с рассмотрения частных случаев, постепенно приводящих к общим выводам. Такой подход не должен противоречить научным теориям, должен быть, конечно, свободным от ошибок научного характера, не содержать ничего такого, от чего в дальнейшем придется отказаться.

Одним из недочетов при изучении рациональных чисел довольно долго был вопрос, связанный с терминологией. Множество рациональных чисел рассматривается как множество, которое получают путем присоединения к множеству, состоящему из нуля, натуральных и дробных положительных чисел, множества отрицательных чисел.

Однако в учебной и методической литературе для названия множества рациональных чисел применялся термин «относительные числа». Этот термин длительное время был принят в стабильных учебниках и в школьных программах по математике до 1955/56 учебного года. Он подчеркивал относительность начальной точки отсчета — нуля. Использование термина «относительные числа» нецелесообразно, даже ошибочно.

Ошибочность заключается в следующем.

Во-первых, понятие «относительные числа» имеет больший объем, чем понятие «рациональные числа», ибо оно включает, кроме рациональных чисел, и все положительные и отрицательные иррациональные числа.

Во-вторых, введение отрицательных чисел происходит таким образом, что к известным уже числам, которые называются положительными (нуль занимает особое положение), присоединяют новые, называемые отрицательными.

Использование в школьной практике термина «относительные числа» приводило к тому, что у учащихся складывалось представление, что в арифметике были одни числа, а в алгебре изучаются какие-то особые числа со знаком. У учащихся складывалось неверное представление, им казалось, что речь идет не о расширении множества положительных чисел, а о введении совершенно новых чисел со знаком. Значит, знакомство с отрицательными числами должно создать у учащихся четкое представление о расширении множества всех ранее изученных положительных чисел, что новое множество всех рациональных чисел состоит из двух подмножеств — положительных и отрицательных чисел. Введение отрицательных чисел можно рассматривать как присоединение новых чисел к уже известным (натуральным и дробным), которые при этом получают название положительных чисел.

В школьном курсе математики учащиеся первоначально знакомятся с натуральными числами, следующим расширением является множество положительных рациональных чисел, и лишь после этого изучается множество рациональных чисел, а затем множество действительных чисел. Такая последовательность расширения понятия числа в школе отражает исторический путь развития этого понятия. Опыт работы школы убеждает в целесообразности такого пути изучения различных числовых множеств.

В действующих школьных программах по математике довольно четко выражена последовательность развития понятия числа, о которой было сказано выше.

Первоначальный проект школьной программы по математике (Математика в школе.— 1967.— № 1) предлагал расширение понятия числа давать с алгебраической точки зрения, т. е. вначале

рассматривать множество натуральных чисел, затем множество целых чисел, следующее расширение — множество рациональных чисел, после чего — множество действительных чисел.

Однако, учитывая трудности, связанные с ранним введением отрицательного числа, действующие школьные программы и учебники по математике предлагают после знакомства с натуральными числами изучать десятичные дроби, затем вводить понятие отрицательного числа и рассматривать множество положительных и отрицательных чисел. В начале следующей темы, посвященной детальному изучению обыкновенных дробей, дается понятие о рациональном числе. Формирование понятия числа в школьном курсе заканчивается изучением действительных чисел.

Учащиеся V классов знакомятся с понятием отрицательного числа, изучают положительные и отрицательные числа, рациональные числа.

В учебной и методической литературе имеются в основном два пути введения отрицательных чисел.

1. *Формально-логический.* Он связан с внутренними потребностями математики. Введение отрицательных чисел объясняется необходимостью выполнения действия вычитания во всех случаях. Он наиболее близок к аксиоматическому построению множества рациональных чисел.

Эта точка зрения нашла отражение в работах таких математиков, как П. А. Погорельский, Д. А. Граве, в первых учебниках А. П. Киселева (до 1912 г.) и др.

2. *Реально-конкретный.* Он исходит из их непосредственной связи с действительностью, с конкретными представлениями.

Такая тенденция нашла отражение в учебниках А. Ю. Давидова, А. Ф. Малинина, К. П. Буренина, К. Ф. Лебединцева, А. П. Киселева (с 1912 г.) и др., а также в большинстве современных учебников.

Для нового понятия отрицательного числа надо не только дать определение, но и сделать это новое число равноправным с ранее известными положительными числами, узаконить его.

Для него необходимо:

1) определить понятие равенства;

2) определить понятия «больше», «меньше», т. е. указать критерий сравнения новых чисел между собой и с ранее известными числами;

3) определить действия сложения и умножения;

4) показать, что законы действий, установленные для изучаемых ранее чисел, справедливы для новых чисел.

Необходимо показать также, что до введения отрицательных чисел операция вычитания на множестве положительных чисел была не всегда выполнима. Таким образом, в школьном курсе математики сочетаются реально-конкретный и формально-логический пути введения понятия отрицательного числа.

Учащиеся должны хорошо понимать смысл и значение отрицательных чисел, поэтому введение отрицательных чисел должно быть хорошо мотивировано.

Мотивировка может быть:

а) алгебраической (возможность выполнения вычитания);

б) геометрической (соответствие между точками прямой и числами);

в) практической (характеристика изменения величины).

В учебнике математики для V класса ([58]) довольно подробно рассматриваются эти вопросы. Помещены разнообразные и интересные по содержанию задачи.

Для введения понятия отрицательного числа нельзя ограничиваться рассмотрением какой-то одной конкретной ситуации, ограниченным числом примеров. Если это понятие вводится на большом числе примеров, то ученики и в аналогичной ситуации научатся его применять.

Мотивировать введение понятия отрицательного числа в школе можно также и на основе знакомого арифметического материала в связи с невозможностью выполнения вычитания на множестве положительных чисел. При этом в качестве иллюстрации можно использовать координатную прямую.

Пример (рис. 4). Пусть число 5 — уменьшаемое, а вычитаемыми будут числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

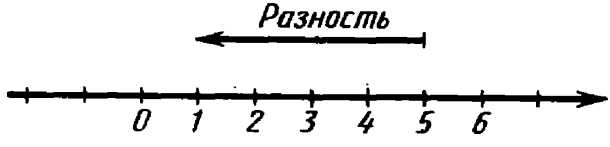


Рис. 4

Всякий раз, чтобы найти разность между числом 5 и каждым из вычитаемых, достаточно перемещаться влево по координатной прямой от уменьшаемого на столько единиц, сколько их содержится в вычитаемом.

$5-0=5$
$5-1=4$
$5-2=3$
$5-3=2$
$5-4=1$
$5-5=0$
$5-6=-1$
$5-7=-2$

Результат вычитания из числа 5 числа 6 окажется на одну единицу слева от нуля.
Но чтобы не писать «слева от нуля», принимают условие: писать перед единицей знак «—».

Использование большого числа различных интерпретаций, которые сопровождают новое понятие отрицательного числа, облегчает применение новых чисел в различных приложениях. Рассмотрим несколько методических приемов, используемых при введении понятия отрицательного числа и исходящих из реально-конкретного пути изучения отрицательных чисел.

В учебной и методической литературе довольно распространенным является прием использования некоторой конкретной задачи, исходя из общей формулы решения которой пытаются ввести понятие отрицательного числа.

Пример 1. Термометр показывал утром a градусов, а в полдень — b градусов. На сколько градусов изменилось показание термометра за это время, если:

а) $a=6$, $b=13$; б) $a=7$, $b=7$; в) $a=10$, $b=8$?

Пример 2. Теплоход прошел m км вверх по реке (против течения), а затем n км вниз. На каком расстоянии от первоначального места и по какую сторону от него находится теплоход, если:

а) $m=80$, $n=25$; б) $m=50$, $n=90$; в) $m=60$, $n=60$?

Рассмотрим решение первой задачи. Составим формулу для ее решения:

$$b-a.$$

а) $a=6$, $b=13$, $b-a=13-6=7$. Семь градусов выше нуля.

б) $a=7$, $b=7$, $b-a=7-7=0$. Термометр показывает нулевую температуру.

Нуль принимает новый смысл, это число, которое показывает определенную температуру, т. е. это уже число, характеризующее величину.

в) $b-a=8-10$, что не имеет смысла для учащихся. Но ведь температура существует и в этом случае. Как ее найти?

Обычно на этот вопрос учащиеся отвечают, что надо из 10 вычесть 8, или говорят, что будет два градуса ниже нуля. Учитель сообщает учащимся, что и в этом случае пользуемся формулой $b-a$ и выполняем вычитание $8-10$, но оно противоположно действию $10-8$, и поэтому удобнее результату приписывать знак «—», т. е. $8-10=-2$.

Вместо слов «выше нуля» и «ниже нуля» договорились ввести математические знаки «+» и «—», и тогда формула $b-a$ стала применимой для любых значений b и a.

После решения нескольких аналогичных задач делается вывод о том, что решение одной и той же задачи не может быть выражено одной формулой, если пользоваться только положительными числами. Поэтому возникает необходимость введения новых чисел — отрицательных чисел.

Этот подход не лишен недочетов. Например, более строго надо доказать справедливость формулы для всех случаев, когда понятие о положительных и отрицательных числах и действиях над ними уже дано.

Часто в учебной и методической литературе встречается способ введения отрицательных чисел в связи с рассмотрением изменения какой-нибудь величины. Причем положительные числа характеризуют увеличение величины, отрицательные — ее уменьшение.

Рациональное число рассматривается как мера значения величины, которая изменяется в двух противоположных направлениях. В этом случае необходимо указание направления рассматриваемых величин. Примеры:

1. Пешеход от станции прошел 10 км. Где он находится?

2. Термометр показывает 12 °С. Замерзла ли вода? И т. д.

Из рассмотрения таких примеров учащиеся убеждаются, что для определенности в этих задачах необходимо указать направление, в котором идет отсчет, направление изменения величины. Вместо того чтобы применять словесные записи: вверх-вниз, вправо-влево, тепло-холод и т. д., что громоздко, проще направление изменения величины характеризовать математическими знаками. Для числа, характеризующего изменение величины в одном направлении, принимается знак «+» (например, 12° тепла запишем: +12°); для числа, характеризующего изменение величины в противоположном направлении, принимается знак «—» (например, 12° холода запишем: —12°).

Такой подход имеет большое преимущество по сравнению с приведенным выше. Рассмотрение задач в данном случае сопровождается графической иллюстрацией. Таким образом естественно устанавливается связь между рациональными числами и точками координатной прямой.

В литературе имеет место еще один интересный прием. Если в предыдущем случае формирование представления о положительных и отрицательных числах было связано с понятием меры значения величины, то в этом случае новые числа вводятся в связи с рассмотрением меры изменения величины, т. е. вводится понятие приращения. Такой подход вызывает у учащихся меньше путаницы в связи с двояким смыслом знаков «+» и «—» как знаков сложения и вычитания и в то же время знаков положительных и отрицательных чисел.

В учебнике математики для общеобразовательной школы основным средством изложения темы «Положительные и отрицательные числа» является координатная прямая.

Введение понятия отрицательного числа требует дать определение модуля, понятие о противоположных числах, выяснить вопрос о сравнении новых чисел между собой и с изученными раньше, рассмотреть действия с положительными и отрицательными числами и выяснить справедливость законов действий для этих чисел.

Понятие модуля числа вводится как расстояние от точки, изображающей это число, до начальной точки. Это определение тесно связано с наглядным и геометрическим представлениями и истолкованием положительных и отрицательных чисел.

Мотивировать введение модуля числа можно на примере решения конкретной задачи. Следует также показать на примерах, что при рассмотрении одних вопросов, связанных с положительными и отрицательными числами, приходится учитывать направление отсчета значений величины, а при рассмотрении других — в этом нет надобности.

Пример. Когда путешественник пройдет на восток от начального пункта 60 км, то его положение относительно начального пункта можно записать числом +60. Когда путешественник пройдет от того же пункта 60 км на запад, то его положение относительно начального пункта следует записать числом —60. И в том и в другом случае пройденный путь будет характеризоваться числом 60.

Затем формулируется правило нахождения модуля числа. Поясняется, что модуль числа не может быть отрицательным, ибо модуль числа — это расстояние, что модуль положительного числа равен самому числу, модуль любого отрицательного числа равен числу, ему противоположному.

Знакомству с противоположными числами предшествует изучение центральной симметрии. Понятие о противоположных числах связывается с симметричными точками. В то же время введение этого понятия связывается с геометрическим истолкованием положительных и отрицательных чисел.

Остановимся на вопросе сравнения положительных и отрицательных чисел. Соотношение равенства и неравенства между этими числами в V классе вводится без доказательств. При этом очень важно показать учащимся целесообразность вводимых определений на конкретных примерах и с помощью геометрических образов. Рассмотрение примеров и обращение к координатной прямой можно использовать и для подготовки к введению соответствующих определений. Причем так как множество рациональных чисел включает в себя множество натуральных чисел, то сравнение их необходимо производить так же, как проводилось сравнение натуральных чисел. Из предыдущего учащимся известно, что относительно двух неравных положительных чисел a и b можно сказать: если $a>b (a<b)$, то точка, соответствующая числу a, на координатном луче расположена правее (левее), чем точка, соответствующая числу b. Если числа равны, то соответствующие им точки совпадают. Это же правило можно распространить (по определению) и на всю координатную прямую в применении к положительным, отрицательным числам и нулю. Значит, если на координатной прямой числу a соответствует точка A и числу b соответствует точка B, то:

1) если $a=b$, то A и B совпадают;
2) если $a<b$, то A лежит левее B;
3) если $a>b$, то A лежит правее B.

Верны и обратные предложения:

1) если A и B совпадают, то $a=b$ (числам a и b соответствует одна и та же точка);
2) если A лежит левее B, то $a<b$;
3) если A лежит правее B, то $a>b$.

Из этого вытекают правила для сравнения положительных и отрицательных чисел, которыми учащиеся могут теперь пользоваться, не прибегая всякий раз к координатной прямой.

1. Всякое положительное число больше нуля и больше всякого отрицательного числа.

2. Всякое отрицательное число меньше нуля и меньше всякого положительного числа.

3. Из двух положительных чисел больше то число, модуль которого больше, и меньше то, у которого модуль меньше.

4. Из двух отрицательных чисел меньше то, у которого больше модуль, а больше то, у которого меньше модуль.

Правила эти устанавливаются из рассмотрения ряда примеров с использованием координатной прямой.

Таким образом, координатная прямая является основным средством, которое дает наглядное истолкование соотношениям равенства и неравенства между положительными и отрицательными числами.

Перейдем к действиям над положительными и отрицательными числами.

При рассмотрении этого материала преподаватель математики должен учитывать, что действия сложения и умножения (прямые действия первой и второй ступени) над положительными и отрицательными числами вводятся по определению, причем формулировки этих определений должны включать в себя ранее известные учащимся понятия об этих действиях.

Вычитание и деление определяются как действия, обратные соответственно сложению и умножению. Это уже известная учащимся форма этих действий. Но объем этих понятий, т. е. каждого из двух обратных действий, значительно расширяются.

В учебной литературе по математике определение действия сложения формулируется обычно так: суммой двух чисел называется... и т. д. В школьном курсе определение действия обычно дается в виде правила, что вполне оправдано. Причем даются отдельно правила сложения отрицательных чисел и правила сложения чисел с разными знаками. Формулировка этих правил содержит указания на соответствующие действия, операции. К такому введению действий учащиеся уже привыкли.

Большое внимание уделяется тому, как подвести к определению действия сложения. Для этого используются конкретные задачи на сложение чисел с помощью координатной прямой.

Каким бы путем ни вводилось правило сложения, учащимся должно быть ясно, что рассмотрение примеров призвано лишь иллюстрировать соответствующее правило, но не может служить его доказательством. Учащиеся должны овладеть навыками выполнения операции сложения двух положительных чисел, двух отрицательных чисел, двух чисел с разными знаками, противоположных чисел, нуля с положительными и отрицательными числами. При этом они должны твердо усвоить, что сохраняют силу все те законы, которые имели место для положительных чисел.

Учащимся дается формулировка переместительного и сочетательного законов, запись каждого из них с помощью букв. В справедливости этих законов, а также в целесообразности их использования для сложения нескольких положительных и отрицательных чисел учащиеся убеждаются рассмотрением большого числа примеров.

С учениками, которые интересуются математикой, во внеклассной работе можно вывести правила действий, в данном случае правила знаков при сложении, если законы действия определены; дополнительно надо знать, что $(+a)+(-a)=0$.

Вычитание отрицательных чисел, так же как и положительных, определяется как действие, обратное сложению: вычесть из числа a число b — значит найти такое число x, которое в сумме с числом

b даст число a. Однако объем этого понятия расширяется. По существу, это новое определение, которое включает ранее известное. В этом случае вычитание сводится к прибавлению противоположного числа.

Рассматривая действия сложения и вычитания положительных и отрицательных чисел, целесообразно иллюстрировать их, используя простейший прибор, который называется арифметической линейкой и, можно сказать, является прообразом логарифмической линейки. Этот прибор, состоящий из двух одинаковых равномерных шкал, из которых одна свободно перемещается относительно другой, может быть изготовлен учениками. По существу, это номограмма с одной подвижной шкалой.

Умножение положительных и отрицательных чисел представляет наибольшую трудность. Эта трудность заключается в том, что учащиеся не могут отделаться от настоятельной потребности в доказательстве правила знаков при умножении, а учитель не только не может дать доказательство этого правила, но должен суметь убедить учащихся, что такого доказательства нельзя искать или требовать.

Правило знаков, которое дается в школе, является, по существу, своеобразной трактовкой определения операции умножения положительных и отрицательных чисел, а «утверждения, которые на самом деле представляют собой определения новых понятий, не могут быть доказаны» [165].

Итак, действие умножения вводится по определению. Однако определение этого действия можно ввести по-разному. Существуют различные пути истолкования правила знаков.

Сложение и умножение положительных и отрицательных чисел имеют много общего, поэтому пути трактовки правила умножения и правила сложения можно считать аналогичными. Однако трактовка правила умножения вызывает больше трудностей.

Довольно распространено объяснение правила умножения из предварительного рассмотрения ряда конкретных задач, решение которых требует проводить вычисления по формуле вида ab. Задача рассматривается вначале для положительных значений a и b, затем когда a или b отрицательно и, наконец, когда и a и b отрицательны. После чего дается правило умножения. Недочет такого метода не только в его громоздкости, но главным образом в том, что у учащихся создается впечатление, даже убеждение, что они «доказывают» правило умножения. Кроме того, применение такого пути связано и с допущением логической ошибки, ибо формула вида ab верна для $a>0$ и $b>0$. Но если a или b отрицательно или оба вместе отрицательны, то до введения определения произведения любых положительных и отрицательных чисел распространять формулу вида ab на эти числа, конечно, нельзя.

Многие авторы учебной и методической литературы придерживаются догматического способа введения умножения. Сущность его состоит в том, что дается формулировка правила умножения, затем оно поясняется на примерах, задачах. Учащиеся убеждаются на конкретном материале в практической целесообразности введенного определения.

Этому способу можно отдать предпочтение, ибо он соответствует научной трактовке определения умножения рациональных чисел, экономен в отношении времени и, как показал опыт работы отдельных учителей, доступен учащимся.

Так излагается умножение в учебнике П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова «Алгебра», В. Л. Гончарова «Начальная алгебра», Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского «Алгебра» и др. В этих пособиях авторы постулируют правило знаков.

В учебнике математики для V класса [58] формулировкам правила умножения чисел с разными знаками и правила умножения отрицательных чисел предшествует рассмотрение ряда примеров. При этом используется положение о том, что если изменить знак одного из множителей, то изменится знак произведения. Правила формулируются в удобном для использования виде.

С целью конкретного истолкования смысла умножения двух отрицательных чисел и умножения положительного числа на отрицательное целесообразно рассмотреть ряд задач, решение которых связано с перемещением по координатной прямой.

Необходимо обратить внимание учащихся на условие равенства произведения нулю, умножение на -1.

Деление положительных и отрицательных чисел рассматривается обычно как действие, обратное умножению.

Учащимся сообщается, что деление положительных и отрицательных чисел имеет тот же смысл, что и деление положительных чисел, а именно по данному произведению и одному из множителей находят второй множитель. После рассмотрения ряда примеров делают вывод о знаке частного и о том, как находить модуль при делении двух отрицательных чисел, двух чисел с разными знаками.

Таким образом, учащихся подводят к формулировке правила деления положительных и отрицательных чисел.

В справедливости применения для положительных и отрицательных чисел ранее известных для положительных чисел законов умножения учащиеся убеждаются, решая соответствующие примеры. Следует обратить внимание на более широкое истолкование этих законов, и в частности распределительного закона. Учащиеся к этому времени уже имеют представление об алгебраической сумме, что позволяет не рассматривать отдельно распределительный закон умножения относительно сложения и относительно вычитания.

Важно обратить внимание на применение законов при вычислениях и тождественных преобразованиях. Так же как и в случае сложения, правила умножения положительных и отрицательных чисел могут быть выведены из законов умножения, считая, что правило знаков для суммы известно.

В V классе в теме «Рациональные числа» продолжается изучение положительных и отрицательных чисел и вводится понятие рационального числа как числа, которое может быть записано в виде дроби. Рассматривая множество рациональных чисел, можно сделать вывод о том, что в этом множестве всегда выполнимы сложение, вычитание, умножение и деление на число, не равное нулю. При

выполнении действий получаем числа того же множества, т. е. это множество обладает свойством замкнутости по отношению к действиям первой и второй ступени.

Для сложения справедливы:

1) переместительный закон $a+b=b+a$;
2) сочетательный закон $a+(b+c)=(a+b)+c$;
3) $a+0=a$, т. е. имеется нейтральный элемент;
4) $a+(-a)=0$, т. е. имеется противоположный элемент — противоположное число.

Для умножения справедливы:

1) переместительный закон $ab=ba$;
2) распределительный закон $a(b+c)=ab+ac$;
3) сочетательный закон $a(bc)=(ab)c$;
4) $a\cdot 1=a$, т. е. имеется нейтральный элемент;
5) $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$, т. е. имеется обратный элемент.

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ

Как отмечается в программе по математике для средней школы [4], при изучении элементов алгебры курса математики IV—V классов учащиеся должны получить представления об использовании буквенных обозначений для записи свойств чисел, научиться составлять по тексту задачи и решать несложные линейные уравнения. Учащиеся должны понимать смысл буквенной записи свойств арифметических действий; уметь составлять выражения из чисел и букв по условию задачи и выполнять простейшие преобразования выражений; на этой основе составлять линейные уравнения и решать их при помощи алгебраических приемов. Поэтому в основное содержание алгебраического материала в IV—V классах включено: числовые и буквенные выражения, их числовые значения; вычисления по формулам; буквенная запись свойств арифметических действий, тождественные преобразования выражений; составление и решение линейных уравнений.

Как видно, алгебраический материал в курсе математики IV—V классов представлен достаточно широко. Его объектами являются всевозможные выражения: числа и буквы, результаты действий над ними, формулы, уравнения, неравенства и др.

Классификация различных выражений осуществляется по наличию или отсутствию в них переменных, знаков операций и знаков отношений: $=$, $<$, $>$. В результате рассматриваются выражения следующих видов: имя числа $\frac{2}{3}$, $3+6$; высказывания $26-14=382-370$ или $5+0{,}4<5\frac{3}{7}$; числовые формы $2x-6$ или $3y+0{,}5$; логические функции числовой переменной $3x<7$ или $2a+3=21$. В школьной терминологии эти виды выражений именуются несколько иначе: числовые выражения, числовые равенства и неравенства, буквенные или алгебраические выражения, неравенства и уравнения.

Основной целью изучения алгебраического материала в данном курсе является расширение у учащихся представлений о числе и свойствах чисел различных числовых множеств, формирование умений обоснованного и рационального выполнения преобразований числовых и буквенных выражений, развитие функциональных представлений, ознакомление с важнейшими взаимосвязями между величинами, обучение приемам составления уравнений и неравенств, методам их решения, а также применения знаний к решению простейших практических задач.

Знакомство школьников с алгебраическим материалом начинается в начальной школе. Введенные в курс математики начальных классов простейшие элементы алгебры используются для обобщения арифметического материала, приобщения к языку математической символики и развития математического мышления учащихся. Школьники младших классов применяют буквенные обозначения для записи законов арифметических действий, простейших формул и выражений, находят числовые значения несложных алгебраических выражений, решают простейшие линейные уравнения на основе зависимости между компонентами арифметических действий и знакомятся с решением текстовых задач с помощью уравнений.

При переходе в среднюю школу соблюдается преемственность как в содержательном, так и идейном плане. Однако уровень алгебраической пропедевтики более высокий: расширяется круг изучаемых числовых множеств, свойств операций над числами, используемых величин, увеличивается число содержательных и прикладных задач, что создает более богатую основу для нужных обобщений и систематизации изучаемых знаний.

§ 5. Выражения

В начале курса учащиеся осваивают понятия числового выражения и значения выражения, потом буквенного выражения. При разборе решения простых двух-трех задач учащиеся замечают, что в выражениях для решения этих задач меняется число, стоящее на определенном месте выражения, и что эти задачи можно объединить в одну, заменив число, которое меняется, буквой. Этот подход позволяет не только ввести понятие буквенного выражения как выражения, содержащего буквы, но и содействует постепенной подготовке учащихся к выделению и осознанию программ вычислений и классификации задач по методам решения.

Усвоение понятия буквенного выражения осуществляется посредством выполнения учащимися разнообразных письменных и устных упражнений. Вначале выполняются простые упражнения, потом со временем усвоения программы — упражнения с более сложной конструкцией выражений: вводятся новые буквы, увеличивается их число, используются числа из новых числовых множеств, разнообразятся действия над выражениями. Приведем примеры нескольких заданий.

1. Найдите значение выражения $3 \cdot a + 5$, если $a = 2$.
2. Заменив числовые слагаемые их суммой, упростите выражение:

а) $54+72+p$; б) $(54+c)+46$; в) $156+(344+k)+76$.

3. Найдите значение выражения $10{,}34a-3{,}34b$, если $a=11{,}25$ и $b=12{,}25$.

Рассмотрим методику ознакомления учащихся с математической символикой и ее использование для введения некоторых понятий.

При выполнении упражнений всегда имеется в виду, что работа с буквенными данными является естественным продолжением работы с конкретными числами и числовыми выражениями. При выполнении заданий придерживаются общепринятого положения, высказанного профессором В. Л. Гончаровым еще в 1955 г.: «Все, что не сразу выходит с буквами, делайте сначала с числами. Все, что сразу выходит с буквами, сейчас же проверяйте на числах» [69, с. 355]. Это связано с тем, что учащиеся на первых порах испытывают затруднения в усвоении буквенной символики: в усвоении наименования и их записи. В практике обучения поэтому изыскиваются возможности более раннего проведения с учащимися беседы об использовании в математике соответствующей символики.

Содержание этой беседы может быть таким. Вначале мотивируется использование в математике буквенной символики (как средства более яркого, точного и лаконичного представления математических суждений, средства обобщения изученных свойств чисел, способа выделения изученной закономерности, алгоритма вычислений и т. п.), потом отмечается, что в алгебре часто для этой цели используются буквы как латинского алфавита, так и французского, причем принято произношение смешанное (латинско-французское): часть букв произносится по-французски, а часть — по-латински. Учащимся предлагается познакомиться с таблицей [69, с. 353].

Таблица

Буквы, которые используются в математике и одинаково произносятся по-латински и по-французски:

A,a	B,в	D,d	E,e	I,i	K,k	L,l	M,m	N,n	O,o	P,p
а	бэ	дэ	э	и	ка	эль	эм	эн	о	пэ

R,r	S,s	T,t	V,v	X,x	Z,z
эр	эс	тэ	вэ	икс	зэт

Буквы, которые в математике произносятся по-латински:

C,c	Q,q	U,u
цэ	ку	у

Буквы, которые в математике произносятся по-французски:

G,g	H,h	J,j	W,w	Y,y
жэ	аш	жи	дубль-вэ	игрек

Такая таблица изготавливается для обозрения всего класса и может быть изготовлена каждым учеником в виде отдельной карточки для индивидуального пользования.

Усвоение буквенной символики осуществляется постепенно по мере раскрытия содержания курса, причем на первых порах учитель

не только показывает на конкретном материале употребление букв, но и мотивирует их использование, направляет внимание учащихся на более четкое выделение с их помощью соответствующих отношений и функциональных связей, напоминает и закрепляет специфические для математики обороты речи и т. п. Важно при этом использовать задания следующих типов:

1) на чтение и понимание смысла буквенно-символической записи объектов изучения;

2) на запись объектов изучения в буквенно-символической форме;

3) на действия с объектами изучения, записанными в буквенно-символической форме.

Приведем несколько примеров заданий по каждому типу упражнений. Так, например, развитию речевых навыков содействуют такие упражнения:

1. Проанализируйте порядок выполнения действий в каждом из данных выражений и объясните, как оно читается: а) $a+b$; б) $a \cdot b$; в) $2ab$; г) $a+(b-c)$; д) $\frac{ab}{c}$; е) $2x-3y$; ж) $ak+p$.

Заметим, что каждому такому упражнению предшествуют аналогичные упражнения на числовом материале, например: «Прочитайте выражения: $2+3$; $2 \cdot 3+4$; $2 \cdot 3+4 \cdot 5$; $2 \cdot 3-6:2$» и т. п.

Отметим, что если алгебраическое выражение содержит действия разных ступеней, то при чтении его произносят сначала последнее по порядку действие, а затем называют остальные действия. Например, $(a-b) \cdot c$ — здесь последнее по порядку действие — умножение, поэтому читаем так: «Произведение разности чисел a и b на число c».

2. Прочитайте записи следующих выражений: а) $2a+b$; б) $bc+2a$; в) $a-2bc$; г) $\frac{a}{c}-b$; д) $\frac{1}{3}(a+b)$; е) $(2a-b):c$.

3. От куска проволоки длиной a м первый раз отрезали b м, а второй раз — c м проволоки.

а) Какой смысл имеют следующие выражения: $b+c$; $a-(b+c)$; $a-b$; $a-b-c$?

б) Почему верно равенство $a-(b+c)=a-b-c$? Проверьте его при $a=236$, $b=114$, $c=108$. Сформулируйте полученное правило.

4. Купили 12 ложек по 30 к. за штуку и 8 вилок по 40 к. за штуку. Какой смысл имеет следующее выражение: а) $12 \cdot 30$; б) $8 \cdot 40$; в) $12-8$; г) $40-30$; д) $12 \cdot 30+8 \cdot 40$; е) $12 \cdot 30-8 \cdot 40$?

5. Прочитайте следующие выражения: а) $a>0$; б) $a<0$; в) $-(-a)$; г) $|a|$; д) $-b<0$; е) $(c-k)>0$.

Ко второму типу упражнений относятся следующие:

1. Запишите с помощью чисел, букв и знаков действий и отношений предложение: а) произведение числа a на сумму чисел k и единицы; б) a — отрицательное число; в) определение модуля числа b.

2. Укажите на координатной прямой и запишите с помощью символов следующее: а) 2 — положительное число; б) -3 — отрицательное число; в) отрицательное число, модуль которого равен 7.

3. Используя буквенную символику, запишите общий вид чисел: а) четных; б) нечетных; в) делящихся на 3; г) которые при делении на 3 дают в остатке 1.

К третьему типу упражнений относятся такие:

1. Закончите запись: $c\cdot(8+k)=c\cdot 8+\ldots$.

2. В чем сходство и различие выражений $ab+c$ и $a(b+c)$? Сравните значения этих выражений при $a=2$, $b=3$ и $c=5$.

3. Упростите выражение $1{,}5a+1{,}5b$ и вычислите его значение при $a=2{,}46$ и $b=2{,}54$.

Многие из приведенных упражнений выполняются устно. Эти упражнения часто предлагаются учащимся на этапе введения в урок в виде математического диктанта, математической разминки, устного счета и т. п. В основном они выполняются после проверки учителем домашней работы, но перед заданиями, с помощью которых учитель вводит учащихся в новый материал. Разнотипность заданий позволяет удачно их включать в содержание учебного материала первого этапа урока.

В процессе изучения алгебраического материала данного курса используются упражнения и других типов. Основная их цель — активно использовать буквенную символику в качестве **средства обобщения** изученного материала. Приведем несколько примеров.

1) Записи законов арифметических действий в буквенной форме появляются как закономерный **итог** выполнения учащимися большого количества заданий с конкретными числовыми данными.

При усвоении учащимися законов арифметических действий уделяется внимание упражнениям, с помощью которых отрабатывается их формулировка (в словесной форме), запись в буквенно-символической форме, уточняется область применения и использование в упрощении вычислений и простейших преобразованиях буквенных выражений. Например:

1. Запишите в общем виде с помощью букв x и y переместительный закон умножения. Проверьте его, если: а) $x=2{,}8$, $y=1{,}05$; б) $x=17$, $y=0{,}17$.

2. Используя буквы a, b и c, запишите в общем виде сочетательный и распределительный законы. Как они читаются? Проверьте их при $a=8{,}5$, $b=10$, $c=0{,}2$.

3. Найдите значение выражения: а) $0{,}7542x+0{,}2458x-20{,}9$, если $x=220$; б) $66{,}6a-44{,}4a+8{,}11$, если $a=10$.

2) Формирование понятия противоположного числа осуществляется при выполнении учащимися следующей системы упражнений:

1. Укажите на координатной прямой числа, противоположные числам: 6; -5; 2,5; $-2{,}4$.

2. Поставьте вместо звездочек такое число, чтобы получилось верное равенство: $-(-12)=*$; $1{,}5=-(*)$; $-8=-(*)$.

3. Заполните пустые места в таблице:

a	-14	-8		-1		3	6	
$-a$	14		5		0			-9

4. Найдите значение $-k$, если k равно: $-1{,}3$; 4; 0; -10.

5. Заполните таблицу и по ней сделайте краткое сообщение:

x	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$-x$			

3) Умение сравнивать числа и значения величины формируется через упражнения:

1. На каком расстоянии от начала координат расположены числа: а) 5 и -5; б) 2 и 3; в) -6 и 3; г) 2 и -8?

2. Сравните между собой числа и отдельно модули чисел: а) 0 и 3; б) -5 и 0; в) 2 и 5; г) -6 и -7; д) -6 и 3.

3*[1]. Сравните два числа m и n, если $|m|>|n|$.

4*. Сравните числа x и y, если: а) модуль числа x равен модулю числа y; б) модуль числа x меньше модуля числа y; в) модуль числа x больше модуля числа y.

5. Сравните между собой два числа: а) p и $-p$; б) c и $2c$.

Выполнение учащимися аналогичных заданий, как правило, сопровождается общим выводом. Использование буквенной символики в этих заданиях является эффективным средством обобщения изучаемых знаний. Для того чтобы при таких обобщениях достичь желаемого результата, необходимо, чтобы учащиеся неоднократно наблюдали определенную закономерность, выделяли связи и отношения, делали соответствующие выводы, а также проверяли их в практической деятельности. Такой подход к использованию буквенной символики содействует накоплению **теоретических знаний** учащихся, активному использованию их на практике, развитию учащихся и воспитанию культуры мышления.

Рассмотрим реализацию некоторых сквозных математических идей в данном курсе математики.

§ 6. Тождества. Тождественные преобразования

Одна из важных идейных линий курса алгебры — линия тождественных преобразований. Поэтому обучение математике в IV—V классах строится таким образом, чтобы учащиеся уже в этих классах приобрели навыки простейших тождественных преобразований (без употребления термина «тождественные преобразования»). Эти навыки формируются при выполнении упражнений на приведение подобных слагаемых, раскрытие скобок и заключение в скобки, вынесение множителя за скобки и т. д. Рассматриваются также простейшие преобразования числовых и буквенных выражений. На этом уровне обучения осваиваются преобразования, которые выполняются непосредственно на основе законов и свойств арифметических действий.

[1] Знаком * отмечены трудные задания.

Так, в IV классе изучаются законы и свойства действий над неотрицательными числами: $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$; $a\cdot b=b\cdot a$; $a+0=a$, $0+a=a$; $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$; $a\cdot 1=a$, $1\cdot a=a$; $a\cdot(b+c)=ab+ac$. При изучении операции вычитания появляются тождества $a-0=a$, $a-a=0$ и др. Список исходных тождеств в процессе изучения курса постепенно пополняется.

Приведем основные виды задач, при решении которых активно используются свойства и законы арифметических действий и через которые формируются навыки тождественных преобразований:

1) обоснование алгоритмов выполнения действий над числами изучаемых числовых множеств;

2) вычисление значений числового выражения наиболее рациональным способом;

3) сравнение значений числовых выражений без выполнения указанных действий;

4) упрощение буквенных выражений;

5) получение новых алгоритмов преобразований буквенных выражений;

6) доказательство равенства значений двух буквенных выражений.

Приведем несколько примеров.

1. Представьте число 153 в виде суммы разрядных слагаемых; в виде разности двух чисел; в виде произведения двух чисел.

2. Представьте число 27 в виде произведений трех одинаковых множителей.

Эти упражнения на представление одного и того же числа в разных формах записи содействуют усвоению понятия о тождественных преобразованиях. Вначале эти представления могут быть произвольными, в дальнейшем — целенаправленными. Например, представление в виде суммы разрядных слагаемых используются для объяснения правил сложения натуральных чисел «столбиком», представление в виде суммы или разности «удобных» чисел — для выполнения быстрых вычислений различных произведений, представление в виде произведения множителей — для упрощения различных дробных выражений. Учащимся объясняется, что целесообразность тех или иных представлений зачастую обусловливается самой постановкой задачи.

3. Найдите значение выражения $928\cdot 36+72\cdot 36$.

Для нахождения значения выражения целесообразно преобразовать его, применив распределительный закон: $928\cdot 36+72\cdot 36=(928+72)\cdot 36=1000\cdot 36=36\,000$. Заметим здесь, что если приучать школьников при выполнении аналогичных упражнений рассуждать таким образом: «Для любых чисел a, b и c справедлив распределительный закон (или имеет место равенство $(a+b)\cdot c=ac+bc$), значит и для наших чисел он верен, т. е. ...», то тем самым будем развивать у учащихся умения выполнять отдельные виды дедуктивных умозаключений. Так на простом учебном материале воспитывается потребность в обосновании выполняемых действий и в доказательстве, что, в свою очередь, явится

хорошей пропедевтикой для проведения более сложных дедукций при изучении систематического курса алгебры и геометрии.

4. Приведите подобные слагаемые: $-7x+5x-3x+2$.

5. Решите уравнение $7{,}2-(6{,}2-x)=2{,}2$.

6. Сколько арифметических действий выполняется при вычислениях по формулам: а) $(a+b)\cdot c$ и $a\cdot c+b\cdot c$; б) $ax+bx+c$ и $(a+b)x+c$? Всегда ли при вычислениях по этим двум формулам мы получим одинаковые результаты?

7. Найдите значение выражения $7a-3b+6a+3b$, если $a=-5$, $b=-1$.

8. При каких значениях x верно равенство: а) $(7+x)\cdot 5=7\cdot 5+8\cdot 5$; б) $3\cdot(x+5)=3x+15$; в) $(3+5)x=3x+5x$?

Изучение тождеств и тождественных преобразований проводится в тесной связи с изучением рассматриваемых в данном курсе числовых множеств. Задания от класса к классу усложняются, но в основном путем постепенного переплетения линии тождественных преобразований с числовой и линией уравнений.

Самые первые задания, в которых требуется выполнить тождественные преобразования, просты и понятны учащимся. В других заданиях цепочки преобразований удлиняются. От учащихся требуется объяснить каждый шаг преобразования, выделить общее положение, подтверждающее правильность произведенного преобразования, а порой объяснить необходимость того или иного обоснования. При выполнении упражнений уделяется внимание формулировке правил, свойств, законов, лежащих в основе данного преобразования, а также их записи в буквенно-символической форме. На первых порах обязательны вопросы к учащимся: «Какие правила, свойства, законы использовались при выполнении задания?», «Как они читаются?», «Как записываются с помощью символов?» и др.

В тождественных преобразованиях алгебраических выражений используются два правила: подстановки и замены равным. В данном курсе математики широко используется операция подстановки (на ней основан счет по формулам). Здесь нередко учащиеся ошибаются. Например, при нахождении числового значения выражения ab при $a=5$ и $b=-3$ учащиеся полагают, что получится $5-3=2$. Предупреждению ошибок содействует тщательно проводимый анализ выражений (так же как и при решении задач, анализ их условия). На первых порах допущенные ошибки обязательно исправляются с детальным объяснением сущности данного правила подстановки. В дальнейшем учителя требуют от учащихся нахождения и самостоятельного исправления допущенной ошибки (с целью воспитания и развития профессиональных умений и навыков: самопроверки и самоконтроля), и обязательно навыки правильного выполнения операции закрепляются системой соответствующих упражнений. Заметим здесь также, что само по себе выполнение большого числа разнообразных упражнений не всегда обеспечивает получение желаемого результата в обучении и развитии учащихся. Необходимо, чтобы каждое из них было целенаправлено, в част-

ности, как показано в третьем примере, и на формирование умений строить индуктивные и дедуктивные умозаключения. Такой подход помогает учащимся выработать навыки применения алгебраического аппарата и приобрести необходимую логическую культуру.

§ 7. Уравнения и неравенства

Линия уравнений и неравенств является стержнем алгебраического материала школьного курса математики. В изучении уравнений и неравенств выделяются три больших этапа. К I этапу относится пропедевтическое изучение уравнений и неравенств в начальной школе, ко II — более высокий уровень пропедевтики этих понятий в курсе математики IV—V классов, а III этап начинается с VI класса.

В начальной школе уже при изучении действий над числами первого десятка дается правило нахождения одного из слагаемых по сумме и другому слагаемому, т. е., по сути, решаются уравнения вида $x+3=7$ и $5+x=8$. По мере расширения знаний учащихся об арифметических действиях и зависимостях между компонентами действий виды уравнений усложняются. Под уравнением в начальной школе понимается равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, а «решить уравнение» — значит найти это неизвестное число (в начальной школе понятие корня уравнения не вводится).

В IV классе в идейном отношении преемственность сохраняется. Используются формулировки: «Равенство, содержащее неизвестное число, называют уравнением», «Найденное значение неизвестного числа называют корнем уравнения», «Решить уравнение — значит найти все его корни». Способы решения уравнений по-прежнему ограничиваются использованием взаимосвязи между компонентами и результатами действий. Однако здесь более ярко выделяется линия на **обобщение** осваиваемых способов решения и фиксирования их в буквенно-символической форме. Например, решается уравнение $x-47=25$. Вместе с классом анализируется равенство и отмечается, что следует найти неизвестное уменьшаемое. **По смыслу вычитания** находят, что $x=25+47$, или $x=72$. Далее способ решения уравнений такого вида обобщается: «Вообще если $x-b=c$, то $x=b+c$»; одновременно формулируется правило: «Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, надо сложить вычитаемое и разность»; правило заучивается учащимися.

В IV классе изучаются способы нахождения неизвестного слагаемого, уменьшаемого, вычитаемого, множителя, делимого и делителя. Правила нахождения формулируются и заучиваются учащимися. Записи способов нахождения неизвестного числа в буквенно-символической форме тщательно анализируются: «Что означают в равенстве используемые буквы?», уточняется смысл и объясняется значение используемых символов, а также отмечается, что в записи конкретных уравнений неизвестное число может обозначаться

любой буквой; например, в уравнениях $k+2=3$ и $p-3=7$ используются соответственно буквы k и p.

В IV классе решаются уравнения, которые содержат буквенные выражения только в одной части уравнения. При их решении внимание учащихся сосредоточивается на выделении способа решения, осмыслении понятия корня уравнения и на понимании постановки задачи о решении уравнения.

Выделение нужного способа решения обеспечивается качественным **анализом выражения,** стоящего в левой части уравнения: какие действия указаны в выражении, какое действие выполняется последним, как читается запись этого выражения, какому компоненту этого действия принадлежит неизвестное число и т. п. При усвоении понятия корня уравнения обращается внимание на форму записи ответа. Например, для уравнения $3042-x=894$ в ответе указывается лишь число 2148 (ответ: 2148). Иногда в ответе записывается не корень, а простейшее уравнение с тем же корнем: $x=2148$. Эта форма записи ответа не способствует формированию представлений о корне и решении уравнения, поэтому от нее следует отказаться: запись «$x=2148$» читается как «Буквой x обозначено число 2148» или «x принимает, имеет значение, равное 2148», т. е. без нужного вывода: «которое и является корнем уравнения». Понимание же постановки задачи о решении уравнения обеспечивается анализом произведенной записи решения и полученного результата; кроме того, учащимся предлагаются вопросы как: «Все ли корни уравнения найдены?», и другие, приучающие их к осмысливанию решения и полученного результата.

Остановимся на решении более сложных уравнений.

1. Решить уравнение $6528:(x-39)=64$.

Анализируя запись, учащиеся замечают, что неизвестное число входит в состав делителя, поэтому вначале следует найти делитель, а потом остается найти неизвестное уменьшаемое.

Запись решения обычно сопровождается словесным описанием выполняемых действий. Используются при решении первых уравнений для зрительного подкрепления и выработки правильной математической речи таблицы с образцами решения:

$6528:(x-39)=64$	Неизвестное число входит в состав делителя, найдем делитель $x-39$, для этого делимое разделим на частное.
$x-39=6528:64$	Вычислим результат деления: $6528:64=102$.
$x-39=102$	Теперь неизвестно уменьшаемое; чтобы его найти, надо сложить вычитаемое и разность.
$x=39+102$	Вычислим сумму: $39+102=141$.
$x=141$	Следовательно, 141 является корнем уравнения.

Рекомендуется проверить ответ, чтобы узнать, не допущены ли при решении ошибки: учащиеся могут при делении 6528 на 64 по-

лучить 12, а не 102. Проверка осуществляется по плану: подставляется вместо x число 141 (т. е. полученное при решении число) в выражение, стоящее в левой части уравнения, и находится его значение. Если результат вычислений совпадает с числом, стоящим справа, то корень уравнения найден верно.

$6528:(141-39)=$ Вначале выполним действие в скобках.

$=6528:102=64$ Теперь выполним деление.

$64=64$, значит, уравнение решено верно.

Возвращаясь к решению, отмечаем, что все учтено и других корней уравнение иметь не может, и записываем ответ.

Ответ: 141.

2. Решить уравнение $x \cdot 144:12=14\,400$.

Анализируя запись выражения в левой части, отмечаем, что последнее выполняемое действие — деление, причем частное известно, делитель также, а делимое, представленное произведением $x \cdot 144$, неизвестно. Поэтому вначале следует найти это делимое. Для учащихся можно подчеркнуть выражение, значение которого ищется. Дальнейшее решение и выкладки осуществляются по аналогии с первым примером.

В V классе расширяются типы решаемых уравнений. Так, например, при изучении понятия модуля числа решаются уравнения:

$$|x|=9,\ |y|=20,\ |a|=0,\ |-b|=7,\ |p|=-3.$$

Эти уравнения имеют два, один или не имеют корней, т. е. здесь продолжается формирование понятий *корень уравнения* и *что значит решить уравнение*. Приведем несколько примеров, способствующих усвоению этих понятий.

1. Какие из чисел -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 являются корнями уравнения $x(4+x)=-3$?

2. Решить уравнения: а) $4(x-5)=0$; б) $(x-1)(x-2)=0$; в) $-8(2{,}6+x)=0$; г) $(x+3)(4-x)=0$.

3. Догадайтесь, чему равен корень уравнения, и сделайте проверку: а) $(-8)\cdot x=72$; б) $6\cdot y=-54$; в) $(-6)\cdot p=66$.

Учащиеся V класса осваивают и новые методы решений уравнений. Вначале рассматривается возможность умножения или деления обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число (их обоснование в учебнике не дается). Так, например, рассматривая решение уравнения $-4x=32$ (**по смыслу деления** $x=32:(-4)$, $x=-8$), замечают, кроме того, что такой же результат получается, если обе части уравнения $-4x=32$ разделить на -4. Или, решая уравнение $0{,}1y=-8$ рассмотренным выше способом (получают, что $y=-8:0{,}1$ и $y=-80$), замечают, что такой же результат можно получить, если умножить обе части уравнения на 10. В обоих случаях делаются выводы о том, что при умножении (или делении) обеих частей уравнения на не равное нулю число получается новое уравнение с теми же корнями, что и заданное.

Для облегчения усвоения данного метода решения уравнений в систему подготовительных упражнений включаются задания на

упрощение числовых и буквенных выражений, нацеленные на прочное усвоение учащимися правил умножения или деления разнообразных произведений на некоторое отличное от нуля число.

Далее осваивается способ переноса слагаемых из одной части уравнения в другую с переменой знака у слагаемого на противоположный. Так как обоснование этому способу также не дается (не изучались свойства равенства), то активно используется методический прием с весами, с помощью которых учащиеся осознают смысл этого преобразования: все математические действия сопровождаются соответствующими действиями с весами. Покажем это на примере решения двух уравнений.

1. Решите уравнение

$$x+6=15. \qquad (1)$$

Вначале наполняем конкретным содержанием данную задачу: показываем картинку с весами или рассматриваем рисунок в учебнике. После выяснения соответствия картинки тексту задачи приступаем к решению уравнения.

Вычтем из левой части уравнения число 6, это то же самое, что снять с левой чашки весов гири в 5 кг и 1 кг. Чтобы равновесие не нарушилось, надо и с правой части весов снять гири массой 6 кг, т. е. для сохранения равенства надо и из правой части уравнения вычесть число 6. Получим:

$$x+6-6=15-6. \qquad (2)$$

Сравнивая записи этих двух уравнений, отмечаем, что фактически к обеим частям уравнения прибавили число -6, противоположное числу 6.

Далее замечаем, что $6-6=0$, и после упрощения получаем уравнение

$$x=15-6. \qquad (3)$$

Произведя вычитание в правой части, получим:

$$x=9.$$

Анализ уравнений (1) и (3) позволяет сделать выводы: а) число 9 является корнем каждого из этих уравнений; б) при переносе членов из одной части уравнения в другую с переменой знаков получаем новое уравнение, но с тем же корнем. Далее записывается ответ.

После решения уравнения проводится беседа о том, что в принципе получен новый способ решения уравнений методом переноса слагаемых из одной части равенства в другую с переменой знака, уточняется сфера его применения (числа можно переносить), сравнивается с известным способом решения таких уравнений (нахождение неизвестного слагаемого: $x+6=15$, $x=15-6$), показывается, что они оба приводят к одному и тому же результату, поэтому оба способа можно активно использовать в практике. Далее лишь оттеняется, что новый способ имеет некоторые

преимущества при решении уравнений с большим числом членов, и рассматривается второе уравнение.

2. Решите уравнение

$$5x = 2x + 6. \quad (1)$$

В этом случае перенос числа из одной части в другую ничего не дает, известный способ нахождения определенного компонента действия также. Этим мотивируется возврат к конкретизации задачи и использованию весов. Далее приступают к решению.

Прибавим к обеим частям уравнения по $-2x$, это то же самое, что снять с обеих чашек весов по две буханки хлеба, получим:

$$5x - 2x = 2x - 2x + 6, \quad (2)$$

но $2x - 2x = 0$, значит,

$$5x - 2x = 6. \quad (3)$$

Сравнивая уравнения (1) и (3), видим, что уравнение (3) получено из (1) переносом слагаемого $2x$ из первой части уравнения в левую с противоположным знаком.

Решая дальше уравнение $5x - 2x = 6$, получаем $3x = 6$ и $x = 2$. Отмечаем, что 2 является корнем как первого, так и третьего уравнения. Делаются выводы о возможности переноса членов, являющихся буквенными выражениями. Анализ решения двух приведенных примеров позволяет сделать общий вывод о том, что любые слагаемые можно переносить из одной части уравнения в другую, изменяя при этом их знаки.

С IV класса осуществляется пропедевтика и функциональной точки зрения на понятие уравнения: буквенное выражение может принимать бесчисленное множество значений, нам же часто требуется найти то значение, при котором оно принимает определенное значение. Приведем примеры таких заданий.

1. Заполните пустые места в таблице:

m	1	2	3	4	5	0
$24m - 12$						

При каком значении m значение выражения $24m - 12$ равно 84? Есть ли среди чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 корень уравнения $24m - 12 = 84$?

2. При каком значении x выражение $7x$ больше $4x$ на 912?

3. При каком значении буквы верно равенство: а) $34 + x = 34$; б) $p + 0 = 0$; в) $x - x = 0$; г) $x + x = 0$; д) $k + 0 = k$?

Таким образом, начиная с IV класса постепенно формируются новые представления о сущности понятия уравнения.

Совместно с пропедевтическим изучением уравнений осуществляется в этом курсе математики изучение неравенства. Уже в начальной школе учащиеся приобретают первые представления о неравенствах — сравнивают числа, решают задачи на установление

знака «$>$» или «$<$» между двумя числовыми выражениями: $3+7$ и $7\cdot2$; $5\cdot3$ и $4+9$. В IV классе сведения о неравенствах повторяются и закрепляются. Так, при изучении пункта «Больше или меньше» отмечается, что результат сравнения двух чисел записывается в виде неравенства с использованием символов «$<$» (меньше) или «$>$» (больше), например $28<32$; здесь же вводится и двойное неравенство: запись $3<5<7$ означает, что число 3 меньше 5, а число 5 в свою очередь меньше 7. Можно сказать и по-иному: «Число 5 больше 3, но меньше 7». Использование данных символов осмысливается учащимися в процессе выполнения достаточного числа упражнений на сравнение чисел (с активным использованием координатной прямой) и сравнение значений величин. После ознакомления учащихся с буквенными выражениями задания усложняются:

1. Для выражений $25\cdot x+1$ и $800:x-99$ составьте таблицу значений при $x=1$; 2; 4; 5; 8. При каких из этих значений x: а) первое выражение меньше второго; б) первое выражение равно второму; в) первое больше второго?

2. Отметьте на координатном луче все точки, координаты которых равны натуральному числу x, если: а) $x<8$; б) $10<x<15$.

3. Верно ли неравенство $(213+a)-191<404-a$, если $a=96$; 196; 296?

4. Докажите неравенство $600<23\cdot35<1200$.

5. Какие числа, кратные 5, удовлетворяют неравенству: а) $64<x<78$; б) $405<y<450$?

6. Запишите все числа x, у которых знаменатель дробной части 10, если $2\frac{3}{10}<x<2\frac{7}{10}$.

Как видно из приведенных упражнений, термин «решить неравенство» пока еще не употребляется, так как буква обозначает некоторое число и, кроме того, неравенство рассматривается на конечных множествах значений входящих в него букв.

В V классе пропедевтика понятия неравенства также осуществляется через систему заданий. Приведем конкретные примеры.

1. Известно, что x и y — положительные числа, а m и n — отрицательные. Сравните: а) 0 и x; б) y и 0; в) m и 0; г) 0 и n; д) x и m; е) n и x; ж) m и n; з) $-x$ и y.

2. Отметьте на координатной прямой точки, координаты которых равны целым значениям x, если: а) $-3{,}2<x<5{,}5$; б) $|x|<4{,}1$.

3. Известно, что x и y — положительные числа. Замените звездочку знаком $>$, $=$ или $<$, чтобы получилось верное равенство или неравенство: а) $0*x$; б) $-y*0$; в) $-x*y$; г) $y*-x$; д) $|x|*-x$; е) $|y|*y$; ж) $-x*|y|$; з) $|x|*-y$.

4. Сравните: а) $|-3{,}5+2{,}9|$ и $|-3{,}5|+|2{,}9|$;
б) $|-8{,}1-0{,}7|$ и $|-8{,}1|+|-0{,}7|$.

5. Докажите неравенство: а) $\frac{123}{800}>\frac{1}{8}$; б) $\frac{361}{6000}<\frac{1}{15}$.

Этими видами заданий в основном исчерпывается пропедевтика понятия неравенства (их систематическое изучение начинается в курсе алгебры). Как видно из упражнений, в основном неравенства используются для сравнения чисел и значений выражений. Однако одновременно с помощью неравенств формируются представления о свойстве бесконечности и плотности множества чисел на конечных числовых интервалах, начальные представления о логических функциях (верно или неверно неравенство при данном значении буквы) и др. Заметим, что таких упражнений в учебниках мало, поэтому рекомендуется учителю чаще подключать аналогичные упражнения к заданиям, используемым для математической разминки, математических диктантов и устного счета. Особенно это относится к заданиям, формирующим представления о логических функциях, так как раскрытие содержания этого понятия представляет составную часть осуществления функциональной пропедевтики.

§ 8. Функциональная пропедевтика

Функциональная пропедевтика в данном курсе в основном осуществляется с помощью упражнений на вычисление значений буквенных выражений, на исследование простейших буквенных выражений, а также с помощью упражнений на чтение «эмпирических» графиков. Приведем примеры таких заданий.

1. Найдите значение выражения $(-42)\,y$, если $y=0$; 1; -1; 3; 5; -30.

2. Найдите значение выражения: а) $(5x)^2$, если $x=2$; -2; б) $a^3+1{,}2$, если $a=4$; 0,1; в) $(y+1)^2$, если $y=1{,}5$; 3,5.

3. Найдите по формуле $A=6\frac{1}{2}-a$: а) значение A, если $a=2\frac{7}{8}$; 8; б) значение a, если $A=1\frac{5}{6}$; $7\frac{1}{5}$.

x	x^2	Изменение x^2
0	0	
1	1	1
2	4	3
3	9	5
4		
5		
6		
7		
8		
9		

4. Заполните таблицу и сделайте вывод об изменении x^2.

5. Песок, нагретый до температуры 150 °С, остывает на воздухе. Через каждые 10 мин проводились измерения температуры песка и данные были занесены в таблицу:

Время, мин	0	10	20	30	40	50	60
Температура, °С	150	111	84	66	52	42	35

Начертите график изменения температуры в зависимости от времени и найдите по графику:

а) температуру песка через 5 мин, через 25 мин, через 45 мин после начала остывания;

б) через сколько минут после начала остывания песок имел температуру 100 °С, 80 °С, 55 °С;

в) на сколько градусов изменилась температура песка от 10-й до 50-й минуты.

В целом развитию функциональных представлений учащихся в данном курсе содействуют: развитие понятия числа, овладение тождественными преобразованиями, изучение методов решения уравнений, изучение неравенств и др. Поэтому учащиеся IV—V классов приобретают достаточные представления, необходимые для успешного изучения функций в старших классах.

Таким образом, умеренная алгебраизация курса математики IV—V классов содействует обеспечению соответствующего данному возрасту учащихся развития логического мышления, функциональных представлений, способностей к абстрактному мышлению, формированию алгоритмической культуры, совершенствованию устной и письменной математической речи, воспитанию мировоззрения, т. е. овладение учебным материалом обеспечивает целенаправленное воспитание и развитие учащихся.

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ

Геометрический материал в I—V классах распределен по всему курсу математики. Он составляет содержание так называемого пропедевтического или подготовительного курса геометрии. Основные цели этого курса — **подготовить учащихся к сознательному усвоению систематического курса геометрии VI—VIII классов, к изучению смежных дисциплин в восьмилетней школе.**

При этом решается целый ряд **задач,** а именно:

1. Развитие логического мышления учащихся; привитие элементарных навыков определения простейших геометрических понятий, навыков четкой формулировки выводов на основе наблюдений.

2. Развитие пространственных представлений у учащихся.

3. Ознакомление учащихся с простейшими дедуктивными обоснованиями (без введения понятий «определение», «теорема», «доказательство»).

4. Формирование умений и навыков в выполнении построений с помощью основных геометрических инструментов — циркуля, линейки, угольника, транспортира; формирование рациональных приемов построения.

5. Формирование умений и навыков измерения геометрических величин.

6. Развитие творческой активности и самостоятельности учащихся.

Цели и задачи пропедевтического курса геометрии определяют

его содержание, которое включает многие вопросы, изучаемые в систематическом курсе геометрии VI—VIII классов.

В соответствии с дидактическим принципом систематичности и последовательности изучение геометрического материала в IV—V классах является логическим продолжением изучения программы по математике I—III классов.

В начальной школе учащиеся учатся измерять простейшие величины и выполнять над ними соответствующие действия. Основное внимание здесь уделяется выработке прочных навыков измерения величин, овладению наиболее распространенными на практике единицами их измерения. Учащиеся изучают простейшие зависимости между величинами и учатся использовать значение этих зависимостей при решении текстовых задач. Они учатся распознавать и изображать простейшие геометрические фигуры. Имея дело не с абстрактными понятиями, а с реальными прообразами геометрических фигур, учатся свободно распознавать их на рисунках, моделях и окружающих предметах и овладевать простейшими чертежными навыками.

Таким образом, в начальной школе ведется накопление и развитие геометрических представлений у школьников, они знакомятся с понятиями «фигура», «плоскость», «прямая», с основными понятиями, связанными с окружностью, с некоторыми терминами, овладевают элементарными навыками использования простейших инструментов. Это достигается систематическим проведением практических работ. Основную роль на этой ступени обучения играет изготовление учащимися моделей геометрических фигур, вырезание, вычерчивание, получение фигур путем перегибания листа бумаги, упражнения в распознавании фигур на чертежах и в окружающей обстановке, практические измерительные работы в классе, на местности и т. д.

Учащиеся получают некоторые представления об определениях. Однако самостоятельная задача формулировки определений перед ними не ставится.

Таким образом, к IV классу у учащихся накапливается значительный запас конкретных геометрических знаний и представлений, которые нуждаются в дальнейшем их обобщении и систематизации.

Отметим, что целью обучения геометрии учащихся IV—V классов, как определено программой, является овладение школьниками системой основных геометрических понятий и формирование прочных навыков выполнения геометрических построений с помощью линейки, угольника, циркуля и транспортира.

В этих классах в процессе обучения:

1) уточняются и углубляются представления о геометрических объектах и их свойствах, приобретенные при обучении в I—III классах (например, отрезок, прямая, угол и т. д.);

2) вводятся новые геометрические фигуры (луч, параллельные прямые, биссектриса угла и т. д.), некоторые преобразования фигур;

3) изучаются новые величины, носителями которых являются знакомые фигуры (например, длина окружности, величина угла), проводится четкое различие величин и фигур (например, отрезок и длина отрезка, угол и градусная мера угла);

4) расширяется круг геометрических построений и используемых при этом инструментов.

С I по V класс последовательно совершенствуются умения и навыки учащихся при выполнении построений. Младшие школьники, пользуясь в большинстве случаев линейкой, угольником и реже циркулем, выполняют элементарные задания на вычерчивание фигур, измерение величин. При этом в качестве вспомогательного средства служит клетчатая бумага, а само выполнение построений не требует основательных объяснений. В IV—V классах также формируются прочные навыки выполнения измерений и построений с помощью линейки, циркуля, угольника, транспортира; повышается трудность заданий на построение и измерение. Несмотря на то что в процессе обучения уделяется большое внимание выполнению заданий на квадратной сетке, координатной плоскости, однако они отступают как бы на второй план и выведение свойств фигур или их отдельных элементов осуществляется на основе логических выводов. Общие положения, изученные ранее, применяются при решении конкретных задач, что способствует развитию навыков дедуктивного мышления.

Постоянно из класса в класс у младших школьников расширяются и уточняются представления о геометрических фигурах, совершенствуются умения и навыки работы с геометрическим материалом. В I—V классах в силу возможностей усвоения школьниками геометрического материала при формировании знаний о геометрических фигурах происходит некоторое сочетание представлений и понятий. Геометрические фигуры (точка, прямая, многоугольник, круг, ломаная линия, отрезок) выступают в начальной школе и как дидактическое средство и как цель изучения.

Разнообразный геометрический материал широко используется (особенно на первых порах) как счетный материал. Одновременно на уроках школьников учат различать некоторые элементы геометрических фигур (например, вершины и стороны многоугольника, центр окружности и т. д.), но свойства фигур выясняются экспериментальным путем и еще не связываются друг с другом, что соответствует первому и второму уровням геометрического развития.

Для младших школьников характерно восприятие геометрических фигур как целого и как некоторой знаковой модели (чертежа), которая пока еще не отделима от воспринимаемого объекта. Используя чертежи, учащиеся начинают сложный путь знакомства и овладения определенной знаковой системой. Обозначение геометрических фигур буквами, которое в действующей программе предусмотрено со II класса, позволяет, с одной стороны, обобщать и сопоставлять свойства фигур, а с другой — знакомить учащихся еще с одной знаковой моделью, формировать элементарные представления о математическом языке.

Знакомство младших школьников с геометрическими фигурами, соотношениями между ними в большинстве случаев может быть доведено до уровня представлений. Эти представления отличаются друг от друга степенью обобщения. Многие из них несут в себе черты понятий, но это еще не понятия. Например, школьники получают наглядное представление об отрезке — умеют выделить концы отрезка, отметить точки на отрезке и подсчитать при этом все образовавшиеся отрезки, учатся измерять длину отрезка, знакомятся с отрезком как носителем величины, усваивают, что отрезок может быть элементом другой фигуры, а поэтому иметь различные названия. Все это создает хорошие предпосылки для формирования понятия отрезка. Понятие отрезка в начальной школе в основном используется как иллюстрация арифметического материала.

В IV классе знания учащихся обобщаются. При этом осуществляется косвенное влияние интуиции на понимание того, что длина отрезка является наименьшей среди длин линий, соединяющих концы этого отрезка. Учитель может (без иллюстрации) задать вопрос: «Если мы соединим две точки не только отрезком, но и другими линиями (кривыми, ломаными), то какая из этих линий будет иметь наименьшую длину (рис. 5)?» В поисках ответа на этот вопрос учащиеся должны использовать свое воображение, интуицию, а свои выводы попытаться обосновать практически на простейших моделях.

Рис. 5

При изучении элементов геометрии в I—V классах, где в большей, где в меньшей мере, обобщения делаются:

а) при выполнении построений геометрических фигур, находящихся в определенных отношениях (например, получение ломаной линии во II—IV классах, развернутого угла в IV классе, формулы вычисления площади прямоугольника в III классе);

б) из наблюдений предметов окружающей действительности (например, описание прямоугольного параллелепипеда в IV классе);

в) при выполнении операций с листом бумаги, с конкретными моделями фигур;

г) при выполнении измерений (например, формулы площади прямоугольника, треугольника, нахождение суммы величин углов треугольника во II классе);

д) как результат построения логических выводов (например, сравнение углов в IV классе осуществляется на основе определения равенства, так как углы — это фигуры, а фигуры, которые при наложении совмещаются, называются равными).

Подведем итог: Пропедевтический курс геометрии связан с систематическим курсом планиметрии VI—VIII классов как по содержанию, так и по идейной направленности.

1. Знакомство в пропедевтическом курсе с основными геометрическими понятиями, с простейшими математическими фактами, являющимися аксиомами и теоремами, проведение первых логических обоснований, являющихся доказательствами,— все это служит подготовкой для раскрытия логического строения геометрии.

2. Подготовительный курс геометрии знакомит учащихся с геометрической терминологией и символикой, которые используются и в систематическом курсе.

3. Ознакомление с некоторыми видами отображения фигур готовит учащихся к сознательному усвоению идей геометрических преобразований.

4. Знакомство с координатной прямой и координатной плоскостью создает основу для использования координатного метода при изучении отдельных разделов систематического курса геометрии.

5. В IV классе учащиеся имеют дело с такими геометрическими величинами, как длина, площадь, объем (длина отрезка, площадь прямоугольника, объем прямоугольного параллелепипеда). Знакомятся они и с величиной угла.

В V классе вводятся формулы длины окружности и площади круга. В результате выполнения некоторых измерений и решения соответствующих задач на вычисления у учащихся складывается представление о величине как о неотрицательном числе. В процессе решения задач учащиеся знакомятся и со свойствами геометрических величин.

6. В пропедевтическом курсе большое внимание уделяется выработке у учащихся умений и навыков в выполнении построений с помощью основных геометрических инструментов, а также формированию у них рациональных приемов построения геометрических фигур. Эти умения будут необходимы как при изучении систематического курса геометрии, так и при изучении курса черчения.

7. В подготовительном курсе геометрии реализуется идея связи теории с практикой. Теоретические положения раскрываются при решении задач жизненного характера.

8. Пропедевтический курс включает задачи, позволяющие развивать у учащихся пространственные представления.

9. Изучение материала пропедевтического курса геометрии подготавливает учащихся к усвоению некоторых смежных дисциплин, изучаемых в школе (черчение, география, труд).

§ 9. Изучение геометрического материала в IV классе

Содержание материала, изучаемого в IV классе, составляют такие вопросы, как основные геометрические понятия: точка, прямая, плоскость, луч, отрезок, угол, треугольник; отношения — равенства фигур, измерение геометрических величин — длин отрезков, меры углов, площади прямоугольника, объема прямоугольного параллелепипеда. Эти вопросы не являются для учащихся IV класса совершенно новыми, они рассматривались ими в начальной школе на интуитивном уровне. Учащимся известны понятия «окружность», «круг», «центр», «радиус», «диаметр». В систематическом курсе геометрии все эти понятия в дальнейшем получат свое развитие. В IV классе учащиеся знакомятся со многими понятиями в оперативном плане, не определяя их, а лишь выделяя характерные свойства, существенные признаки в процессе решения задач.

В IV классе учащиеся знакомятся также с простейшим символическим языком геометрии.

Курс геометрии IV класса построен преимущественно на индуктивной основе.

1. Учащиеся встречаются с такими понятиями, как «плоскость» и «прямая». Они должны научиться мысленно видеть, что прямая не имеет ни начала, ни конца, что она лежит в плоскости, что любая «модель плоскости»— это только часть плоскости. От того, сумеет ли учитель сформировать ясные представления об этих абстракциях у учащихся, в дальнейшем зависит развитие у них верной геометрической интуиции.

При изучении прямой линии важно создать представление о ее бесконечности. В этом помогут соответствующим образом подобранные упражнения. Например:

1) Лежат ли точки A, B, C на прямой MK (рис. 6*а*)?

2) Пересекаются ли прямые AB и CD (рис. 6*б*)?

Аналогичные задачи на выяснение взаимного расположения прямой линии с лучом, отрезком учитель может составить в дальнейшем сам. При решении таких задач учащиеся представляют себе прямую линию безграничной, понимают, что на чертеже можно изобразить только часть прямой.

Далее учащиеся знакомятся с одним из основных свойств прямой линии:

Через любые две точки плоскости проходит единственная прямая (рис. 7*а*).

Здесь же с помощью опытной практической работы можно познакомить и с другим свойством прямой линии:

Через одну точку на плоскости можно провести сколько угодно прямых линий (рис. 7*б*).

Попутно учащимся можно показать с помощью чертежа, что через две различные точки на плоскости можно провести сколько угодно кривых линий (рис. 7 *в*).

2. Далее рассматривается отрезок как часть прямой.

В работе с учащимися должны найти место упражнения на откладывание отрезков на данной прямой. Например:

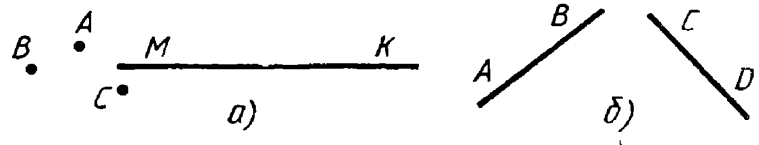


Рис. 6

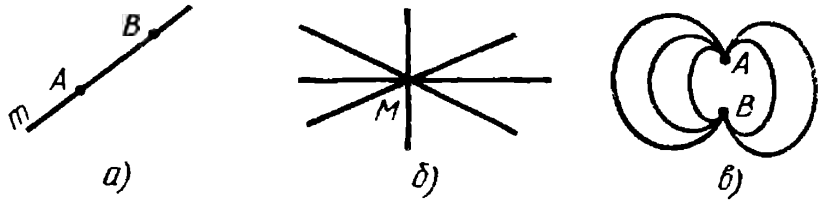


Рис. 7

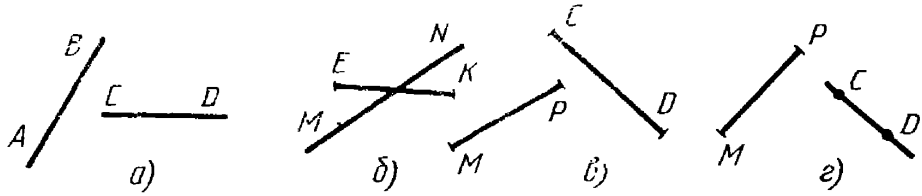


Рис. 8

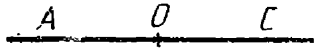


Рис. 9

Рис. 10

З а д а ч а. Сколько отрезков длиной 3 см можно отложить от данной точки на прямой линии?

Значительный интерес представляют задачи на выявление свойств точек, принадлежащих отрезку CD и не принадлежащих ему, принадлежащих прямой CD и не принадлежащих ей. Например:

З а д а ч а. Отметьте в тетради точки C и D. Проведите отрезок CD. Отметьте точку M, лежащую на отрезке CD. Лежит ли точка M на прямой CD?

Отметьте точку P, лежащую на прямой CD, но не лежащую на отрезке CD. Какой из концов отрезка лежит между точками M и P?

З а д а ч а. Сколько общих точек имеют:

а) прямые AB и CD (рис. 8*а*);

б) прямая MN и отрезок EK (рис. 8*б*);

в) отрезок MP и отрезок CD (рис. 8*в, г*)?

3. При разъяснении понятия луча используется интуитивно ясное понятие «часть прямой». Особую трудность представляет формирование у учащихся представления о неограниченности луча. Для наглядности можно привести в качестве примера луч прожектора, направленный в ночное небо.

Особого внимания требует понятие лучей, дополнительных друг к другу. Здесь необходимо для формирования понятий и отработки непривычной терминологии ввести такие упражнения, как:

З а д а ч а. Назвать на прямой AC луч, дополнительный лучу OC (рис. 9).

З а д а ч а. На прямой PK отмечены три точки C, D и M (рис. 10). Назвать луч, который является дополнительным лучу DK. Будут ли лучи DP и CK дополнительными друг другу? Назвать пары лучей, дополнительных друг к другу.

З а д а ч а. Начертить три прямые AB, CD, EK, которые пересекаются в одной точке O. Назвать все пары дополнительных лучей, образовавшихся на чертеже.

Известное внимание при изучении прямой, отрезка, лучей следует уделить овладению учащимися терминологией, раскрывающей отношения «лежать на», «принадлежность», «проходить через».

4. Важным разделом геометрии IV класса является равенство фигур. В разделе «Равные фигуры» учащиеся знакомятся с абстрактным понятием «фигура». Понятие равенства фигур вводится на основе наложения одной фигуры на другую.

Две фигуры, которые можно наложить одну на другую так, чтобы они совпали, называют равными.

С помощью наглядных пособий учащиеся подводятся к выводу, что равные отрезки имеют равные длины, отрезки с равными длинами равны, а фигуры с равными площадями не всегда равны.

Вместе с тем учителю следует иметь в виду, что понятие «геометрическая фигура» играет важную роль при изучении геометрического материала в IV классе. В изучаемом курсе это понятие является самым широким родовым, и к раскрытию его следует обратиться в самом начале изучения геометрического материала.

Формально-логического определения понятию «геометрическая фигура» не дается. Оно формируется абстрактно на основе наблюдения учащимися окружающих тел. При этом необходимо опираться на интуитивно развитое умение ребят выделять одинаковые и неодинаковые формы у наблюдаемых вещей, на уже развитые у учащихся этого возраста способности не связывать понятие формы с материалом, из которого изготовлены изучаемые тела. Перед учащимися ставится задача: «Назовите известные вам геометрические фигуры». При ответе необходимо добиваться, чтобы учащиеся приводили примеры как пространственных, так и плоских фигур. При этом учащиеся должны называть не предметы, а собственно геометрические фигуры: треугольник, квадрат, куб, многоугольник, пирамиду, конус и т. д. На дом можно задавать задания практического характера: сделать модель одной из известных геометрических фигур (из пластилина, вырезать из бумаги и т. д.), в тетради сделать рисунок знакомых геометрических фигур, предметов, имеющих формы фигур. Аналогичные задания можно давать учащимся и при рассмотрении понятия «равные фигуры».

Далее рассматриваются предложения:

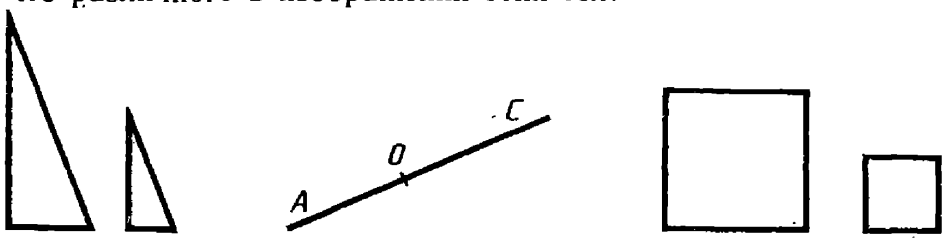
Равные отрезки имеют равные длины. Если длины отрезков равны, то отрезки равны.

Равные фигуры имеют одинаковую площадь.

При этом следует обратить внимание на обоснование этих предложений, на их доказательность, подтверждение с помощью выполнения практических заданий.

Формированию таких умений могут способствовать следующие задания:

З а д а ч а. На рисунке 11 изображены пары тел. Что общего и что различного в изображении этих тел?



а) *б)* *в)*

Рис. 11

З а д а ч а. Какие из отрезков AB, MP, CD, OK, MN и BC равны, если $AB=6$ см, $MP=5$ см, $CD=60$ мм, $OK=50$ мм, $MN=6$ см, $BC=57$ мм?

З а д а ч а. Найдите равные по площади фигуры на рисунке 12.

З а д а ч а. У четырехугольников $ABCD$ и $MNPQ$ все стороны имеют одинаковые длины. Равны ли эти четырехугольники?

При решении этой задачи следует предоставить возможность учащимся подумать и попытаться сделать самостоятельные выводы. Чертеж в данном случае служит средством подтверждения этих выводов (рис. 13).

Важное значение имеют упражнения, представленные в учебнике на построение фигур, равных данным (на клетчатой бумаге), на узнавание равных фигур на чертеже.

Такие упражнения носят тренировочный характер, они помогают сформировать у учащихся умение выделить существенные принципы понятия геометрической фигуры, равенства фигуры, установить равенство фигур путем фактического наложения либо способом геометрического видения.

К понятию равенства необходимо обращаться при изучении любой из фигур в IV—V классах.

5. Многие геометрические сведения, с которыми знакомятся учащиеся до VI класса, на определенном уровне обобщения рассредоточены по всем классам. Так, с понятием угла учащиеся знакомятся при изучении конкретных многоугольников — треугольников, четырехугольников и т. д. В I классе учащиеся наблюдают прямые углы. Угол хотя и выступает как отдельная фигура изучения, но усваивается как оторванный угол многоугольника. Это объясняется тем, что учащиеся еще не знакомы с понятием луча. Здесь различаются лишь прямые и непрямые углы.

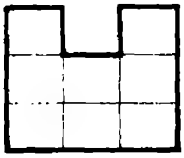
Находятся углы знакомых фигур, прямые углы окружающих предметов и т. д. В III классе рассматриваются упражнения на нахождение определенных фигур с некоторым отмеченным углом. Углы обозначаются одной или тремя буквами.

В IV классе уже изучается луч. Здесь школьники учатся выделять вершины, стороны угла, усваивают, что два луча, выходящие из одной точки, определяют угол. Вводится значок обозначения угла ($\angle$). Сравнение углов осуществляется, так же как и сравнение других фигур, через наложение. Рассматриваются с учащимися различные виды углов: развернутый, прямой, острый, тупой.

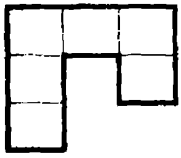
Об углах учащиеся начальных классов получают ограниченные сведения, а именно: различают лишь прямые и непрямые углы; находят углы в знакомых фигурах, выделяют вершины и стороны углов.

Перегибанием листа бумаги учащиеся получают модели прямых углов (на линиях сгибов), а выполняя их наложение, находят среди углов прямые и непрямые. Использование в дальнейшем обучении полученных сведений способствует лучшему усвоению темы.

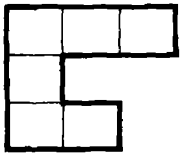
Такой объем сведений объясняется тем, что угол является одним из примеров неограниченных фигур, оперирование которыми имеет



а)



б)



в)

Рис. 12

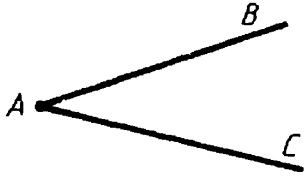


Рис. 14

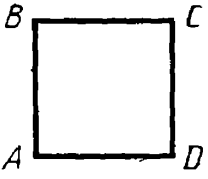
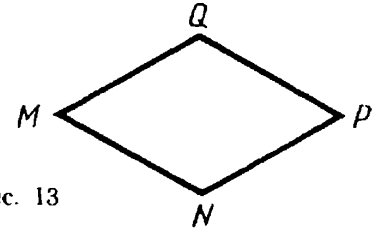


Рис. 13



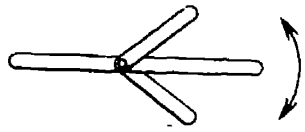


Рис. 15

свои особенности и усвоение которых связано с определенными трудностями.

Переходя к вопросу о формировании понятия угла в IV классе, учащиеся уже знакомы с понятием луча, поэтому угол определяется как два луча, имеющие общее начало. (Подход к определению угла генетический, так как вводится после построения самого угла.)

Проведем на плоскости два луча AB и AC, имеющие общее начало A (рис. 14). Получившуюся геометрическую фигуру называют углом.

Важно обратить внимание учащихся на то, как правильно изображать и обозначать углы. При изучении этой темы учащимся следует предложить изготовить некоторые наглядные пособия. Эта работа сможет увлечь учащихся данной темой и закрепить определение угла и его элементов.

Основной темой в разделе «Угол» является «Биссектриса». В процессе изучения этой темы учащимся можно предложить изготовить наглядные пособия. (Здесь удобно использовать несколько (3—4) спиц с ушком. Получается удобная шарнирная модель — рис. 15.)

При изучении темы «Угол» нельзя не обратить внимание учащихся на разновидность углов (развернутый, прямой, острый, тупой). Учитель может предложить ученикам несколько задач, с помощью которых они закрепят эти понятия и научатся распознавать углы на глаз без применения инструментов (угольника, транспортира). Здесь интересна задача с часами (часы с движущимися стрелками также легко изготовить и использовать как наглядное пособие). З а д а ч а. 1. Используя рисунок 16, записать все углы, которые равны углу AOB, углу AOD, углу AOL, углу BOD.

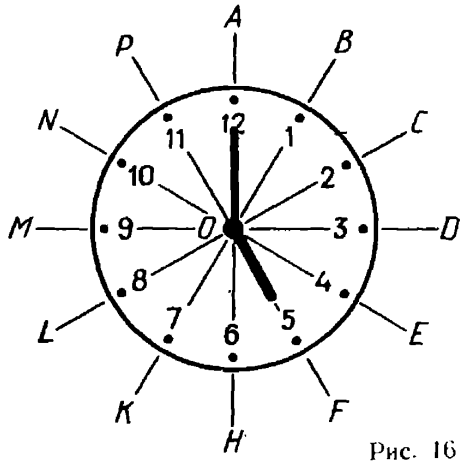


Рис. 16

2. Для каких углов является биссектрисой луч OD?

3. Перечислить все острые, прямые, тупые и развернутые углы.

4. Какое время показывают часы, когда их стрелки образуют прямой угол и минутная стрелка стоит на 12?

Важная роль при обучении геометрии в IV—V классах отводится решению задач. Предполагается, что изучение нового материала будет проходить главным образом в процессе решения задач, в процессе формирования умений и навыков применения знаний, а не в результате лишь заучивания теоретических положений.

Изучение геометрического материала опирается на творческое мышление учащихся. Поэтому задачи в учебнике занимают значительное место.

При рассмотрении вопроса измерения углов важное место имеют задачи вычислительного характера.

Примеры таких задач:

З а д а ч а. Какую часть развернутого угла составляют углы в 30°, 45°, 60°, 240°?

Какую часть прямого угла составляют углы в 30°, 15°, 60°, 75°?

З а д а ч а. На сколько градусов поворачивается минутная стрелка часов за 1 мин, за 5 мин, за 20 мин, за 30 мин? На сколько градусов поворачивается часовая стрелка за 1 ч, за 3 ч, за 20 мин, за 30 мин?

Дидактические задачи носят различный характер. Некоторые из них решаются при изучении одного пункта учебника, другие предлагаются для решения и при изучении разных тем. Например, для формирования правильного представления о неограниченности прямой дидактические задачи предлагаются не только в пункте, посвященном изучению прямой непосредственно, но и при изучении углов и др.

§ 10. Изучение геометрического материала в V классе

Основное содержание геометрического материала V класса составляют такие вопросы, как центральная симметрия, осевая симметрия, перпендикулярные прямые, параллельные прямые, длина окружности, площадь круга, шар, построение треугольников.

В V классе находят свое развитие понятия прямой и плоскости, биссектрисы угла, измерение геометрических величин, тема «Треугольники». Продолжается работа над понятиями, некоторые из них получают определения. Обращается большое внимание на развитие конструктивных навыков. Рассматриваются некоторые вопросы метрической геометрии.

Геометрический материал V класса позволяет вести работу по формированию умений выделять главные, существенные признаки понятия, по развитию навыков строить рассуждения, обосновывать факты, полученные из опытной проверки, из наблюдений, т. е. он содействует развитию дедуктивного мышления у школьников, в нем предусматриваются несложные задачи на доказательство.

1. В V классе учащиеся продолжают изучение прямой линии.

Новым является вопрос о взаимном расположении двух прямых линий. Рассмотрение этого вопроса с учащимися требует обращения к окружающей действительности.

В программе V класса этой проблеме отводятся два раздела: «Перпендикулярные прямые» и «Параллельные прямые».

Перед учащимися ставится проблема: сколько общих точек могут иметь две прямые линии на плоскости? Используя наглядные пособия, примеры из жизни, рассматривают возможные случаи взаимного расположения двух прямых линий на плоскости.

Две прямые AB и CD могут иметь только одну общую точку M на плоскости. Говорят: «Прямые AB и CD пересекаются» (рис. 17 *а*).

Необходимо рассмотреть и случай расположения прямых на плоскости, не имеющих общих точек, когда две прямые AB и CD не пересекаются (рис. 17*б*).

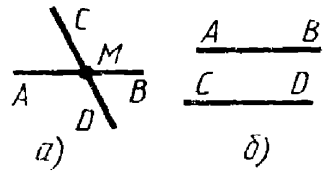


Рис. 17

Термин «параллельные прямые» можно вводить на 1-м уроке лишь с целью ознакомления. Из всех случаев выделены прямые, при пересечении которых образуются прямые углы. Путем рассуждения доказывается, что если один из углов при пересечении двух прямых получился прямым, то остальные углы тоже прямые. Вводится определение перпендикулярных прямых:

Две прямые, образующие при пересечении прямые углы, называются перпендикулярными прямыми.

Далее учащиеся знакомятся с определением параллельных прямых:

Две непересекающиеся прямые на плоскости называются параллельными.

Понятия перпендикулярных и параллельных прямых формируются на основе конкретных представлений, наблюдений из окружающей действительности и опыта школьников.

Здесь же получает дальнейшее развитие понятие отрезка, вводится определение параллельных отрезков. Параллельные отрезки располагаются на параллельных прямых. Для обозначения перпендикулярности и параллельности прямых вводятся специальные символы: $\perp$, $\parallel$, обращается внимание на правильность записи и чтение при использовании введенной символики. Важное значение имеет формирование практических умений построения перпендикулярных и параллельных прямых с использованием инструментов: линейки, угольника и транспортира.

Далее учащиеся знакомятся без доказательства, исходя из наглядных представлений, с признаком параллельности прямых: «Если две прямые в плоскости перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны».

На основании этого признака можно решить две основные задачи на построение:

З а д а ч а 1. Дана прямая a на плоскости. Построить некоторую прямую b, параллельную прямой a.

Задача 2. Даны прямая a и точка B вне прямой a. Построить прямую b, параллельную прямой a и проходящую через точку B.

В процессе решения этих задач учащиеся убеждаются в том, что через данную точку плоскости проходит только одна прямая, параллельная данной прямой. Далее учащиеся на основе практики делают вывод, что через каждую точку плоскости можно провести прямую, параллельную данной прямой.

При построении параллельных прямых следует познакомить учащихся не только с угольником и линейкой, но и другими чертежными инструментами: рейсшиной, чертежной линейкой, штурманской линейкой.

2. Работа по изучению перемещений носит описательный характер. Изучение простейших перемещений начинается с центральной и осевой симметрии фигур. Основная нагрузка при изучении тем «Центр симметрии» и «Ось симметрии» ложится на формирование умений и навыков построения фигур, симметричных относительно центра и позднее относительно оси. Обоснование приемов построения проводится дедуктивно.

Знакомство с центральной симметрией следует начинать с примеров фигур, симметричных относительно точки O, т. е. центрально-симметричных фигур из окружающей жизни (рис. 18).

На основе наблюдений, на конкретных примерах у учащихся формируется понятие центра симметрии, дается определение фигуры, симметричной относительно точки O.

Фигуру называют симметричной относительно точки O, если для каждой точки X этой фигуры найдется точка Y той же фигуры, симметричная с X относительно точки O, называемой центром симметрии фигуры. Точка O — центр симметрии прямоугольника $ABCD$. Прямоугольник $ABCD$ симметричен относительно точки O (рис. 19*а*). Точка O — центр окружности, центр ее симметрии (рис. 19*б*).

Пользуясь наглядными пособиями, учащиеся находят соответственные точки фигур и убеждаются в том, что такие пары точек определяют отрезок, проходящий через точку O и делящийся этой точкой пополам. Такие точки называют симметричными относительно точки O.

Для построения центрально-симметричных фигур необходимо научиться строить центрально-симметричные точки.

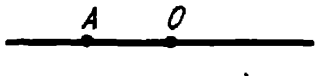
Задача. Даны центр симметрии O и точка A. Построить точку, симметричную точке A относительно O (рис. 20*а*).

На чертеже приведено решение этой задачи.

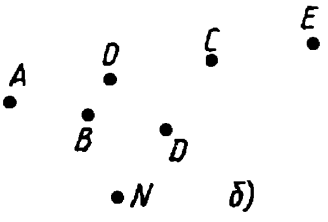
Задача. На рисунке отмечены точки A, B, C, D, E, N, O. С помощью линейки определить, симметричны ли точки (рис. 20*б*): а) A и C относительно точки O; б) A и E относительно точки O; в) B и D относительно точки O; г) A и D относительно точки B; д) C и N относительно точки D.

Необходимо рассмотреть случай, когда точка A совпадает с точкой O. Факт, что точка A в этом случае симметрична сама себе,

Рис. 18

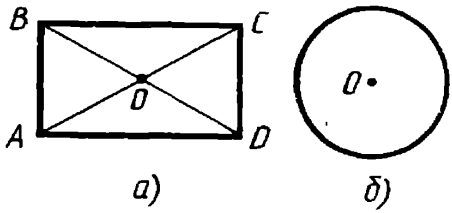


а)



б)

Рис. 20



а) б)

Рис. 19

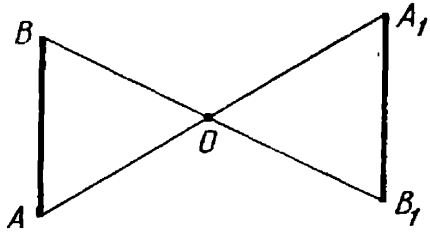


Рис. 21

воспринимается не сразу. Поэтому при решении задач учитель должен иметь это в виду.

Построение фигур, симметричных относительно точки, следует начать с построения отрезков, симметричных относительно некоторой точки. Центр симметрии сначала надо выбирать вне отрезка. Случай, когда центр симметрии принадлежит отрезку, должен быть итоговым.

Задача. Даны отрезок AB и центр симметрии — точка O. Построить отрезок, симметричный отрезку AB относительно точки O.

Построение (рис. 21).

1) Строим точку A_1, симметричную точке A относительно O.

2) Строим точку B_1, симметричную точке B относительно O.

3) Строим отрезок A_1B_1, который симметричен отрезку AB. Используя имеющиеся представления учащихся об отрезках, треугольнике, четырехугольнике, окружности, а также полученный опытным путем вывод, что фигуры, симметричные относительно точки, равны, выясняют, что для построения таких фигур достаточно построить только несколько точек, симметричных точкам данной фигуры относительно центра симметрии: для треугольника три точки, симметричные его вершинам, для четырехугольника четыре точки, для окружности одну точку.

Важное значение при этом отводится задачам. Например:

Задача. Изображены стороны AB прямоугольника $ABCD$ и точка O — центр симметрии этого прямоугольника. Перечертить рисунок в тетрадь и построить прямоугольник $ABCD$.

Фигуры, симметричные сами себе относительно некоторой точки, следует выделить особо.

При изучении этой темы желательно использовать цветные мелки на доске, цветные карандаши, модели различных фигур. Разнообразные задачи можно решать на клетчатой бумаге.

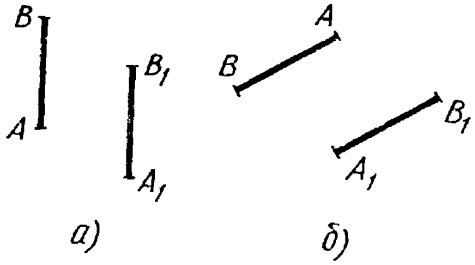


Рис. 22

Задача. Построить центр симметрии для отрезков AB и A_1B_1 (рис. 22*а*); для точек A и A_1 (рис. 22*б*).

Изучение осевой симметрии в V классе опирается на понятие перпендикулярных прямых. Поэтому следует предварительно повторить следующие вопросы:

а) две прямые перпендикулярны, если угол между ними прямой;

б) через точку можно провести только один перпендикуляр к данной прямой;

в) как провести перпендикуляр к прямой с помощью угольника?

При изучении темы используется опыт учащихся, рассматриваются примеры из окружающей жизни: изображения букв, машин, рисунков животных и др.

В V классе рассматривается при изучении темы «Ось симметрии» осевая симметрия фигур, а не симметрия всей плоскости.

Вводится определение фигуры, симметричной относительно прямой l. Ученики называют симметричными относительно прямой (оси) фигуры, которые совмещаются при перегибании листа бумаги по этой прямой. Прямую, по которой перегибают лист бумаги, называют осью симметрии.

С помощью наглядных пособий выясняется, какие из известных фигур имеют оси симметрии (рис. 23).

Учащиеся знакомятся с определением точек, симметричных относительно оси l. Опытным путем с помощью перегибания листа учащиеся выясняют, что если точки A и B симметричны, то:

1) отрезок AB перпендикулярен прямой l;

2) прямая l делит этот отрезок пополам.

Обращается внимание на то, что ось симметрии часто встречается в предметах окружающей действительности, в природе.

При изучении осевой симметрии возникает задача научиться строить фигуры, симметричные относительно оси. Умение и навык построения таких фигур достигаются с помощью решения задач, выполнения практических работ. При составлении задач ось симметрии следует располагать по-разному относительно фигуры (рис. 24).

Полезно научить учащихся вырезать из бумаги фигуры, симметричные относительно прямой l.

В процессе решения задач учащиеся убеждаются, что:

1) симметричные относительно оси фигуры равны между собой;

2) симметричные фигуры состоят из попарно симметричных относительно оси точек;

3) осевая симметрия имеет неподвижные прямые — это ось симметрии и прямые, перпендикулярные ей.

В процессе решения задач выявляют еще одно свойство сим-

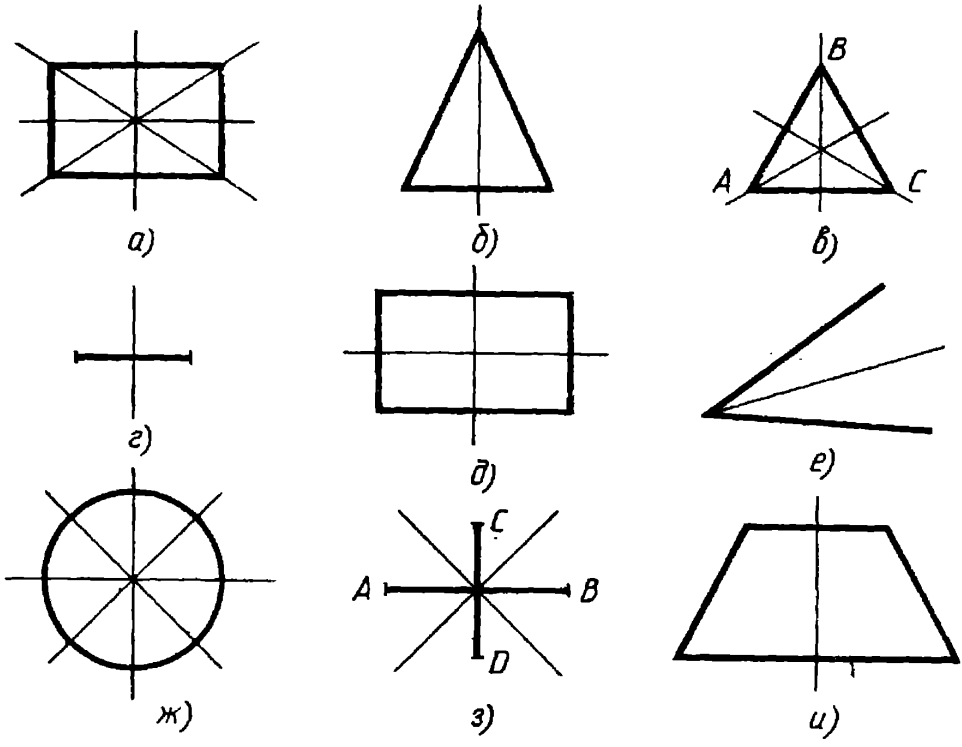


Рис. 23

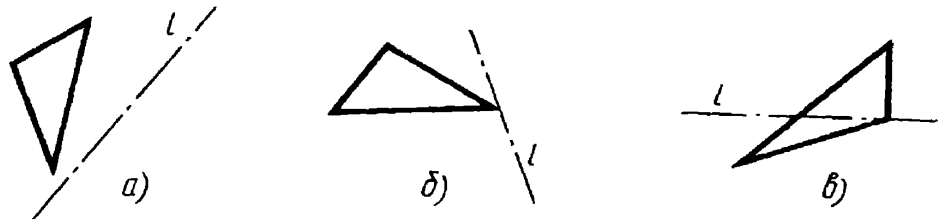


Рис. 24

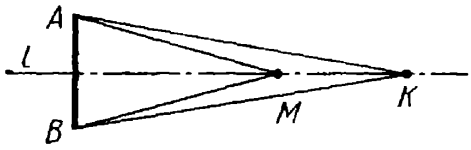


Рис. 25

метрии: симметричные относительно оси точки равноудалены от любой точки оси симметрии (рис. 25).

Используя кальку и пользуясь перегибанием листа бумаги по оси симметрии, учащиеся наглядно убеждаются, что соответствующие отрезки MA и MB, KA и KB и др. попарно равны. Это свойство будет использовано для построения оси симметрии двух точек.

Как нетрудно видеть, для построения оси симметрии двух точек A и B достаточно построить две точки, равноудаленные от точек A и B, и провести через них прямую; эта прямая и будет осью симметрии двух точек A и B.

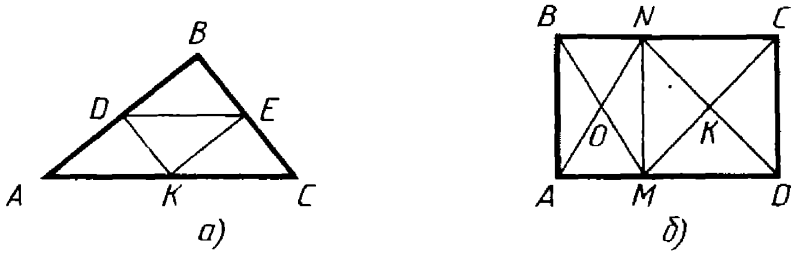


Рис. 26

Важное значение имеют самостоятельные работы на вырезание фигур, симметричных относительно оси, из бумаги, тематические самостоятельные работы: «Осевая симметрия в природе», «Осевая симметрия в технике», «Симметрия в архитектуре» и др.

3. Дальнейшее развитие в V классе получает измерение величин. Учащиеся знакомятся с понятиями длины окружности, площади круга. Здесь следует показать учащимся разные способы вычисления площади круга.

4. С решением задач на построение учащиеся встречаются впервые при изучении темы «Построение треугольников» в V классе.

Эта тема включает в себя элементы анализа, доказательства, исследования задач на построение.

Изучение темы следует начинать с повторения геометрических понятий, известных учащимся: классификация треугольников, классификация углов, градусной меры углов.

Эффективным средством повторения изученного ранее геометрического материала, его обобщения в целях подготовки к восприятию нового являются задачи. Например, на узнавание существенных признаков понятия:

1) Сколько треугольников вы видите на рисунке 26?

2) Известно, что градусная мера угла равна 60°. Найти на рисунке 27 этот угол (на глаз).

При изучении темы «Построение треугольников» в учебнике предлагается такая задача:

Построить треугольник ABC, в котором $AB=5$ см, $BC=4$ см и $\angle B=40°$.

До рассмотрения этой задачи необходимо выполнить подготовительные упражнения на построение, например:

1) Дано: $\angle MAK=40°$. Построить треугольник ABC, у которого

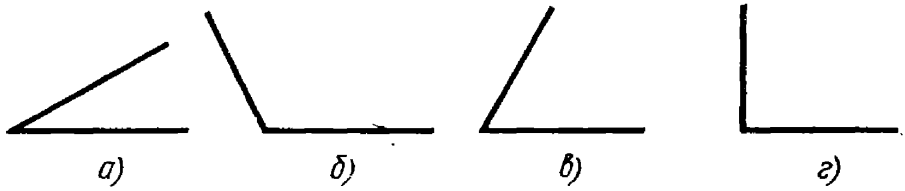


Рис. 27

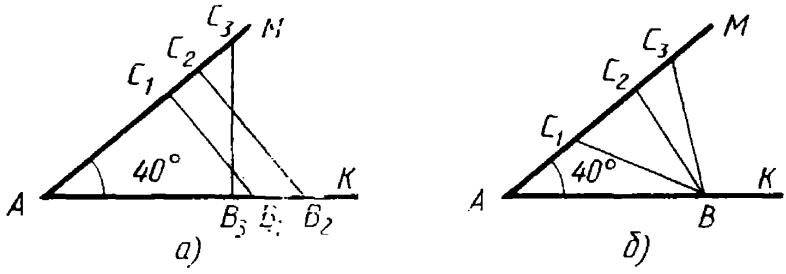


Рис. 28

$\angle A = 40°$. Сколько таких треугольников можно построить (рис. 28*а*)?

2) Дано: $\angle MAK = 40°$, $AB = 5$см (точка B принадлежит лучу AK). Построить треугольник ABC, у которого $\angle A = \angle MAK$; $AC = AB$. Сколько таких треугольников можно построить (рис. 28*б*)?

3) Далее можно рассматривать данную в учебнике задачу 7. Подобные задачи подготовительного характера учитель может составить сам.

С помощью упражнений сформулировать этапы построения в задаче 1. Учащиеся должны быть подготовлены к такому ответу:

1) Построим угол MAK, градусная мера которого 40°.
2) На луче AK отложим отрезок AB длиной 5 см.
3) На луче AM отложим отрезок AC длиной 4 см.
4) Соединим точки B и C отрезком.

Аналогично учащиеся могут быть подведены с помощью системы подготовительных упражнений к самостоятельной формулировке алгоритма построения треугольников по двум углам и стороне, по трем сторонам.

Здесь следует обратить внимание на число решений задачи и выделить условия, при которых предложенные задачи имеют единственное решение.

При закреплении можно поставить вопросы:

1) Сколько можно построить треугольников ABC, у которых $\angle A = 60°$, а сторона $AB = 4{,}8$ см?

2) Сколько можно построить треугольников, у которых катеты равны 5 см и 4 см?

3) Задайте дополнительные условия, чтобы решения задач 1 и 2 были единственными.

Геометрические знания, полученные учащимися в IV—V классах, используются при изучении целого ряда разделов арифметики, алгебры и начал анализа. Выяснение внутрипредметных связей помогает учителю более целесообразно вести планирование материала в течение года, расположить геометрический материал в определенную систему. Такой подход помогает учителю добиться осознанных и прочных знаний учащихся.

В конце года учитель может провести итоговую беседу по геометрическому материалу, в которой могут быть с учащимися обсуждены следующие вопросы: знакомые геометрические фигуры и их свойства, прямые перпендикулярные и параллельные, площади геометрических фигур, центр и ось симметрии.

РАЗДЕЛ II

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

В курсе школьной математики в средних и старших классах изучаются четыре дисциплины: планиметрия, стереометрия, алгебра, алгебра и начала анализа. Эти дисциплины очевидным образом группируются по парам: стереометрия служит продолжением планиметрии, составляя вместе с ней курс геометрии; алгебра и начала анализа продолжают и развивают идеи школьной алгебры, изучаемой в VI—VIII классах. В этом разделе будут изложены вопросы методики преподавания школьных курсов алгебры и начал анализа. Для того чтобы сделать рассматриваемый материал более обозримым, он представлен в виде развертывания основных содержательно-методических линий.

Наиболее характерной, прежде всего бросающейся в глаза чертой алгебры является *использование в ней букв для обозначения чисел*; правила для такого использования («буквенное исчисление»), разработанные математиками в XVII—XVIII вв., легли в основание этой науки. С точки зрения приложений значение буквенного исчисления состоит в том, что с его помощью оказывается возможным *построение математических моделей* довольно широкого класса задач из физики, химии, экономики и т. д. Соответствующие математические модели в курсе алгебры оформляются, как правило, при рассмотрении текстовых (сюжетных) задач, а математическими средствами, используемыми при решении, служат уравнения и неравенства.

Та часть курса школьной алгебры, которая относится к изложенным идеям, отражена в главе 5 («Тождественные преобразования»), в главе 6 («Уравнения и неравенства») и в главе 7 («Текстовые алгебраические задачи»). Курс алгебры, однако, не исчерпывается охваченным в этих главах материалом. В нем существенную роль играет *построение системы действительных чисел* (глава 4), в которой важное место отводится приближенным вычислениям, а также *идея зависимости переменных величин*. Эта идея, формализуемая в понятии функции, является одной из стержневых для всей школьной математики; она рассматривается в главе 8 («Функции и графики»).

Глава 9 посвящена раскрытию методики изучения элементов математического анализа. Центральными понятиями здесь являются понятия *непрерывности и предела*, а ведущими идеями — рассмотрение *скорости изменения величин*, характеризующих различные процессы, и представление об *оптимизации* значения переменной

величины. Элементы математического анализа вошли в школьную математику сравнительно недавно, поэтому соответствующий материал еще не полностью устоялся, так же как и методика его изложения. В этой главе рассматриваются различные подходы к методике изложения начал математического анализа.

В главе 10 («Прикладная направленность преподавания алгебры и начал анализа») излагаются некоторые важные вопросы, связанные с двумя линиями, приобретающими все бóльшую роль в обучении математике: *прикладной* и тесно с ней связанной *алгоритмической.* В главе 11 («Машинные вычисления») продолжается рассмотрение алгоритмической линии курса школьной математики. Значение этого материала определяется необходимостью устанавливать межпредметные связи математики с новой дисциплиной — основами информатики и вычислительной техники.

Глава 4. ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ

§ 11. Действительные числа

1. Различные подходы к построению теории действительного числа. Еще в древности для решения вопросов, связанных с измерением, когда нельзя было обойтись ограниченным числом операций (измерение площадей криволинейных фигур, объемов шара, конуса, пирамиды и др.), использовались два метода: метод «неделимых» и метод «исчерпывания». Оба метода получили отражение в трудах Архимеда.

Первый из них (метод «неделимых») применялся Архимедом в эвристических целях для отыскания закономерностей. Методом доказательства он не считался. В дальнейшем он был открыт заново в работах Кавальери, Торричелли, Роберваля и других предшественников Ньютона и Лейбница.

Доказательства по методу «исчерпывания» признавались строгими. Однако общей теории метода в те времена построено не было [70].

Эти методы послужили одним из оснований для создания и развития математического анализа. До XVIII—XIX вв. одной из самых характерных черт этой математической дисциплины была невыясненность ее исходных понятий, невозможность рационально объяснить производимые операции (например, отбрасывание бесконечно малых высокого порядка). Практические успехи дифференциального и интегрального исчислений приходили во все большее противоречие с его основами [1]. После работ Коши, выяснившего математическое содержание понятия предела, очередной задачей стало построение важнейшей для математического анализа числовой системы — системы действительных чисел.

В середине XIX в. почти одновременно такое построение было выполнено тремя школами, разработавшими эквивалентные теории действительного числа. Это были научные школы Вейерштрасса (представление действительного числа в виде бесконечной десятичной дроби), Кантора (построение фундаментальной по-

следовательности рациональных чисел), Дедекинда (построение сечения на множестве рациональных чисел).

Рассмотрим кратко систему построения множества действительных чисел по Дедекинду. В основе рассуждений лежит понятие о сечении в области рациональных чисел. *Сечением* называют разбиение множества рациональных чисел на два непустых класса B и B' так, что: 1) каждое рациональное число попадает в одно и только одно из множеств B и B'; 2) каждое число, вошедшее во множество B, меньше каждого числа из множества B'. Множества B и B' называются соответственно *нижним* и *верхним классами сечения.*

Оказывается, что на множестве рациональных чисел существуют только три вида сечений:

а) во множестве B нет последнего (наибольшего), а во множестве B' есть начальное (наименьшее) число. Например, определим B как множество всех рациональных чисел, меньших 2, а ко множеству B' отнесем все числа, бóльшие или равные 2;

б) во множестве B есть последнее (наибольшее) число, а в B' нет наименьшего. Например, определим B как множество всех рациональных чисел, меньших или равных 2, а ко множеству B' отнесем все числа, большие 2;

в) во множестве B нет наибольшего числа, а во множестве B' — наименьшего. Например, определим B как множество всех положительных рациональных чисел b, квадрат которых меньше 2, т. е. $b^2<2$, число 0 и все отрицательные числа, а ко множеству B' отнесем все числа b', квадрат которых больше 2, т. е. $b'^2>2$.

Пользуясь только свойствами рациональных чисел (ведь действительные числа еще не построены!), легко доказать, что данное сечение действительно принадлежит типу в). Докажем, например, что во множестве B нет наибольшего числа. Пусть b — любое положительное число из класса B, так что $b^2<2$. Покажем, что можно подобрать такое целое положительное число n, для которого $\left(b+\frac{1}{n}\right)^2<2$, так что и число $b+\frac{1}{n}$ принадлежит B. Имеем:

$$b^2+\frac{2b}{n}+\frac{1}{n^2}<2,$$

или

$$\frac{2b}{n}+\frac{1}{n^2}<2-b^2. \qquad (1)$$

Возьмем неравенство $\frac{2b}{n}+\frac{1}{n}<2-b^2$. Если найдется n, при котором оно выполняется, то при этом n и заведомо будет выполняться неравенство (1). Но последнее неравенство выполняется при $n>\frac{2b+1}{2-b^2}$. Таким образом, мы доказали, что вместе с числом b нижнему классу принадлежит также и число $b+\frac{1}{n}$. Точно так же можно доказать, что в классе B' нет наименьшего числа.

Именно наличие во множестве рациональных чисел сечений

третьего типа (т. е. отсутствие в некоторых случаях в этом множестве пограничного числа) свидетельствует о неполноте этого множества и служит основанием для введения новых чисел — иррациональных.

Таким образом, можно сказать, что в случаях а) и б) сечение производится рациональным числом (в приведенных примерах это было число 2). В третьем случае пограничного числа не существует, т. е. сечение не определяет никакого рационального числа. Говорят, что сечение третьего рода определяет некоторое *иррациональное число,* заменяющее недостающее пограничное число, т. е. это число как бы вставляется между всеми числами множества B и всеми числами множества B'; в рассмотренном примере это было число $\sqrt{2}$.

Числа рациональные и иррациональные получили общее название *действительных* (или вещественных) *чисел.*

Следует отметить, что сечений четвертого вида (когда во множестве B имеется наибольшее, а во множестве B' — наименьшее число) во множестве рациональных чисел не существует. Действительно, если допустить, что во множестве B есть наибольшее число b и в то же время существует наименьшее число b' во множестве B', то, например, их среднее арифметическое не может содержаться ни в B , ни в B', так как $b<\frac{b+b'}{2}<b'$, хотя оно является некоторым рациональным числом. Значит, допущение существования сечений четвертого вида приводит к противоречию.

Наличие во множестве рациональных чисел сечений третьего вида говорит о том, что на координатной прямой существуют точки, которым не соответствуют никакие числа из множества рациональных чисел: множество рациональных чисел несвязно. Оказывается, что множество действительных чисел является **непрерывным.** Интуитивный смысл непрерывности уточняется в основной теореме Дедекинда: ***если произвести сечение во множестве действительных чисел, то найдется число*** β, ***производящее это сечение, причем*** β ***будет либо наибольшим в нижнем классе, либо наименьшим в верхнем классе.***

Таким образом, во множестве действительных чисел существуют только сечения первого и второго вида; это и свидетельствует о непрерывности этого множества. В формулировке теоремы Дедекинда предполагается, что во множество действительных чисел введено *отношение порядка.* Это производится так: считается, что $B<B'$, если в верхнем классе сечения B найдется рациональное число, меньшее некоторого рационального числа из нижнего класса в B'. Кроме того, имеется взаимно однозначное соответствие между рациональными числами и некоторым подмножеством действительных чисел: каждому рациональному числу соответствуют два сечения с этим разделяющим числом. Отождествим рациональное число и оба построенных по нему сечения. Можно теперь сказать, что действительные числа образуют расширение рациональных чисел, удовлетворяющее свойству непрерывности.

Примером непрерывного множества является также множество точек на прямой при определении сечения на этом множестве.

В самом деле, взяв на прямой произвольную точку K, произведем сечение во множестве всех точек этой прямой так, что в первое подмножество отнесем все точки, лежащие на прямой слева от нее, и саму точку K, а ко второму подмножеству — все точки, лежащие справа от точки K. Тогда в первом подмножестве есть последняя (считая слева направо) точка K, а во втором подмножестве нет начальной точки. Можно было сделать и такое сечение, когда точка K попадает в подмножество B', являясь там начальной. Таким образом, каждому действительному числу соответствует точка на координатной прямой и, наоборот, каждой точке координатной прямой соответствует действительное число. Иначе говоря, каждой точке координатной прямой соответствует либо целое, либо дробное число, причем дроби могут быть как периодическими, так и непериодическими; бесконечные непериодические дроби называются иррациональными числами.

Чаще всего при введении иррационального числа в школе исходят из следующих соображений: известно, что каждому рациональному числу r соответствует единственная точка $M(r)$ прямой l, на которой заданы начало отсчета, направление и масштаб. При этом число $r=\frac{m}{n}$ называется координатой точки M.

Естественно возникает вопрос: верно ли обратное утверждение, т. е. любой ли точке прямой l соответствует единственное рациональное число? Ответ оказывается отрицательным и иллюстрируется следующим примером.

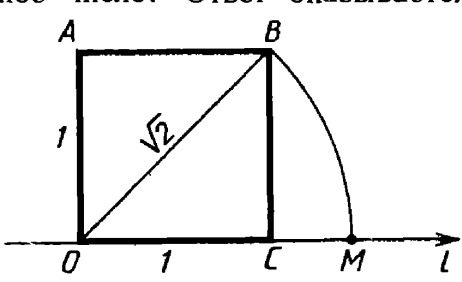


Рис. 29

Пусть O — начало отсчета на некоторой прямой l, OC — единица масштаба (рис. 29). Построим на единичном отрезке OC квадрат $OABC$. По теореме Пифагора $OB=\sqrt{2}$. Отложим на прямой l отрезок $OM=OB=\sqrt{2}$ и докажем, что точка M не соответствует никакому рациональному числу.

Предположим противное, т. е. что $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда $2=\frac{m^2}{n^2}$, $m^2=2n^2$. Правая часть последнего равенства делится на 2 (хотя бы за счет коэффициента 2), значит, и левая часть равенства делится на 2, т. е. m — четное число, которое представимо в виде $m=2k$, где $k\in N$. Таким образом, $(2k)^2=2n^2$, или $2k^2=n^2$. Это означает, что и n — четное число, т. е. дробь $\frac{m}{n}$ сократима на 2, а это противоречит условию. Поскольку точка M имеет какую-то координату и, как показано, не является рациональным числом, ее стали считать числом новой природы и назвали иррациональным числом. В данном случае таким числом является $\sqrt{2}$.

Сопоставление действительных чисел и точек координатной прямой с сохранением отношения порядка, с одной стороны, лежит в основе геометрической наглядности, привлекаемой для изучения

свойств числовой системы, и, с другой стороны, позволяет использовать в геометрии теорию действительного числа.

Наиболее естественным, обладающим, на наш взгляд, определенными методическими достоинствами способом указанное сопоставление достигается на основе представления действительного числа бесконечной десятичной дробью (концепция Вейерштрасса). Она продолжает линию изучения нумерации и измерения величин; школьное изложение теории действительных чисел построено именно на этой основе.

Представим себе, что мы рассматриваем некоторое действительное число β, не являющееся ни целым числом, ни конечной десятичной дробью. Станем искать десятичные приближения числа β. Пусть оно определяется сечением B; B'. Ясно, что в B и B' найдутся целые числа m и n, соответственно для которых $m<n$. Прибавляя к m по единице, придем к последовательным целым числам p и $p+1$, таким, что $p<\beta<p+1$. Если разделить промежуток от p до $p+1$ на 10 равных частей, то β попадет в один из частичных промежутков. Значит, $p+\frac{p_1}{10}<\beta<p+\frac{p_1+1}{10}$. Продолжая этот процесс, получим после определения $k-1$ цифр после запятой:

$$\overline{p, p_1p_2...p_k}<\beta<\overline{p, p_1p_2...p_k}+\frac{1}{10^k}.$$

Бесконечная десятичная дробь $\overline{p, p_1p_2...p_k}$ называется *представлением* действительного числа β.

В случае, когда β является целым числом или конечной десятичной дробью, при применении к нему указанного процесса на каком-то шаге оно совпадает с концом промежутка. Здесь имеются две возможности для выбора бесконечной десятичной дроби, представляющей данное число: если β отнести к правому концу, то начиная с этого момента все следующие цифры оказываются нулями, а если к левому — то девятками. Например, $3{,}614=3{,}614000...=3{,}613999...$.

2. Десятичные приближения иррациональных чисел. Существование несоизмеримых отрезков. В п. 1 мы отметили, что в случае, когда сечение на множестве рациональных чисел производится так, что в нижнем классе нет наибольшего, а в верхнем классе нет наименьшего числа, это сечение производится иррациональным числом. В нашем примере таким числом было $\sqrt{2}$. Можно доказать, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Найдя приближенные значения этого корня с недостатком и с избытком с точностью до 0,1; 0,01; ..., получим две последовательности рациональных чисел:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ ...; \qquad (1)$$

$$1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ ... . \qquad (2)$$

Полученные последовательности обладают тремя свойствами:

1. Каждое число последовательности (2) больше числа последовательности (1) с тем же номером.

2. Последовательность (1) возрастающая, а последовательность (2) убывающая.

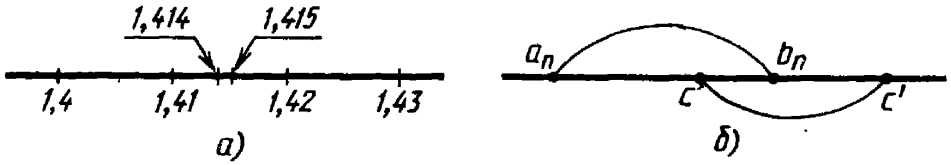


Рис. 30

3. Разность между членами последовательностей (1) и (2) с одинаковыми номерами неограниченно уменьшается по абсолютной величине при увеличении номера:

$$1{,}5-1{,}4=0{,}1;\ 1{,}42-1{,}41=0{,}01;$$

Нетрудно видеть, что разность между десятичными приближениями по избытку и по недостатку равна $\frac{1}{10^n}$ и с возрастанием n может сделаться меньше любого сколь угодно малого рационального числа $\varepsilon>0$. Это произойдет, когда $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$, или

$$n>-\lg\varepsilon. \tag{3}$$

Последовательности (1) и (2) обладают еще одним важным свойством: каждое число последовательности (1) меньше каждого числа последовательности (2). Можно поэтому члены этих последовательностей записать в виде

$$1{,}4<1{,}41<1{,}414\ldots<\sqrt{2}<\ldots<1{,}415<1{,}42<1{,}5.$$

Отметим несколько точек, соответствующих членам последовательностей (1) и (2) на координатной прямой (рис. 30*а*). Видим, что каждая точка, изображающая числа последовательности (1), располагается левее каждой точки, соответствующей членам последовательности (2), причем при увеличении номеров членов точки неограниченно сближаются между собой.

Докажем, что существует единственное разделяющее число для последовательностей (1) и (2). Обозначим члены последовательностей (1) и (2) соответственно через a_n и b_n. Ясно, что последовательность $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, ... является последовательностью вложенных друг в друга отрезков. Допустим, что, кроме разделяющего числа c, существует, например, справа от него и другое разделяющее число c' (рис. 30*б*). Можно найти два таких числа a_n и b_n последовательностей (1) и (2) (между которыми находится число c), которые находились бы одно от другого на расстоянии меньшем, чем $c'-c$. Но тогда число c' оказывается за границей отрезка $[a_n, b_n]$, содержащего точку c.

Поясним сказанное на конкретном примере. Пусть разделяющим числом последовательностей (1) и (2) будет некоторая несократимая дробь $\frac{m}{n}$, т. е.

$$1{,}4<1{,}41<1{,}414<1{,}4142<\ldots<\frac{m}{n}<\ldots$$
$$\ldots<1{,}4143<1{,}415<1{,}42<1{,}5.$$

Возведя неравенство почленно в квадрат, получим:

$$1{,}4^2<1{,}41^2<1{,}414^2<1{,}4142^2<\ldots<\frac{m^2}{n^2}<\ldots$$
$$\ldots<1{,}4143^2<1{,}415^2<1{,}42^2<1{,}5^2.$$

Видим, что на рубеже последовательностей, представляющих квадраты членов последовательностей (1) и (2), кроме числа 2, находится еще и число $\frac{m^2}{n^2}$. Но число $2\neq\frac{m^2}{n^2}$, так как несократимая дробь $\frac{m^2}{n^2}$ не может равняться целому числу 2, т. е. получается, что последовательностями определены два неравных числа, что невозможно. Значит, последовательности (1) и (2) определяют единственное число $\sqrt{2}$, т. е.

$$1{,}4<1{,}41<1{,}414<1{,}4142<\ldots<\sqrt{2}<\ldots$$
$$\ldots<1{,}4143<1{,}415<1{,}42<1{,}5.$$

Члены последовательностей (1) и (2) образуют непериодическую десятичную дробь. Эту дробь рассматривают как число, определяемое последовательностями (1) и (2).

Аналогично получаются последовательности в результате десятичного измерения некоторого отрезка AB с помощью отрезка e, взятого за единицу измерения, в том случае, когда отрезки AB и e несоизмеримы. Соответствующие последовательности также определяют бесконечную непериодическую десятичную дробь. В качестве примера существования несоизмеримых отрезков можно привести диагональ и сторону квадрата: если за единицу измерения взять сторону квадрата, то десятичные приближения измерения диагонали дадут бесконечную десятичную непериодическую дробь.

Можно показать несоизмеримость диагонали и стороны квадрата иначе, воспользовавшись алгоритмом Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух чисел, точнее, геометрическим аналогом этого алгоритма. Посредством него можно найти общую меру отрезков, если такая существует. Применим его к отрезкам AB и AC (рис. 31). Поскольку $AB>AC$, отложим $AC_1=AC$ на AB. Получим первый остаток $r_1=C_1B$, который надо отложить на AC (или на равном ему отрезке CB). Для этого проведем $C_1C_2\perp C_1B$. Получим $CC_2=C_2C_1=C_1B=r_1$. Далее, $r_1=C_1B$ будем откладывать на $BC=AC$. Видим, что $BC=r_1+C_2B$, где C_2B — гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника BC_1C_2, значит, катет $C_1B=r_1$ при откладывании на гипотенузе C_2B даст новый остаток r_2, т. е. $BC=2r_1+r_2$; $AB=BC+r_1$; $r_1=2r_2+r_3$. Алгоритм Евклида оказывается бесконечным, значит, у AB и AC нет общей меры, т. е. они несоизмеримы.

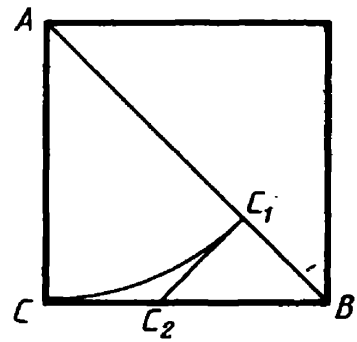


Рис. 31

Теперь можно дать (иное, но эквивалентное тому, которое рассматривается

в теории Дедекинда) определение иррационального числа: всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь (определяемая последовательностями типа (1) и (2)) называется иррациональным числом. Каждое число последовательности (1) и каждое число последовательности (2) называются приближениями иррационального числа соответственно по недостатку и избытку. Множество всех рациональных и иррациональных чисел называется множеством действительных (или вещественных) чисел.

Из курса геометрии известно, что периметры p_6, p_{12}, p_{24}, ..., $p_{3\cdot 2^n}$, ... правильных вписанных в окружность многоугольников и периметры P_6, P_{12}, P_{24}, ..., $P_{3\cdot 2^n}$, ... правильных описанных около этой окружности многоугольников обладают свойствами (1) — (3), и, следовательно,

$$p_6 < p_{12} < p_{24} < \ldots < p_{3\cdot 2^n} < \ldots < P_{3\cdot 2^n} < \ldots < P_{24} < P_{12} < P_6.$$

При этом разность $P_{3\cdot 2^n} - p_{3\cdot 2^n}$ между членами этих двух последовательностей с одинаковыми номерами при возрастании n становится и остается меньше сколько угодно малого положительного числа ε.

Если заменить члены последовательности p_6, p_{12}, ... их десятичными приближениями с недостатком с точностью до $1, \frac{1}{10}, \ldots$, а члены последовательности P_6, P_{12}, ... их десятичными приближениями с избытком (также с постепенно увеличивающейся точностью), то получим две последовательности, определяющие некоторую бесконечную десятичную дробь. Она будет непериодической, если в качестве единицы измерения взять радиус данной окружности; это следует из несоизмеримости длины окружности и ее радиуса.

3. Геометрическое изображение действительного числа. Теперь, когда введено понятие иррационального числа, стало возможным измерение любого отрезка AB любым единичным отрезком e. В случае соизмеримости AB и e длина отрезка AB выразится рациональным числом, в случае несоизмеримости — иррациональным. Ввиду этого каждой точке M оси x, на которой точка O выбрана за точку отсчета (начало системы координат), указано положительное направление и дана единица масштаба (единица измерения), соответствует некоторое положительное или отрицательное число α, абсолютное значение которого указывает длину отрезка OM. Знак α указывает положение точки M относительно начала отсчета, т. е. действительное число α является абсциссой точки M. Обратно: если α — действительное число, то на координатной прямой ему соответствует одна и только одна точка M.

Таким образом, между действительными числами и точками координатной прямой существует взаимно однозначное соответствие.

При изучении геометрической интерпретации действительных чисел следует уделить достаточное внимание формированию понятия модуля действительного числа и его геометрического смысла.

Ясно, что если a — действительное число, то его модулем, или абсолютной величиной, называют число $|a|$, которое определяется так:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ -a, \text{ если } a < 0, \\ 0, \text{ если } a = 0. \end{cases}$$

Очень важно отработать с учащимися равносильность неравенств $|a| \leqslant b$, $-b \leqslant a \leqslant b$. Складывая почленно очевидные неравенства

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a| \text{ и } -|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

получим:

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|,$$

а последнее равносильно неравенству $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, которое довольно часто используется в дальнейшем.

Необходимо добиться также понимания того, что неравенство $|a| \geqslant b$ равносильно двум неравенствам, а именно $a \geqslant b$ и $a \leqslant -b$.

Этими выводами учащиеся будут часто пользоваться при нахождении области определения функции, нахождении множества решений неравенств, изучении предела функции и т. д.

Абсолютную величину действительного числа удобнее всего трактовать как расстояние от начала отсчета до точки, изображающей данное действительное число.

4. Понятие о поле действительных чисел. Числовая система в курсах алгебры и начал анализа излагается в определенном порядке. Прежде всего, изучаются те свойства числовой системы, которые связаны с выполняемыми в ней арифметическими операциями. Наиболее важным алгебраическим понятием, которое относится к описанию этих операций, является понятие **поля.** Напомним, что полем называется множество, в котором определены операции сложения и умножения, причем выполняются следующие условия: 1) сложение коммутативно: $x+y=y+x$; 2) сложение ассоциативно: $x+(y+z)=(x+y)+z$; 3) умножение коммутативно: $xy=yx$; 4) умножение ассоциативно: $x(yz)=(xy)z$; 5) умножение дистрибутивно относительно сложения: $x(y+z)=xy+xz$; 6) относительно сложения имеется нейтральный элемент (нуль): $0+x=x$; 7) относительно умножения имеется нейтральный элемент (единица): $1 \cdot x=x$; 8) для каждого элемента существует противоположный элемент: $x+(-x)=0$; 9) для каждого отличного от нуля элемента существует обратный ему элемент: $x \cdot \frac{1}{x}=1$.

Система этих свойств отрабатывается в курсе алгебры особенно подробно и тщательно на различных, последовательно вводимых и изучаемых областях числовых выражений. Для этого используется разнообразный материал — тождественные преобразования, уравнения, текстовые задачи. Основная цель, которую преследуют соответствующие упражнения в изучении числовой системы,— сформировать у учащихся представление о приведенных выше свойствах чисел как о свойствах универсальных, которыми можно пользоваться при проведении вычислений в любой числовой области.

В числовой системе рассматривается также отношение порядка. Соответствующим алгебраическим понятием, описывающим основные свойства отношения порядка, является понятие **упорядоченного поля.** Поле называется упорядоченным, если на множестве

его элементов определено отношение «больше», причем удовлетворяются следующие законы: 1) для любых элементов x и y справедливо одно и только одно из отношений: $x>y$, $x=y$, $y>x$; 2) отношение порядка транзитивно: если $x>y$ и $y>z$, то $x>z$; 3) сложение является монотонной операцией: если $x>y$, то $x+z>y+z$; 4) умножение на положительное число является монотонной операцией: если $x>y$ и $z>0$, то $xz>yz$.

Все перечисленные свойства в курсе школьной алгебры получают наглядную иллюстрацию на координатной прямой; при этом основное значение имеет следующий факт: числа x, y связаны отношением $x>y$ в том и только в том случае, когда соответствующие этим числам точки M_x и M_y расположены так: M_x правее M_y. В школьном курсе математики имеются два стандартных положения координатной прямой: ось абсцисс ориентирована слева направо; ось ординат — снизу вверх. Поэтому необходимо обращать внимание также на установление соответствия между отношением «больше» в числовой системе и отношением «правее» между точками оси абсцисс.

Характерным свойством поля действительных чисел является свойство непрерывности.

Нами были построены последовательности (1) и (2) приближенных значений $\sqrt{2}$. Разность двух любых чисел, достаточно далеко стоящих в каждой последовательности, может быть сделана сколько угодно малой, как мы этого захотим. Такие последовательности чисел называются фундаментальными.

Упорядоченное поле называется **полным**, если для каждой фундаментальной последовательности элементов найдется элемент поля, оказывающийся для этой последовательности предельным.

Таким образом, «закон полноты» требует, чтобы все «щели» между рациональными числами были сплошь заполнены. В этом состоит непрерывность множества действительных чисел, т. е. можно сказать, что действительные числа «покрывают» прямую без «пробелов». К необходимости расширения множества рациональных чисел до поля действительных чисел приводит и ряд требований, предъявляемых арифметикой; без расширения множества рациональных чисел невозможно выполнить извлечение корня из положительного числа при положительном основании и т. д.

Как свойство непрерывности, так и любые эквивалентные ему свойства формируются в курсе школьной математики неявно, главным образом с опорой на соответствующее свойство прямой. Тем ответственнее следует проводить рассмотрения в тех случаях, когда свойство непрерывности существенно используется в построении числовой системы. Можно отметить два момента: введение иррациональных чисел и формирование представления о действительном числе как бесконечной десятичной дроби в связи с задачей измерения величин (главным образом, длины отрезка). На этой же основе вводится понятие логарифма числа.

Рассматривая в дальнейшем элементарные функции на (непрерывном) множестве действительных чисел, можно для их исследо-

вания применять методы математического анализа (см. гл. 6).

Последним условием, выполнение которого однозначно характеризует множество действительных чисел, является **архимедовость.** Упорядоченное поле называется архимедовым, если для каждого его элемента α существует натуральное число k, такое, что $\alpha < k+1$. Это свойство постоянно используется при построении и использовании числовой системы (например, при определении целой части числа), однако, как и свойство полноты, не отмечается в явном виде; соответствующие рассуждения опираются на рассмотрение координатной прямой.

Отметим, что далеко не все числовые области являются полями. Например, не образует поля множество иррациональных чисел; действительно, арифметические операции над иррациональными числами могут привести к числу рациональному. Примеры: $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$ и т. д. Простейшее числовое поле — множество всех рациональных чисел.

В школе, как правило, не вводится понятие действительного числа построением сечений на множестве рациональных чисел (концепция Дедекинда), так как при этом приходится сталкиваться со значительными методическими трудностями, а именно:

а) трудность актуализации вводимого математического понятия;

б) необходимость привлечения понятий, выходящих за рамки обязательного курса школьной математики;

в) статичность исследуемой ситуации.

Тем не менее этот подход может быть реализован на факультативных занятиях.

Следует отметить, что в учебниках для средней школы «в чистом виде» ни одна из концепций (Дедекинда, Вейерштрасса, Кантора) не реализовывалась. Исторически идеи этих концепций взаимно обогащали друг друга, и в современной методической литературе для средней школы действительные числа вводятся приблизительно по следующей схеме:

а) Делается попытка решения уравнения $x^2-2=0$. Это ведет к необходимости доказательства теоремы: «Не существует ни целого, ни дробного числа, квадрат которого равнялся бы числу 2». (Можно было бы взять уравнения $x^2-3=0$, $x^2-5=0$ и т. д. и доказывать соответствующие утверждения.)

б) Поскольку теорема доказана, в дальнейшем ставится задача отыскания числа, квадрат которого был бы близок к числу 2.

Так как $1^2=1<2$, но $2^2=4>2$, то говорят, что 1 есть приближенный корень из 2 с точностью до 1 с недостатком, а 2 есть приближенный квадратный корень из 2 с точностью до 1 с избытком. Разбивается отрезок $1\leqslant x\leqslant 2$ координатной прямой на десять равных частей и рассматриваются числа: 1,0; 1,1; 1,2; ...; 1,9; 2,0. Вычисляя последовательно их квадраты, приходят к выводу, что $1{,}4^2=1{,}96<2$, а $1{,}5^2=2{,}25>2$. Число 1,4 называют приближенным квадратным корнем из 2 с точностью до 0,1 с недостатком, а число 1,5 — с избытком.

Таким способом можно найти приближенные квадратные корни из 2 (с недостатком и избытком) с точностью до 0,001, до 0,0001 и т. д.

Выписывая последовательно находимые приближенные корни (например, с недостатком) с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001; и последовательность их квадратов, получают соответственно:

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... и

1; 1,96; 1,9881; 1,999396; 1,99996164; ... .

Тем самым учащихся подводят к выводу о том, что последовательность квадратов чисел все более приближается к числу 2. Однако точно число 2, как показывает доказанная выше теорема, таким путем получить нельзя. Этот процесс бесконечен.

в) Параллельно с этим понятие действительного числа вводится на геометрической основе, т. е. в процессе измерения отрезков. В частности, задача отыскания числа, квадрат которого равен 2, геометрически означает, что требуется найти абсциссу точки графика $y=x^2$, ордината которой равна 2. Точно так же можно поставить задачу отыскания длины диагонали квадрата, сторона которого равна 1.

Решение той или другой задачи приводит к проблеме измерения отрезка другим, принятым за единицу измерения. Дальнейшие рассуждения, как правило, проводятся по такому плану:

г) Измерение отрезка. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Десятичные приближения длины отрезка.

д) Бесконечные периодические и непериодические дроби.

е) Обращение обыкновенной дроби в бесконечную периодическую и обратная задача.

ж) Иррациональные числа. Примеры.

з) Действительные числа.

и) Сравнение действительных чисел.

к) Операции над действительными числами.

Следует иметь в виду и это должен знать каждый ученик, что когда в дальнейшем дается задание избавиться от иррациональности в знаменателе в следующих выражениях: $\frac{a}{\sqrt{a}}$; $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$, то это вовсе не означает, что в знаменателях этих дробей находятся иррациональные числа. В этом учащиеся могут убедиться, придавая буквам конкретные значения. Дело в том, что алгебраические категории представляют собой абстракции более высокого порядка, а значит, рассуждения в алгебре носят более обобщенный характер, нежели непосредственно в числовых системах.

§ 12. Комплексные числа

1. Расширение понятия числа. Введение множества комплексных чисел. Изучение комплексных чисел является завершающим этапом построения числовых систем в школьном курсе математики. Поэтому учащиеся должны знать, что наряду с практическими

потребностями, приводящими к необходимости введения новых областей чисел, полезно расширение понятия о числах проиллюстрировать на основе решения уравнений; как известно, уравнения в большинстве случаев также получались в результате построения идеализированных математических моделей реальных процессов и состояний.

Приведем примерную схему выполнения этой работы.

1. Решая уравнения вида $x+a=b$ в случае, когда $a, b \in \boldsymbol{N}$, $b<a$, сталкиваемся с необходимостью введения **отрицательных** чисел. Заметим, что потребность в отрицательных числах возникает уже при рассмотрении простейших практических ситуаций (имущество и долг, уровень поверхности земли по отношению к уровню моря и т. п.). Присоединяя сюда число 0, получаем множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$.

2. Решая уравнение $ax=b$, когда $a, b \in \boldsymbol{Z}$, $a \neq 0$, b не делится на a, приходим к дробным как положительным, так и отрицательным числам. Таким образом, множество целых чисел оказалось расширенным до множества рациональных чисел Q с сохранением алгебраических операций, введенных на множестве целых чисел.

3. Далее, решая уравнение вида $ax^2=b$, где $a, b \in \boldsymbol{Q}$, $a \neq 0$, $\frac{b}{a} \geqslant 0$, в случае, когда $\frac{b}{a}$ не является точным квадратом, вводим иррациональные числа. Вместе с рациональными они образуют множество (поле) действительных чисел. При этом оказывается возможным решение в этом поле квадратных уравнений вида $ax^2+bx+c=0$ в том случае, когда $D=b^2-4ac \geqslant 0$.

К введению действительных чисел можно прийти и другим путем (см. § 11).

4. При решении квадратного уравнения могут встретиться два случая: 1) если дискриминант уравнения неотрицателен, то уравнение имеет действительные корни; 2) если дискриминант уравнения меньше нуля, то уравнение на множестве действительных чисел решений не имеет.

Первым рассмотрел задачу, приводящую к квадратному уравнению с отрицательным дискриминантом, итальянский ученый Джероламо Кардано (1501—1576). Вот эта задача: «Определить участок земли прямоугольной формы с площадью 40 (кв. ед.) и периметром 20 (лин. ед.)».

Решение приводит к системе

$$\begin{cases} xy=40, \\ x+y=10, \end{cases}$$

откуда получается уравнение $x^2-10x+40=0$; если вычислить его корни по известной формуле для неотрицательного дискриминанта, получится $x_1=5+\sqrt{-15}$ и $x_2=5-\sqrt{15}$. Кардано назвал $\sqrt{-15}$ софистическим числом.

В дальнейшем при решении кубических уравнений с софистическими числами встретился Н. Тарталья, а Р. Декарт показал, что алгебраические уравнения k-й степени имеют «столько же корней, сколько имеет единиц степень уравнения», и что среди этих корней есть «воображаемые», или «мнимые».

Упомянем еще один пример, когда запас действительных чисел оказывается недостаточным: при положительном основании отрицательные числа не имеют логарифма в области действительных чисел. В области действительных чисел выражение вида $\log_a b$, где $a>0$, $b<0$, не имеет числового значения, т. е. в этой области уравнение $a^x=b$ $(a>0,\ b<0)$ не имеет корней.

Анализ этих и многих других задач привел математиков к выводу о необходимости расширения области чисел до поля комплексных чисел, часть которого составляло множество мнимых чисел.

В начале XIX в. была введена и получила широкое распространение геометрическая интерпретация комплексных чисел и действий с ними на координатной плоскости.

Подвести к этой интерпретации помогает рассмотрение интерпретаций действительных чисел. Пусть M_1 — множество действительных чисел, M_2— множество точек на координатной прямой, M_3— множество векторов на координатной прямой с началом в точке O — начале системы координат. Между этими тремя множествами имеется естественное взаимно однозначное соответствие:

$$M_1 \sim M_2 \sim M_3 \text{ или } x \leftrightarrow M_x \leftrightarrow \overrightarrow{OM_x}.$$

В то же время на плоскости, на которой выбрана прямоугольная декартова система координат, для определения положения некоторой точки необходимо задать пару действительных чисел (x, y). Обратно: каждой точке координатной плоскости соответствует одна и только одна пара действительных чисел. Таким образом, между множеством всех пар действительных чисел и множеством всех точек координатной плоскости существует взаимно однозначное соответствие, т. е. множество всех пар действительных чисел выполняет по отношению к точкам координатной плоскости ту же роль, что множество действительных чисел по отношению к точкам координатной прямой. Поскольку комплексное число имеет вид $x+y\sqrt{-1}$, т. е. определяется парой действительных чисел, его можно изобразить точкой плоскости с координатами (x, y). Таким образом, пары целых чисел привели к рациональным числам, бесконечные последовательности рациональных чисел завершили построение действительных чисел и, наконец, пары любых действительных чисел привели к комплексным числам.

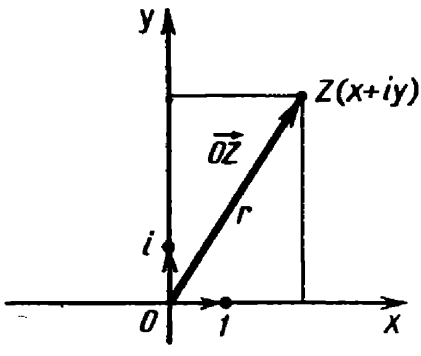


Рис. 32

Векторная интерпретация комплексных чисел стала возможной после введения ирландским математиком Уильямом Гамильтоном в 1831 г. понятия о векторах. Эта интерпретация такова. В прямоугольной системе координат (рис. 32) берется точка $Z(x, y)$ и вектор $\overrightarrow{OZ}$. Ясно, что точке Z соответствует пара чисел (x, y) и вектор $\overrightarrow{OZ}$, и такое соответствие является взаимно однозначным.

Обозначим теперь M_1 множество комплексных чисел, M_2 — множество точек на координатной плоскости, M_3— множество векторов на M_2 с началом в O — начале системы координат. Между этими тремя множествами имеется естественное взаимно однозначное соответствие:

$$M_1 \sim M_2 \sim M_3 \text{ или } z=x+yi \leftrightarrow M(x, y) \leftrightarrow \overrightarrow{OZ}.$$

Вектор $\overrightarrow{OZ}$ называется радиус-вектором комплексного числа z, его длина называется модулем z и обозначается $r=|z|$, а аргументом z называется угол φ наклона радиус-вектора с положительным направлением оси абсцисс, обозначение аргумента $\varphi=\operatorname{Arg} z$. Так как таких углов бесконечное множество и любые два из них различаются на целочисленное кратное 2π, то, обозначая наименьшее неотрицательное значение такого угла φ_0, получаем формулу $\varphi=\varphi_0+2k\pi$, где $0\leqslant\varphi_0\leqslant 2\pi$ и $k\in\mathbf{Z}$. Аргумент φ_0 числа z, удовлетворяющий неравенству $0\leqslant\varphi_0\leqslant 2\pi$, обозначается $\arg z$.

Важно отметить, что если к комплексным числам понятия «больше» или «меньше» неприменимы, то модули комплексных чисел можно сравнивать как действительные числа. При этом модуль действительного числа (абсолютная величина) получается из модуля комплексного числа как частный случай: если $z=x+0\cdot i$, то $|z|=|x+0\cdot i|=|x|$.

Введение понятия модуля и аргумента позволяют записать комплексное число $z=x+iy$ в тригонометрической форме. Так как $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, то $x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, а угол φ определяется из уравнений $\begin{cases}\sin\varphi=\frac{y}{r},\\ \cos\varphi=\frac{x}{r}.\end{cases}$

2. Решение двучленных уравнений третьей и четвертой степени. При введении комплексных чисел мы поставили задачу дать представление о построении числовых систем в школьном курсе математики. Основная цель, по нашему мнению, состоит в том, чтобы учащиеся, заканчивая среднюю школу, могли решать простейшие квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом. Рассмотрим несколько примеров такого типа.

Пример 1. $x^3=8$.

Решение. $x^3-8=0$; $(x-2)(x^2+2x+4)=0$. Откуда $x_1=2$. Далее, $x^2+2x+4=0$; $x_{2,3}=-1\pm\sqrt{-3}$, значит, $x_2=-1+i\sqrt{3}$, $x_3=-1-i\sqrt{3}$.

Пример 2. $\frac{1}{3}x^3=-2$.

Решение. $x^3+6=(x+\sqrt[3]{6})(x^2-\sqrt[3]{6}x+(\sqrt[3]{6})^2)=0$.

Отсюда $x_1=-\sqrt[3]{6}$.

Далее, $x^2-\sqrt[3]{6}x+(\sqrt[3]{6})^2=0$; $x_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{6}\pm\sqrt{(\sqrt[3]{6})^2-4(\sqrt[3]{6})^2}}{2}=\frac{\sqrt[3]{6}\pm\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt{3}\cdot i}{2}$;

упростив, получим $x_2=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1+i\sqrt{3})$, $x_3=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1-i\sqrt{3})$.

Пример 3. $x^4=-16$.

Решение. $x^4+16=0$; $x^4+16=x^4+2\cdot4x^2-2\cdot4\cdot x^2+16=$ $=(x^2+4)^2-8x^2=0$. Далее, $(x^2+4+2\sqrt{2}\cdot x)(x^2+4-2\sqrt{2}\cdot x)=0$. Окончательно $x_1=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; $x_2=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $x_3=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; $x_4=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Исторически комплексные числа вошли в математику исходя из ее собственных запросов. Практическое их применение было обнаружено значительно позже, при развитии теории дифференциальных уравнений и создании теории функций комплексного переменного. Эти разделы математики играют большую роль как в развитии самой математики, так и в приложениях к другим наукам и задачам практики, например в исследовании вихревых потоков в жидкостях и газах, в частности при расчете подъемной силы крыла самолета.

3. Формула Эйлера. На факультативных занятиях в X классе после введения комплексных чисел учащимся можно показать связь тригонометрических функций с показательной, определенных на множестве комплексных чисел. Эта связь выражается формулой Эйлера.

Рассмотрим функцию $y=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Дифференцируя ее, получаем:

$$\frac{dy}{d\varphi}=-\sin\varphi+i\cos\varphi=i^2\sin\varphi+i\cos\varphi=i(\cos\varphi+i\sin\varphi)=iy.$$

Разделим переменные: $\frac{dy}{y}=id\varphi$. Отсюда находим $\ln y=i\varphi$, или $y=e^{i\varphi}$. Таким образом, мы получили, что $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Докажем тождественное равенство левой и правой частей этой формулы на множестве комплексных чисел. При $\varphi=0$ равенство справедливо. Если теперь установим, что производные левой и правой частей формулы тождественно равны, то искомое тождество будет доказано. Прологарифмируем по основанию e левую и правую части и найдем производные: $i\varphi=\ln(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; $(i\varphi)'=i$.

$$(\ln(\cos\varphi+i\sin\varphi))'=\frac{-\sin\varphi+i\cos\varphi}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\frac{i^2\sin\varphi+i\cos\varphi}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=i.$$

Тождественность функций, стоящих в левой и правой частях формулы, доказана. Пришли к важному выводу: показательная функция является периодической; это следует из периодичности $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Заменив теперь φ на $-\varphi$ в формуле $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, получим $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$ (поскольку $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$ и $\sin(-\varphi)=\sin\varphi$). Из последних двух формул можно вывести формулы, выражающие $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ через показательную функцию:

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2};\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Доказанная здесь формула $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ была впервые выведена Л. Эйлером.

§ 13. Приближенные вычисления

1. Значение приближенных вычислений для школьного курса математики. Трудно указать область практической деятельности, где можно было бы обойтись без элементарных приближенных вычислений. Владение методами приближенных вычислений помогает не только грамотно и рационально решать задачи из курса физики, химии, но и в реальной жизни осуществить грубую прикидку результата и оценить его точность. Кроме этих целей, приближенные вычисления могут при правильно организованной методике существенно усилить прикладную направленность курса математики посредством знакомства школьников со спецификой применения математических методов к решению практических задач. В процессе формирования понятия приближенного значения числа учащиеся расширяют свои представления о числе, так как знакомятся с величинами, которые объективно не могут иметь точного значения, и для оперирования с такими числами вводятся новые правила вычисления, являющиеся более общими и лежащие в основе определения операций с действительными числами.

Анализ изучения приближенных вычислений в школе позволяет сделать вывод о том, что этот раздел стал стабильным содержанием среднего математического образования, имеющим достаточно разработанную методику. Но несмотря на различные методические подходы, реализованные авторами в различных учебных пособиях, изучение приближенных вычислений постоянно вызывает определенные трудности, связанные, во-первых, со спецификой этого материала, которая вытекает из прикладного, внематематического характера приближенных вычислений, и, во-вторых, с формальным характером обучения. Поясним эти трудности.

1) Математический аппарат приближенных вычислений формируется в курсе математики, но выработка навыков его использования — задача всех других школьных курсов, и в первую очередь физики, химии и т. д. К сожалению, практика работы школы показывает, что часто сформированный в курсе математики аппарат приближенных вычислений оказывается мертвым грузом, не находящим применения, так как учителя физики, химии и т. д. дают свои правила подсчета результатов либо ученики считают, забывая о теории, полученной в курсе математики.

2) В. М. Брадис сформулировал основные методические задачи совершенствования обучения приближенным вычислениям: 1. Дать доступное для школьников обоснование правил подсчета цифр. 2. Установить окончательный список и текст правил, подлежащих изучению в разные годы обучения в школе. 3. Выбрать рациональные обозначения для точных и приближенных чисел («приближенное число» — термин В. М. Брадиса). 4. Устранить противоречия в учебной литературе по математике, физике и другим дисциплинам, связанные с вычислениями.

Оценивая с современных позиций методическую значимость этих задач, следует отметить, что все они безусловно важны,

однако вне поля зрения остались такие вопросы, как соразмерность, целесообразность и соотношение получаемых результатов вычислений с исходными данными. Не упоминается о том, как надо готовить школьников к предварительной оценке точности получаемых результатов, как научить их определять, достаточна ли эта точность для дальнейшего использования полученного результата.

В последнее десятилетие наметились определенные изменения в методике изучения приближенных вычислений, связанные главным образом с расширением и систематизацией сведений о них в обязательном курсе математики. Выделен основной понятийный аппарат, достаточный для формирования знаний теории и навыков использования приближенных вычислений. В области же собственно методических подходов к изложению раздела «Приближенные вычисления» все еще имеются существенные трудности в реализации их практической направленности.

2. Основные методы приближенных вычислений. В школьной практике находят применение три основных метода приближенных вычислений: 1) метод границ; 2) метод полного и точного учета погрешностей исходных данных; 3) правила подсчета цифр (элементарные приближенные расчеты).

Кроме указанных методов, в связи с бурным ростом парка ЭВМ и дальнейшим развитием численных методов, используемых при расчетах на ЭВМ, появилось еще много других специфических методов, которые имеют важное практическое значение. К таким методам можно отнести, например, стохастический и вероятностный методы. Но пока говорить об их изучении в школе не приходится.

Метод границ дает правильное представление о нижней и верхней границах получаемого приближенного значения, т. е. его корректность достаточно высока. Этот метод вполне доступен школьникам; он достаточно широко применяется в курсе физики.

Сущность этого метода состоит в том, что один раз проводятся приближенные вычисления с недостатком (берется нижняя граница каждого из исходных данных и по ним находится нижняя граница результата), а второй раз — с избытком (по верхней границе каждого из исходных данных находят верхнюю границу результата). Метод границ позволяет ученику проследить за тем, как увеличивается погрешность окончательного результата. Например, пусть речь идет о законе Ома: $U=I\cdot R$, где U — напряжение (В), I — сила тока (А), R — сопротивление (Ом); нам известно, что $3{,}1\leqslant I\leqslant 3{,}2$ и $5\leqslant R\leqslant 7$. В процессе вычисления значения напряжения мы можем проследить, как увеличивается интервал между нижней и верхней границами:

$$\begin{array}{r} U=I\cdot R \\ 3{,}1\leqslant I\leqslant 3{,}2 \\ 5\leqslant R\leqslant 7 \\ \hline 15{,}5\leqslant IR\leqslant 22{,}4 \end{array}$$

Для учащихся всегда оказывается удивительным и неожиданным факт такого расширения границ значения вычисляемой величины.

Действительно, в исходных данных интервалы границ были 0,1 и 2, а в окончательном результате интервал оказался равным 6,9. Резкое увеличение интервала границ наглядно показывает ученику сущность процесса накопления погрешностей при умножении приближенных значений. Метод границ устанавливает органическую связь между школьными курсами математики и физики при формировании основных понятий теории приближенных вычислений.

Метод границ универсален, с его помощью можно решить любую школьную задачу, в которой требуется найти погрешность результатов вычислений. Однако все вычисления по этому методу приходится выполнять дважды, поэтому при больших объемах вычислений он малоэффективен из-за своей громоздкости.

Метод полного и точного учета границ погрешностей исходных данных основан на использовании формул, относящихся к границам абсолютной и относительной погрешности, например $h=h_a+h_b$ (формула для вычислений границы погрешности суммы и разности), $\delta=\delta_a+\delta_b$ (формула для вычисления границы относительной погрешности произведения и частного). Эти формулы выведены исходя из оценки модулей погрешностей, а не из истинной погрешности исходных данных, поэтому они дают завышенные значения границ погрешностей результата. При определении границ погрешностей исходных данных мы уже существенно превышаем их истинную погрешность ($|x-a|\leqslant h$); если же мы пользуемся формулами $h=h_a+h_b$ и $\varepsilon=\varepsilon_a+\varepsilon_b$, то в результате получаем еще более завышенную погрешность. Вычислитель может быть уверен лишь в том, что истинная погрешность полученного результата не превысит той границы, которая получена с помощью формул оценки погрешностей.

Несмотря на универсальность этого метода, его применимость в практике изучения естественно-математических предметов в средней школе ограничена. Из-за простоты решаемых в школе задач дополнительные вычисления становятся несоразмерными с основным объемом вычислительных работ: вычисление границы погрешности результата займет больше времени и потребует больше усилий, чем собственно вычисление результата.

Правила подсчета цифр (практические приемы приближенных вычислений). Прежде всего, надо остановиться на вопросе о корректности метода подсчета цифр. Особенностью этого метода является его вероятностная природа. В большинстве задач этот метод дает правильный результат. В. М. Брадис отметил, что правила подсчета цифр при сложении и вычитании дают правильный, в смысле верности цифр, результат в 95—99% случаев, а при умножении и делении говорить о верности получаемого результата можно только с вероятностью около 90%.

Тем не менее при работе по этому методу вычислитель в большинстве случаев уверен в получаемых результатах. Специфика этого метода приводит к значительным методическим трудностям обучения приближенным вычислениям такого типа. Эти трудности настолько значительны, что в большинстве пособий

по приближенным вычислениям правила вычислений без полного учета погрешностей даются без какой-либо подробной мотивировки. Обоснование и мотивировка правил подсчета цифр связаны с двумя разделами математики: теорией приближенных вычислений и теорией вероятностей. В действующих учебниках математики теория вероятностей не представлена. Вместе с тем в основе приемов и правил элементарных расчетов лежит принцип «практической уверенности», основанный на вероятностных соображениях. По традиции в средней школе вся мотивировка подсчета цифр давалась и дается без теории вероятностей. Получается, что элементарные приближенные расчеты лишаются необходимого логического обоснования.

Правила подсчета цифр доступны и элементарны, какие-либо серьезные затруднения при их использовании не возникают. Заметим, что в курсе физики эти расчеты широко используются. Широта и универсальность применения элементарных приближенных расчетов в естественно-математическом образовании основаны на том, что с помощью правил подсчета цифр можно найти значение любой рациональной функции нескольких переменных.

3. Прикладная значимость приближенных вычислений. В настоящее время приближенным вычислениям в восьмилетней школе уделяется достаточное внимание. Систематическое изучение теории приближенных вычислений начинается в VII классе. До этого учащиеся знакомятся с правилами округления десятичных дробей и с понятиями о приближении с недостатком и с избытком. В связи с изучением вопроса об обращении обыкновенной дроби в десятичную дается первое представление о погрешности приближения. В VII классе в курсе алгебры учащиеся знакомятся с основными понятиями теории приближенных вычислений — с понятиями точного и приближенного значения числа, абсолютной и относительной погрешности, точностью приближения, правилами записи приближенных значений, методами (или хотя бы одним из методов) приближенных вычислений, о которых говорилось выше.

Один лишь перечень (далеко не полный) новых понятий показывает теоретическую насыщенность этого раздела, которая и ведет к довольно формальному его изучению. Часто учителя сосредоточивают все внимание на овладении новыми понятиями, на формальном усвоении алгоритма выполнения действий, забывая о практической природе этого раздела.

Как известно, процесс применения математических методов к решению практических задач состоит из трех этапов: 1) построение математической модели; 2) внутримодельное решение; 3) интерпретация полученного математического ответа, установление его связи с исходными данными. Построение математической модели непосредственно связано с измерениями, причем точность измерений существенно влияет на выбор математической модели. Построение любой идеализированной модели некоторого реального объекта или процесса, т. е. этап формализации, невозможно без правильной оценки погрешности исходных данных. Более того, именно погреш-

ности исходных данных часто определяют выбор алгоритма решения задачи, т. е. путь внутримодельного исследования.

Если иметь в виду также необходимость учета требуемой точности получаемого результата, то становится ясным идейное значение математического аппарата приближенных вычислений и вытекающая отсюда роль приближенных вычислений в общем математическом образовании. Активное, осознанное включение всех этапов математического моделирования в процесс изучения приближенных вычислений позволит существенно усилить их практическую значимость, познакомит школьников со спецификой использования математики в практической деятельности, поможет выработке прикладных навыков. В настоящее время эти вопросы еще не находят достаточного отражения в сложившейся методике изучения приближенных вычислений.

4. Методика формирования основных понятий теории приближенных вычислений. Как говорилось выше, основные понятия приближенных вычислений связаны по своему происхождению с практикой измерений. Начальный **пропедевтический этап** формирования этих понятий не должен ограничиваться математикой. Он должен затрагивать такие предметы, как физика. Лабораторные работы по физике могут быть полнее использованы для пропедевтики основных понятий приближенных вычислений.

Главным на этом этапе является соотнесение точности измерительных приборов с возможностями ошибки измерения. При этом не следует торопиться с включением в учебный процесс вычислительной работы. Раскрытие и уточнение смысла понятий «ошибка измерения», «точность измерения» готовят к осмыслива-нию и усвоению понятия погрешности.

Особая роль на этом этапе отводится измерениям: школьники должны научиться рассматривать их как важнейшее средство построения математической модели. Следует подобрать такие примеры, которые демонстрируют зависимость практической пригодности построенной модели измеряемого объекта от точности, получаемой в результате измерений. Именно здесь можно и нужно раскрыть перед школьниками природу возникающих при измерениях ошибок. Важно убедить школьников в том, что подавляющее большинство ошибок измерений возникает объективно. В действующей методике обучения приближенным вычислениям этап пропедевтики практически сводится к нескольким ознакомительным упражнениям на различение точных и приближенных значений величин. Целесообразно трактовать эти понятия как соответствующие модели. Значение непрерывной величины описывается двумя математическими моделями: точным ее значением и приближенным. Точное значение непрерывной величины — абстракция, так же как, например, понятие точки и прямой в геометрии. Эта модель используется только в теоретических целях. Другое дело, приближенное значение непрерывной величины, эту модель используют на практике.

Поясним сказанное практическим примером.

Земельный участок имеет форму прямоугольника. Стороны измеряли мерной лентой, имеющей деления через 1 м. Измерения показали, что точное значение длины a участка лежит в пределах от 51 до 52 м, значение ширины b — в пределах от 28 до 29 м. Какова площадь участка?

Обсуждая эту задачу, необходимо обратить внимание учащихся на то, что означает «прямоугольность» участка. Учащиеся должны понять, что никакой участок не может быть прямоугольником в чисто математическом смысле этого понятия, но с той или иной точностью может приближаться к прямоугольнику. Поэтому при измерении с точностью до метра участок можно считать прямоугольным, а при более точных сантиметровых измерениях это уже невозможно. Полезно разъяснить эту идею «приблизительно прямоугольного участка» на чертеже.

Таким образом, анализируя эту задачу, учащихся следует подвести к пониманию того, что используемые математические средства должны целесообразно и разумно учитывать специфику задачи. Учащимся следует задать вопрос: можно ли более точно измерить стороны участка и вычислить более точное значение площади? Здесь возможно следующее объяснение.

Конечно, можно попробовать точно измерить стороны участка, например рулеткой с сантиметровыми делениями. Тогда мы получим более точное значение площади. Но давайте подумаем: а можно ли будет доверять результату? Ведь вряд ли участок действительно может иметь форму прямоугольника, хотя бы потому, что стороны, его, несомненно, не идут точно по прямой. И если большие отклонения формы участка от прямоугольника (около метра) легко заметить, то сантиметровые отклонения мы просто не заметим, ошибочно сочтем участок прямоугольным, воспользуемся формулой площади прямоугольника и, естественно, придем к неверному результату. При этом будет затрачено много лишней работы. Вряд ли есть смысл производить в нашем случае более точные измерения. Отсюда вывод: точность исходных данных следует соразмерять со смыслом практической задачи.

Несмотря на то что в пропедевтике сравнительно мало математики, ее роль в воспитании у учащихся элементов прикладного подхода к приближенным вычислениям очень велика. До изучения приближенных вычислений учащимся почти не приходилось сталкиваться с реальными (а не идеализированными) данными в условиях задач и упражнений. По этой причине никогда не возникал вопрос о возможности и целесообразности применения той или иной математической формулы или теоремы. Даже бессмысленное с точки зрения здравого смысла, но корректное в математическом плане решение считалось безукоризненным. Однако теперь мы начинаем вырабатывать у учащихся навыки прикладного мышления, начинаем учить их соразмерять математические методы с практическими потребностями. Этими соображениями обусловливается основная методическая трудность изучения раздела «Приближенные вычисления».

Первая из методических целей пропедевтики заключается в формировании у учащихся понятий точного и приближенного значений. Важно объяснить учащимся, что эти понятия имеют объективный смысл. Точные значения обычно придаются дискретным величинам, т. е. таким, которые можно измерять, пользуясь только натуральными числами (например, число людей, поездов). Приближенные значения придаются, главным образом, непрерывным величинам, которые теоретически могут принимать все промежуточные значения между крайними пределами (расстояние, время, величина угла и т. д.). Конечно, непрерывность также является математической абстракцией, и при изучении приближенных вычислений нет необходимости глубоко рассматривать этот вопрос. Достаточно иметь в виду возможность измерять эти величины сколь угодно точно.

Формирование понятий точного и приближенного значений естественно проводить на каком-либо реальном примере. Однако важно, чтобы содержание этого примера было знакомо учащимся. Проще всего использовать текстовую задачу на движение при условии, что смысл входящих в условие величин учащимся хорошо знаком.

«Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 325 км, с интервалом в 30 мин вышли три поезда...» — так может начинаться традиционная задача, которую решают на уроке математики. В ее условии заданы расстояние $AB=325$ км, промежуток времени между отправлениями поездов $t=30$ мин и число поездов $k=3$. В подобных задачах требуется найти, например, скорость второго поезда; составив и решив систему уравнений, получим искомый ответ, скажем, $v=42$ км/ч. В какой степени правильно найдена эта скорость, если речь идет о средней скорости реального поезда? Очевидно, мы не сможем ответить на этот вопрос, не зная, в какой степени можно доверять приведенным в условии задачи численным данным. Именно в этот момент и следует побудить учащихся к обсуждению смысла этих данных.

Сразу ясно, что вряд ли может вызвать сомнение число поездов. Это число наверняка измерено точно. Вместе с тем мы не можем доверять числам, выражающим расстояние AB и промежутки времени между отправлением поездов. И расстояние, и время можно измерять более или менее точно, но всегда с некоторой погрешностью. Следовательно, значение 325 км выражает не точное, а приближенное значение расстояния. Аналогично 30 мин не точное, а приближенное значение промежутка времени. Итак, не зная, с какой точностью произведены эти измерения, мы не можем полностью доверять полученному результату ($v=42$ км/ч).

Приведенное рассуждение весьма поучительно. Оно показывает, что, как только мы начинаем применять методы математики к решению реальных задач, сразу же возникают вопросы о том, в какой степени можно доверять полученному результату. Если бы мы не могли оценивать эту степень, польза от применения математики была бы невелика. Однако математики умеют производить

вычисления с приближенными значениями реальных величин. Раздел математики, в котором изучаются правила таких вычислений, называют теорией приближенных вычислений. Чтобы учащиеся освоились с введенными понятиями, необходимо рассмотреть ряд упражнений такого типа:

Три бригады, каждая из которых состояла из пяти землекопов, проработали по 6 смен. Каждый член первой бригады вынимал за смену 5 $м^3$ грунта, а члены второй и третьей бригад соответственно на 1 и 2 $м^3$ больше. Сколько всего было землекопов? Сколько грунта вынули рабочие всех бригад вместе?

Задания по тексту задачи. Какие величины в этой задаче заданы точно, а какие — приближенно? На какие вопросы можно получить точный числовой ответ? Ответ на какой вопрос является приближенным?

Знакомство с **методом границ** не вызывает у школьников особых затруднений, он естественно вытекает из свойств неравенств. Кроме того, при использовании метода границ все этапы решения задач практически однозначны. Однако переход к изучению приемов приближенных вычислений с помощью понятия погрешности будет только тогда мотивирован для учащихся, когда они будут ожидать определенного упрощения вычислительной работы по сравнению с громоздким методом границ. Вот эту-то громоздкость метода границ учащиеся должны почувствовать. Следует подчеркнуть трудоемкость параллельной работы (все вычисления мы должны проделывать дважды), подготавливая тем самым интерес к приемам, которые позволят ее облегчить.

Громоздкость и практическое неудобство метода границ побудили вычислителей разработать другие, заменяющие его способы приближенных расчетов. Неудобство задавать длину, скажем, прямоугольного участка неравенствами типа $49<a<51$ привело к тому, что на практике пользуются приближенным равенством: $a\approx 50$ м. Однако длина стороны отличается от 50 м, но на сколько? Для математика важно знать величину возможного отклонения. Показателем того, на сколько приближенное значение величины отличается от точного значения, служит абсолютная погрешность приближения. Понятие **абсолютной погрешности** вводится по-разному. В некоторых учебниках ему предшествует деление всех приближений на две группы: приближений с недостатком и приближений с избытком. Эти понятия сравнительно легко усваиваются учащимися после изучения в предыдущих классах понятия о числовой прямой, но они необязательны.

Формировать понятие абсолютной погрешности следует на конкретном примере. Желательно подобрать его таким, чтобы у учащихся не возникал вопрос: зачем заменять точное значение приближенным? В этом отношении вряд ли будут самыми удачными примеры приближения к рациональным числам или даже приближения к корням, ведь учащиеся знают, что с корнями можно проводить выкладки, не прибегая ни к каким заменам. Можно рассмотреть приближения к числу π: $a_1=3$; $a_2=3{,}14$; $a_3=3{,}2$;

$a_4=\frac{22}{7}=3{,}1428571...$; $a_5=\frac{355}{113}=3{,}1415929...$. (Два последних приближения найдены еще древними учеными.)

Эти приближения разбиваются на две группы. Графическая иллюстрация позволяет вести разговор о качестве приближения на языке расстояния и создает естественную предпосылку для введения абсолютной погрешности как модуля разности точного и приближенного значений величины. Слово «абсолютная» не связано, как это часто считают, с тем фактом, что погрешность берется по модулю (т. е. абсолютной величине). Оно выражает то, что измерения погрешности производятся в тех же единицах, что и значения величины. Учащиеся легко усваивают это понятие и не затрудняются в соответствующих вычислениях. По существу, они просто из большего числа вычитают меньшее, руководствуясь не формальной схемой, а содержательными соображениями. Трактовка понятия абсолютной погрешности как модуля разности намного проще и доступнее для учащихся, чем та, в которой под абсолютной погрешностью понимают разность между точным и приближенным значением числа. В этом случае абсолютная погрешность может быть и положительной, и отрицательной [50]. Основная трудность, связанная с изучением понятия абсолютной погрешности, вытекает из того обстоятельства, что в большинстве конкретных примеров приближений величина погрешности точно не вычислима, так как точное значение измеряемой величины неизвестно. Однако мы всегда можем оценить эту погрешность сверху, т. е. указать число, заведомо не меньшее искомой погрешности. В некоторых учебных пособиях вводится термин «граница абсолютной погрешности», но он носит вспомогательный характер и без него можно обойтись, сразу определяя понятие «приближение с точностью до h» [19]. Геометрическая иллюстрация позволяет перевести довольно формальное определение на понятный, наглядный уровень. Работа с этим понятием завершается введением записи $x=\pm h$, которая широко используется в технике, и, следовательно, ее смысл должен быть понятен всем учащимся.

Мотивировкой перехода к изучению **записи со всеми верными цифрами** может служить неудобство записи приближений с указанием погрешности. Понятно, что было бы желательно указывать погрешность приближения самой формой записи его десятичных знаков. Эти соображения достаточно убедительно мотивируют потребность в каких-либо соглашениях о записи приближенных значений величин. Понятие верной цифры в записи числа является основным в выработке навыков общепринятой записи приближенных значений, полученных в результате измерений и вычислений. Учащиеся должны уметь в записи приближенного значения числа указывать верные цифры, если известна точность данного приближения.

Важнейшее понятие курса теории приближенных вычислений — понятие ***относительной погрешности,*** посредством которой связываются между собой различные приближенные значения. По этой причине относительная погрешность является показателем качества любого измерения и расчета. Следует обратить внимание уча-

щихся на невозможность использования абсолютной погрешности для сравнения качества измерения разных величин. После того как учащиеся поймут это, естественно перейти к изложению материала, связанного с относительной погрешностью приближенных значений.

Абсолютная погрешность приближенного значения характеризует качество конкретного приближения какой-нибудь одной и той же величины. Однако если стоит вопрос о сравнении приближений разных величин, то сделать это на основе абсолютной погрешности нельзя. Действительно, говоря о приближениях одного и того же значения величины, мы можем выявить наиболее точное из них по одной лишь абсолютной погрешности. Например, после измерения получены два приближенных значения длины стола: 94 и 94,3 см; погрешность первого приближения не превосходит 1 см, а второго — 0,1 см. Сравнивая эти приближения, заключаем, что второе число более точно. Но как сравнить два измерения разных величин, например длины стола, приближенно равной 94,3 см, и массы того же стола, приближенно равной 24,76 кг?

Возникшую проблемную ситуацию удается разрешить с помощью понятия относительной погрешности. Лучше, если учитель не сам введет это понятие, а стимулирует учащихся к самостоятельному его созданию. С этой целью полезно в первоначальных рассуждениях об абсолютной погрешности поставить вопрос: какая доля каждой из погрешностей приходится на единицу измеряемой величины? Чтобы ответить на этот вопрос, следует рассмотреть, например, такую задачу:

С одной и той же абсолютной погрешностью 1 см измерены две величины — длина стола l и длина деревянного бруска a. Оказалось, что $l=100\pm1$ см, а $a=500\pm1$ см. Какое из этих измерений более точно?

Очевидно, что более точным следует считать измерение длины бруска. Погрешность в 1 см в этом измерении распределена на 500 см, а в измерении длины стола — на 100 см. Ясно, что отношение погрешности к длине измеряемой величины, равное для бруска 0,002 и для стола 0,01, показывает нам относительную точность приближения. Поэтому в качестве меры точности двух разных измерений можно взять указанное отношение, называемое **относительной погрешностью.** Дается определение (отношение абсолютной погрешности приближения к модулю приближенного значения величины называется относительной погрешностью приближения) и указывается, что обычно относительная погрешность выражается в процентах.

Большое практическое значение имеет знакомство школьников с некоторыми видами записи приближенных числовых значений. Учащиеся должны по записи определить точность приближения, что может быть достигнуто лишь через достаточную систему упражнений.

Приведем примеры упражнений.

1. Измерив одновременно температуру воды двумя приборами, получили результаты:

$t = 25 \pm 1$ °C; $t = 25{,}1 \pm 0{,}1$ °C.

Сравнить качества этих измерений.

2. Приближенное значение числа x записано в стандартном виде $a \cdot 10^n$ (в множителе a все цифры верные). Указать границу абсолютной погрешности числа x, если:

а) $x \approx 1{,}49 \cdot 10^2$; в) $x \approx 1{,}4900 \cdot 10^2$;

б) $x \approx 1{,}490 \cdot 10^2$; г) $x \approx 3{,}15 \cdot 10^4$.

3. Какие из приближенных значений, в записи которых все цифры верные, имеют бóльшую относительную точность:

а) 45,3 или 1,8; б) 8,17 или 0,0817?

Интересный, но довольно сложный вопрос относится к выяснению зависимости относительной погрешности приближений от положения запятой в записи числа. Но этот материал не может считаться обязательным для всех учащихся, его целесообразно рассмотреть на факультативных занятиях.

5. Действия с приближенными значениями чисел. На наш взгляд, целесообразно формировать навыки действий с приближенными значениями чисел в тех школьных предметах, где такие числа являются естественным числовым полем и, таким образом, сама практика заставляет школьников использовать особый математический аппарат нахождения результата по известным данным, отличный от привычного в математике, применимого к точным значениям чисел. Но именно в курсе математики следует сформировать у учащихся ясное понимание неприменимости правил действий с точными значениями чисел к их приближенным значениям. Кроме того, естественно, что на уроках математики учащиеся знакомятся с основными понятиями теории приближенных вычислений и основными алгоритмами действий с такими числами.

В последнее время в школьных учебниках математики найдено удачное сочетание изложения вопросов обоснования действий с приближенными значениями чисел и теории неравенств. При таком изложении выработка основных навыков оперирования с этими числами может довольно успешно осуществляться именно при изучении неравенств, конечно, при соответствующем внимании к этим вопросам со стороны учителя математики. И если раньше постоянным аргументом против широкого включения таких упражнений на уроках математики была громоздкость вычислений, которая намного превышала теоретическую значимость таких заданий, то с внедрением в школу вычислительных средств (например, калькуляторов) эти трудности исчезают, а сам курс математики во многом выигрывает от такого соединения теории и практики.

Вычисления с полным учетом погрешностей применяются лишь при особо точных расчетах, тогда как в повседневной вычислительной практике инженера, плотника, животновода, строителя реально применяются вычисления без полного учета погрешностей. Поэтому с точки зрения практической значимости относящиеся сюда навыки представляются более важными, а необходимость их

развития и формирования ставит перед учителем важную методическую задачу.

Вполне естественно стремление иметь ответ задачи в наиболее приемлемой для практики числовой форме, причем часто желательно, чтобы была и оценка погрешности ответа. Элементарные приближенные расчеты, как говорилось выше, с большой степенью вероятности дают правильные цифры ответа.

Связь школьного курса математики с практикой должна проявляться в развитии тех навыков, которые, будучи по своему содержанию чисто математическими, часто требуются при решении практических задач. Мы имеем в виду навыки прикидки результата, оценки его погрешности, принципиальный для приложений навык доведения результата до числа или расчета схемы.

Элементарные приближенные расчеты являются как бы итогом всей темы «Приближенные вычисления». Однако если учесть значимость этих расчетов для обеспечения требований политехнизма в курсе математики, следует продолжать эту работу и в последующем изучении математики, а также стремиться к тому, чтобы учащиеся широко использовали такие расчеты в процессе изучения предметов естественно-математического цикла.

Приведем примеры упражнений.

1. Можно ли включить в цепь прибор, имеющий сопротивление $44 \pm 0{,}5$ Ом, чтобы при напряжении 215 ± 15 В сила тока не превысила 6 А?

2. Определить, какую мощность разовьет двигательная установка первой ступени многоступенчатой ракеты в конце ее работы, если скорость полета к этому моменту равна 3000 ± 10 м/с при тяге двигателя $10^6 \pm 10^4$ Н.

Ответ дать в млн. кВт.

Глава 5. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 14. Основные типы преобразований и этапы их изучения

Изучение различных преобразований выражений и формул занимает значительную часть учебного времени в курсе школьной математики. Простейшие преобразования, опирающиеся на свойства арифметических операций, производятся уже в начальной школе и в IV—V классах. Но основную нагрузку по формированию умений и навыков выполнения преобразований несет на себе курс школьной алгебры. Это связано как с резким увеличением числа и разнообразия совершаемых преобразований, так и с усложнением деятельности по их обоснованию и выяснению условий применимости, с выделением и изучением обобщенных понятий тождества, тождественного преобразования, равносильного преобразования, логического следования.

Можно выделить следующие этапы освоения применений преобразований буквенно-числовых выражений и формул.

Начала алгебры. На этом этапе используется нерасчлененная система преобразований; она представлена правилами выполнения действий над одной или обеими частями формулы. Приведем типичный пример.

Пример. Решить уравнения:

а) $5x-3x=2$; б) $5x=3x+2$; в) $6(2-4y)+5y=3(1-3y)$.

Общая идея решения состоит в упрощении данных формул с помощью нескольких правил. В первом задании упрощение достигается при помощи применения тождества (распределительного закона): $5x-3x=(5-3)x$. Основанное на этом тождестве тождественное преобразование переводит данное уравнение в равносильное ему уравнение $2x=2$. Второе уравнение требует для своего решения не только тождественного, но и равносильного преобразования; в таком качестве здесь используется правило переноса членов уравнения из одной части уравнения в другую с изменением знака. Мы видим, что уже в решении такого простого задания используются оба типа преобразований — и тождественное и равносильное. Это положение сохраняется, конечно, и для более громоздких заданий, таких, как третье.

Цель этого этапа — достичь беглости в выполнении заданий на решение простейших уравнений, упрощение формул, задающих функции, в рациональном проведении вычислений с опорой на свойства действий.

Формирование навыков применения конкретных видов преобразований. Система приемов и правил проведения преобразований, используемая на этапе начал алгебры, имеет очень широкую область приложений: она используется в изучении всего курса математики. Однако именно в силу своей малой специфичности эта система нуждается в дополнительных преобразованиях, учитывающих особенности структуры преобразуемых выражений и свойства вновь вводимых операций и функций. Освоение соответствующих видов преобразований начинается с введения формул сокращенного умножения. Затем рассматриваются преобразования, связанные с операцией возведения в степень, с различными классами элементарных функций — показательных, степенных, логарифмических, тригонометрических. Каждый из этих типов преобразований проходит этап изучения, на котором внимание сосредоточивается на усвоении их характерных особенностей.

По мере накопления материала появляется возможность выделить и общие черты всех рассматриваемых преобразований и на этой основе ввести понятия тождественного и равносильного преобразований.

Следует обратить внимание на то, что понятие тождественного преобразования дается в школьном курсе алгебры не в полной общности, как оно было определено в § 14, а только в применении к выражениям. Преобразования разделяются на два класса: тождественные преобразования — это преобразования выражений, а равносильные — преобразования формул. В случае, когда возникает потребность в упрощении одной части формулы, в этой

формуле выделяется в ы р а ж е н и е, которое и служит аргументом применяемого тождественного преобразования. Соответствующий предикат при этом считается неизменным. Например, уравнения $5x-3x=2$ и $2x=2$ считаются не просто равносильными, а одинаковыми.

Организация целостной системы преобразований (синтез). Основная цель этого этапа, как было отмечено, состоит в формировании гибкого и мощного аппарата, пригодного для использования в решении разнообразных учебных заданий.

Развертывание второго этапа изучения преобразований происходит на протяжении всего курса алгебры неполной средней школы. Переход к третьему этапу осуществляется при итоговом повторении курса в ходе осмысления уже известного материала, усвоенного по частям, по отдельным типам преобразований.

В курсе алгебры и начал анализа целостная система преобразований, в основных чертах уже сформированная, продолжает постепенно совершенствоваться. К ней также добавляются некоторые новые виды преобразований (например, относящиеся к тригонометрическим функциям), однако они только обогащают ее, расширяют ее возможности, но не меняют ее структуру. Методика изучения этих новых преобразований практически не отличается от применяемой в курсе алгебры.

Необходимо упомянуть об одном типе преобразований, специфическом для курса алгебры и начал анализа. Это преобразования выражений, содержащих предельные переходы, и преобразования, основанные на правилах дифференцирования и интегрирования. Поясним основное отличие этих, «аналитических» преобразований от рассматриваемых в данной главе «алгебраических» преобразований. Оно состоит в характере множества, которое пробегают переменные в тождествах. В алгебраических тождествах переменные пробегают числовые области, а в аналитических этими множествами являются определенные множества функций. Наиболее отчетливо это видно в простейшем примере формулы, выражающей правило дифференцирования суммы: $(f+g)'=f'+g'$; здесь f и g — переменные, пробегающие множество дифференцируемых функций с общей областью определения. Несмотря на то что отмеченное различие не фиксируется в обучении в курсе алгебры и начал анализа, практика показывает, что рассматриваемые преобразования усваиваются достаточно уверенно; этому способствует их внешнее сходство с преобразованиями алгебраического типа. Аналогию между ними можно подчеркнуть, пользуясь оборотами речи типа «алгебра пределов», «алгебра дифференцирования». Углубляться же в объяснение различий алгебраических и аналитических тождеств в основном курсе школьной математики, по-видимому, нецелесообразно. Это тема факультативных занятий.

Тождества, изучаемые в школьном курсе алгебры и алгебраическом материале курса алгебры и начал анализа, можно разделить на два класса. Первый состоит из тождеств сокращенного умножения, справедливых в любом коммутативном кольце, и тождества

$\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$, $a\neq 0$, справедливого в любом поле. Второй класс образован тождествами, связывающими арифметические операции и основные элементарные функции, а также композиции элементарных функций. Большинство тождеств второго класса также имеет общую математическую основу, состоящую в том, что степенная, показательная и логарифмическая функции являются изоморфизмами различных числовых групп. Например, имеет место утверждение: существует единственное непрерывное изоморфное отображение f аддитивной группы действительных чисел в мультипликативную группу положительных действительных чисел, при котором 1 отображается в заданное число $a>0$, $a\neq 1$; это отображение задается показательной функцией с основанием a: $f(x)=a^x$. Аналогичные утверждения имеются и для степенной и логарифмической функций. С их помощью могут быть строго доказаны все изучаемые в курсе школьной математики тождества для рассматриваемых функций. Несколько сложнее провести математическое описание тождеств для тригонометрических функций, однако и здесь можно показать, что эти тождества связаны с понятием гомоморфизма групп [57].

Методика изучения тождеств обоих классов обладает многими общими чертами. Поэтому ее описание мы проведем совместно, отмечая по мере необходимости особенности изучения каждого из указанных классов.

§ 15. Особенности организации системы заданий при изучении тождественных преобразований

Основной принцип организации любой системы заданий — предъявление их от простого к сложному с учетом необходимости преодоления учениками посильных трудностей и создания проблемных ситуаций. Указанный основной принцип требует конкретизации применительно к особенностям данного учебного материала. Для описания различных систем заданий в методике математики используется понятие **цикла упражнений**. Цикл упражнений характеризуется соединением в последовательности упражнений нескольких аспектов изучения и приемов расположения материала. По отношению к тождественным преобразованиям представление о цикле может быть дано следующим образом.

Цикл упражнений связан с изучением одного тождества, вокруг которого группируются другие тождества, находящиеся с ним в естественной связи. В состав цикла наряду с исполнительными входят задания, требующие распознавания применимости рассматриваемого тождества. Изучаемое тождество применяется для проведения вычислений на различных числовых областях. Учитывается специфика тождества; в частности, организуются связанные с ним обороты речи.

Задания в каждом цикле разбиты на две группы. К первой относятся задания, выполняемые при первоначальном знакомстве с тождеством. Они служат учебным материалом для нескольких идущих подряд уроков, объединенных одной темой, как, например,

в [21а] выделен отдельный пункт о свойстве степени. Вторая группа упражнений связывает изучаемое тождество с различными приложениями. Эта группа не образует композиционного единства — упражнения здесь разбросаны по различным темам.

Описанная структура цикла относится к этапу формирования навыков применения конкретных видов преобразований. На заключительном этапе — этапе синтеза циклы видоизменяются. Во-первых, объединяются обе группы заданий, образующие «развернутый» цикл, причем из первой группы исключаются наиболее простые по формулировкам или по сложности выполнения задания. Оставшиеся типы заданий усложняются. Во-вторых, происходит слияние циклов, относящихся к различным тождествам, в силу чего повышается роль действий по распознаванию применимости того или иного тождества.

Приведем конкретный пример цикла.

Пример 1. Цикл заданий для тождества $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$.

Выполнение первой группы заданий этого цикла происходит в следующих условиях. Ученики только что ознакомились с формулировкой тождества (вернее, с двумя формулировками: «Разность квадратов двух выражений равна произведению суммы и разности данных выражений» и «Произведение суммы и разности двух выражений равно...»), его записью в виде формулы, доказательством. После этого приведено несколько образцов использования основанного на этом тождестве преобразования; в число разобранных примеров, в частности, могут входить примеры, аналогичные приведенным ниже. Наконец, ученики приступают к самостоятельному выполнению упражнений.

Первая группа заданий

а) Представить в виде произведения:

$$а_1)\ a^2-b^2;\ а_2)\ c^2-5^2;\ а_3)\ 121-k^2.$$

б) Проверить верность равенства $(100+1)\cdot(100-1)=10\,000-1$.

в) Раскрыть скобки в выражении $(4xy+5x^2)\cdot(4xy-5x^2)$.

г) Вычислить: $г_1)$ $49\cdot51$; $г_2)$ 25^2-24^2; $г_3)$ $(10^4-1)\cdot(10^4+1)$.

д) Разложить на множители:

$д_1)$ k^2-p^2; $д_2)$ $16(ab)^2-9c^2$; $д_3)$ x^4-y^4.

е) Упростить выражение $(a+b)^2-(a-b)^2$.

Вторая группа заданий

ж) Используя тождество $a=(\sqrt{a})^2$ при $a\geqslant0$, разложить на множители многочлен x^2-5.

з) Исключить иррациональность в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

и) Доказать, что если k — нечетное число, то k^2-1 делится на 4.

к) Функция задана аналитическим выражением $f(x)=\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-1}$. Избавиться от знака модуля, рассмотрев два случая: $x\geqslant0$ и $x<0$.

л) Решить уравнение $x^3-4x=15$.

Приступим к методическому анализу представленной системы типов заданий.

Задание $а_1$) имеет целью фиксировать структуру изучаемого тождества. Это достигается заменой букв, используемых в нормативной записи тождества (x и y), другими буквами. Задания этого типа позволяют уточнить связь между словесным выражением и символической формой тождества. Задание $а_2$) ориентировано на установление связи данного тождества с числовой системой. Выполнение задания опирается на сопоставление знаковых структур тождества и преобразуемого выражения; последнее является уже не чисто буквенным, а буквенно-числовым. Для описания производимых действий необходимо использовать понятие з а м е щ е н и я буквы числом в тождестве. Развитие навыков применения операции замещения и углубление представления о ней осуществляются при выполнении заданий типа $г_2$).

Следующий шаг в освоении тождества для разности квадратов иллюстрируется заданием $а_3$). В этом задании предложенное для выполнения преобразования выражение не имеет вида разности квадратов; преобразование становится возможным лишь тогда, когда ученик заметит, что число 121 можно представить в виде квадрата числа и что, следовательно, имеется полное совпадение структуры данного выражения и структуры левой части тождества. Таким образом, выполнение этого задания производится не в один шаг, а в два: на первом происходит распознавание возможности приведения данного выражения к виду разности квадратов, на втором производится преобразование, использующее тождество. На первых порах освоения тождества производится запись каждого шага: $121-k^2=11^2-k^2=(11-k)(11+k)$, в дальнейшем некоторые операции по распознаванию выполняются учениками устно. В данном примере распознавание осуществляется особенно просто; в заданиях $д_2$), $д_3$), ж) оно усложняется, причем сразу в двух отношениях. Во-первых, изучаемое тождество выполняет в этих примерах п р и к л а д н у ю роль, т. е. цель заданий состоит в указании возможных способов его использования. Во-вторых, знаковые структуры выражений, с которыми приходится действовать, уже не столь просты, как раньше; в примере $д_2$) требуется установление связи данного тождества и других, относящихся к действиям с одночленами; в $д_3$) оказывается возможным применить тождество для разности квадратов дважды; в ж) ученикам придется преодолеть определенный психологический барьер, осуществляя выход в область иррациональных чисел. Пример ж) помещен во вторую часть цикла, потому что его «естественное» место в курсе алгебры — в разделе, посвященном нахождению формулы корней квадратного уравнения.

Задания типа б) направлены на формирование навыков замены $(x-y)(x+y)$ на x^2-y^2 В дальнейшем изучении тождества оно рассматривается как основа для проведения двусторонних преобразований. Аналогичную роль играют задания типа в). Примеры типа г), в которых требуется выбрать одно из направлений преобразований,

завершает развитие этой идеи в цикле. Помимо указанной, задания типов б) — е) выполняют и другие нагрузки. Например, к проведению выкладок привлекаются «сопутствующие» тождества $(a^k)^2=a^{2k}$ и др. В дальнейшем в решении одного упражнения использование нескольких тождеств становится обычным явлением. Следует отметить постепенное возрастание роли операций по распознаванию применимости тождества и оценке целесообразности его применения; этот аспект заданий наиболее четко виден в примере $г_1$.

В целом задания первой группы ориентированы на усвоение структуры тождества, операции замещения в простейших, принципиально наиболее важных случаях, и представления об обратимости преобразований, осуществляемых тождеством. Очень важное значение имеет также обогащение языковых средств, показывающих различные аспекты тождества. Представление об этих аспектах дают тексты заданий; учителю необходимо специально обращать на них внимание учеников.

Основные особенности и цели, раскрытые нами при рассмотрении первой группы заданий приведенного цикла, относятся к любому циклу упражнений, формирующему навыки использования тождества. Несмотря на то что по мере изучения материала курса алгебры и в дальнейшем, в курсе алгебры и начал анализа, происходит постепенное формирование элементов алгебраической культуры, для любого вновь вводимого тождества первая группа заданий в цикле должна сохранять описанные здесь особенности; различия могут быть только в количестве заданий, на которых учитель рассматривает те или иные особенности изучаемого тождества.

В отличие от первой вторая группа заданий в цикле направлена на возможно более полное использование и учет специфики именно данного тождества. Задания второй группы предполагают уже сформированные навыки использования изучаемого тождества для разности квадратов (в наиболее простых случаях); цель заданий этой группы — углубить понимание тождества за счет рассмотрения разнообразных приложений его в различных ситуациях, в сочетании с использованием материала, относящегося к другим темам курса математики.

Рассмотрим с этой точки зрения решение задания л):

$$x^3-4x=15\Leftrightarrow x^3-9x=15-5x\Leftrightarrow x(x-3)(x+3)=5(3-x)\Leftrightarrow x=3,$$

или $x(x+3)=-5$.

Уравнение $x(x+3)=-5$ корней (действительных) не имеет, поэтому $x=3$ — единственный корень уравнения.

Мы видим, что использование тождества для разности квадратов составляет лишь часть в решении примера, являясь ведущей идеей проведения преобразований.

Отметим особенности циклов заданий, связанных с тождествами для элементарных функций. Эти особенности обусловлены тем, что, во-первых, соответствующие тождества изучаются в связи с изучением функционального материала и, во-вторых, они появляются позже тождеств первой группы и изучаются с использованием

уже сформированных навыков проведения тождественных преобразований.

Каждая вновь вводимая элементарная функция резко расширяет область чисел, которые могут быть обозначены и названы индивидуально. Поэтому в первую группу заданий циклов должны войти задания на установление связи этих новых числовых областей с исходной областью рациональных чисел. Приведем примеры таких заданий.

Пример 2. Вычислить:

$(\sqrt[3]{2})^2 \cdot \sqrt[3]{2}$;	$(\sqrt[k]{a})^k = a$;
$2^{2/3} \cdot 2^{1/3}$;	$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$;
$\lg 2 + \lg 3$;	$\lg a + \lg b = \lg ab$;
$\cos^4 22{,}5° - \sin^4 22{,}5°$;	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Рядом с каждым выражением указано тождество, в циклах по которым могут присутствовать предлагаемые задания. Цель таких заданий — в освоении особенностей записей, включающих символы новых операций и функций, и в развитии навыков математической речи.

Значительная часть использования тождественных преобразований, связанных с элементарными функциями, приходится на решение иррациональных и трансцендентных уравнений. В циклы, относящиеся к усвоению тождеств, входят только наиболее простые уравнения, но уже здесь целесообразно проводить работу по усвоению приема решения таких уравнений: сведение его путем замены неизвестного к алгебраическому уравнению.

Последовательность шагов при этом способе решения такова: а) найти функцию φ, для которой данное уравнение $f(x)=0$ представимо в виде $F(\varphi(x))=0$; б) произвести подстановку $y=\varphi(x)$ и решить уравнение $F(y)=0$; в) решить каждое из уравнений $\varphi(x)=y_k$, где $\{y_k\}$ — множество корней уравнения $F(y)=0$. При использовании описанного способа зачастую шаг б) выполняется в неявном виде, без введения обозначения для $\varphi(x)$. Кроме того, ученики зачастую предпочитают из различных путей, ведущих к нахождению ответа, выбирать тот, который быстрее и проще приводит к алгебраическому уравнению.

Пример 3. Решить уравнение $4^x - 3 \cdot 2^x = 0$.

Первый способ	Второй способ
$4^x = 3 \cdot 2^x$	$(2^2)^x - 3 \cdot 2^x = 0$ Шаг а)
$\frac{4^x}{2^x} = 3$	
	$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x = 0$
	$2^x(2^x - 3) = 0$ Шаг б)
	$2^x - 3 = 0$
$2^x = 3$	
$x = \log_2 3$	Шаг в)

Здесь видно, что при первом способе шаг а) сложнее, чем при втором. Первым способом «труднее начать», хотя дальнейший ход решения значительно проще. С другой стороны, у второго способа имеются достоинства, состоящие в большей легкости, большей отработанности в обучении сведения к алгебраическому уравнению.

Для школьного курса алгебры типичны задания, в которых переход к алгебраическому уравнению осуществляется даже еще проще, чем в данном примере. Основная нагрузка таких заданий относится к выделению шага в) как самостоятельной части процесса решения, связанного с использованием свойств изучаемой элементарной функции.

Пример 4. Решить уравнение:

а) $2^{2x}-3\cdot 2^x+2=0$; б) $2^{2x}-3\cdot 2^x-4=0$; в) $2^{2x}-3\cdot 2^x+1=0$.

Первые два уравнения сводятся к уравнениям: а) $2^{2x}=2$ или $2^x=1$; б) $2^x=4$ или $2^x=-1$. Для решения этих уравнений требуется знание лишь простейших фактов о показательной функции: ее монотонность, область значений. Как и задание предыдущего примера, уравнения а) и б) можно отнести к первой группе цикла упражнений на решение квадратно-показательных уравнений.

В отличие от этого задание в) при внешнем сходстве с рассмотренными уравнениями требует значительно более уверенного владения свойствами показательной функции. Оно сводится к уравнениям $2^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, в записи которых присутствуют иррациональные числа. Ответ в этих уравнениях может быть записан только в общей форме, с использованием знака логарифма: $x_1=\log_2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, $x_2=\log_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. Кроме того, составной частью процесса решения должен быть анализ уравнения, включающий доказательство неравенства $\frac{3-\sqrt{5}}{2}>0$. (В заданиях а) и б) также приходится учитывать область значений показательной функции, но это производится гораздо проще, без выкладок.)

Таким образом, приходим классификации заданий в циклах, относящихся к решению трансцендентных уравнений, включающих показательную функцию:

1) уравнения, сводящиеся к уравнениям вида $a^x=y_0$ и имеющие простой, общий по форме ответ: $x=\log_a y_0$;

2) уравнения, сводящиеся к уравнениям $a^x=a^k$, где k — целое число, или $a^x=b$, где $b\leqslant 0$;

3) уравнения, сводящиеся к уравнениям $a^x=y_0$ и требующие явного анализа формы, в которой записано число y_0.

Аналогично можно классифицировать задания и для других элементарных функций.

Большую пользу приносят задания, в которых тождественные преобразования используются для построения графиков при упрощении формул, задающих функции. Этот прием эффективно используется в теории квадратичной функции (выделение полного квадра-

та), при изучении графического метода решения уравнений и неравенств.

Новым вопросом, который необходимо учитывать при изучении тождеств с элементарными функциями, является рассмотрение области определения. При изучении тождеств с рациональными выражениями эта необходимость проявляет себя только при выполнении операции сокращения алгебраических дробей.

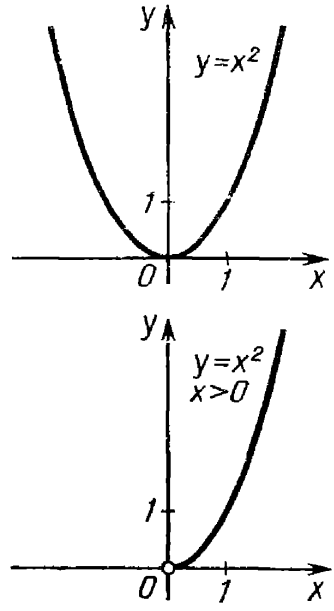


Рис. 33

Пример 5. а) Построить график функции $y=4^{\log_2 x}$. б) Решить уравнение $\lg x+\lg(x-3)=1$. в) На каком множестве формула $\lg(x-5)+\lg(x+5)=\lg(x^2-25)$ является тождеством?

Типичная ошибка, которую совершают ученики в решении задания а), состоит в использовании равенства $a^{\log_a b}=b$ без учета условия $b>0$. В данном случае в итоге искомый график оказывается имеющим вид параболы вместо верного ответа — правой ветви параболы (рис. 33). В задании б) показан один из источников получения сложных систем уравнений и неравенств, когда необходимо учитывать области определения функций, а в задании в) — упражнение, которое может служить подготовительным.

Идея, которой объединены эти задания — необходимость изучения области определения функции, может выявиться только при сопоставлении таких, разнородных по внешней форме заданий. Значение этой идеи для математики очень велико. Она может служить основой нескольких циклов упражнений — по каждому из классов элементарной функции.

§ 16. Доказательства тождеств

Значительная часть тождеств, изучаемых в курсах алгебры и алгебры и начал анализа, доказывается в них или по крайней мере поясняется. Эта сторона изучения тождеств имеет большое значение для обоих курсов, поскольку доказательные рассуждения в них с наибольшей четкостью и строгостью проводятся именно по отношению к тождествам. За пределами этого материала доказательства обычно менее полны, они не всегда выделяются из состава применяемых средств обоснования.

В качестве опоры, на которой строятся доказательства тождеств, используются свойства арифметических операций. Нередко, особенно при изучении тождеств для тригонометрических функций, к доказательствам привлекаются геометрические понятия и методы, главным образом, связанные с геометрическими величинами и с координатной плоскостью. Следует отметить, что геометрические доказательства некоторых тождеств не только поучительны

и наглядны, но и способствуют усилению межпредметных связей; их поэтому полезно рассматривать наряду с доказательствами алгебраического характера.

Доказательства тождеств можно разделить на три типа в зависимости от того, насколько они удовлетворяют требованиям строгости:

а) неполностью строгие рассуждения, требующие использования метода математической индукции для придания им полной строгости. Эти доказательства применяются для вывода правил действий с многочленами, свойств степеней с натуральными показателями;

б) полностью строгие рассуждения, опирающиеся на основные свойства арифметических действий (т. е. на свойства, служащие аксиомами для понятия поля) и не использующие других свойств числовой системы. Основная область применения таких доказательств — тождества сокращенного умножения;

в) полностью строгие рассуждения, использующие условия разрешимости уравнений вида $\varphi(x)=a$, где φ — изучаемая элементарная функция. Такие доказательства характерны для вывода свойств степени с рациональным показателем и логарифмической функции.

Приведем примеры, показывающие особенности методики изучения доказательств каждого типа.

Пример 1 (доказательство типа а). К этому типу относится доказательство основного свойства степени для натуральных показателей: $a^k a^p = a^{k+p}$. Запись этого доказательства имеет вид:

$$a^k a^p = \underbrace{(a \ldots a)}_{k \text{ раз}} \underbrace{(a \ldots a)}_{p \text{ раз}} = \underbrace{a \ldots a}_{(k+p) \text{ раз}} = a^{k+p}.$$

Для того чтобы доказательство было усвоенным, после него рассматриваются примеры на произведение степеней с одинаковым основанием и числовыми показателями степени; может встретиться, скажем, такой пример: $a^3 a^4 = (aaa)(aaaa) = a^7$, выкладки здесь воспроизводят выкладки при доказательстве общего факта. Однако такие примеры хорошо иллюстрируют только способ доказательства для частного случая, но характерная особенность общего способа доказательства здесь не проявляется. Для выявления структуры доказательства целесообразно рассмотреть пример, в котором показатели степени были бы достаточно велики, например $a^{111} a^{222} = a^{333}$; здесь упрощения, связанные с тем, что выкладки могут быть проведены полностью, в конечном виде, не применимы. На таких данных воспроизведение схемы доказательства сохраняет наиболее существенный момент — изображение произведения большого числа сомножителей (одинаковых) при помощи специального знака «...»:

$$a^{111} \cdot a^{222} = \underbrace{(a \ldots a)}_{111 \text{ раз}} \underbrace{(a \ldots a)}_{222 \text{ раза}} = \underbrace{a \ldots a}_{(111+222) \text{ раз}} = a^{111+222}.$$

В этом рассуждении числа (показатели степеней) играют роль переменных. По приведенному образцу можно повторить рассуждение для любого другого набора показателей степени, так что оно имеет общий характер. Отметим, что некоторые доказательства

утверждений, существенных для курса алгебры, можно провести в нем только на такого рода примерах. В частности, правила действий с многочленами формируются в результате рассмотрения нескольких примеров, которые подготавливают общую словесную формулировку правила.

Пример 2. (доказательство типа б). Доказательства этого типа наиболее характерны для курса алгебры и одновременно наиболее просты. В них используются только сравнительно прочные навыки проведения действий с буквенными выражениями — «раскрыть скобки», «привести подобные слагаемые», «выделить общий множитель» и др. В силу своей простоты и доступности именно эти доказательства целесообразно проводить в развернутом виде, поясняя все сделанные переходы. При этом ученики смогут осознать смысл и приемы использования основных свойств арифметических действий.

Многие из утверждений, выражаемых формулами сокращенного умножения, допускают наглядно-геометрическую иллюстрацию. Целесообразно рассмотреть несколько подобных примеров, моделируя на них алгебраические выкладки, и одновременно подчеркнуть, что алгебраическая формулировка и доказательство имеют бо́льшую область применимости — они охватывают и положительные и отрицательные числа, и нуль.

Пример 3. (доказательство типа в). Такие доказательства относятся к труднейшим в курсе школьной математики. Сложность их проведения обусловливается несколькими причинами. Наиболее существенная из них состоит в том, что в отличие от разобранных выше доказательства этого типа используют достаточно сложные логические средства.

В качестве примера рассмотрим доказательство свойства арифметического квадратного корня:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b}. \qquad (1)$$

Доказательство опирается на следующую переформулировку определения квадратного корня: для неотрицательных чисел x, y равенства $y^2 = x$ и $y = \sqrt{x}$ равносильны, при этом число y определено однозначно как функция от x. Из этой переформулировки следует, что (1) равносильно

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = (\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2. \qquad (2)$$

Равенство (2) доказать уже сравнительно просто, однако приводящий к нему путь очень труден для учащихся.

Определенную роль здесь играет то, что по сравнению с доказательством формулы (2) переход (1)$\Rightarrow$(2) происходит мгновенно, и для уяснения этого перехода требуется серьезное напряжение внимания ученика.

Еще одна причина, усложняющая усвоение приведенного доказательства, относится уже не к нему, а к положению, которое занимают доказательства в системе изучения свойств арифметического квадратного корня. Рассматриваемое свойство используется в

доказательстве других свойств, например $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \sqrt{b}$, которые доказываются гораздо легче, без привлечения описанных здесь переходов. Поэтому прием, на котором основано доказательство свойства (1), остается неразвитым.

Целесообразно поэтому усилить внимание к приведенному типу доказательств. Этого можно достигнуть за счет подчеркивания основной идеи доказательства: сопоставления двух операций (или функций) — прямой и обратной к ней. Для выделения указанной идеи можно рассматривать в сравнении ее применение в различных ситуациях. Например, полезно сопоставить доказательство, приведенное здесь, с доказательством основного свойства логарифмов. Приведенное доказательство играет роль образца, с которым последовательно сравниваются действия, производимые при доказательстве соответствующего свойства логарифма. Записи удобно расположить в две колонки:

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\lg xy = \lg x + \lg y$
$(\sqrt{a \cdot b})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$	$10^{\lg xy} = 10^{\lg x + \lg y}$
$a \cdot b = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2$	$xy = 10^{\lg x} \cdot 10^{\lg y}$
$a \cdot b = a \cdot b$	$xy = xy$

§ 17. Особенности изучения преобразований неравенств

Изучение неравенств во многих отношениях представляет большие трудности, связанные со сложностями усвоения новых типов преобразований. В свою очередь, необходимость в их изучении вытекает из различий, имеющихся в свойствах равенств и неравенств. Наиболее существенное из этих различий мы сейчас опишем. Напомним, что отношение равенства обладает следующим основным свойством: если f — некоторая функция и a принадлежит области ее определения, то верна формула $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$. Иными словами, в любой формуле и любом выражении замена равного равным не изменяет значения этой формулы или выражения. Замена в некоторой формуле (или выражении) какого-либо аргумента на равное ему выражение называется операцией **замещения**. Таким образом, можно сказать, что операция замещения не изменяет значений формул или выражений. Отношение неравенства этим свойством не обладает. Однако сходное свойство лежит в основе определения понятий монотонно возрастающей и монотонно убывающей функции: числовая функция называется монотонно возрастающей (убывающей), если $a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$ ($a > b \Rightarrow f(a) < f(b)$). В силу такого «раздвоения» операции замещения возникает необходимость в явном виде выделить отношение логического следования. И действительно, это отношение вводится и изучается именно при рассмотрении свойств неравенств.

Второй важной особенностью изучения преобразований неравенств является значительная роль наглядных рассмотрений в обосновании свойств неравенств и в решении задач. Это объясняется тем, что понятие монотонной функции усваивается совместно с

усвоением особенностей расположения графика. С другой стороны, наглядные рассмотрения помогают облегчить усвоение содержания свойств неравенств, доказательства этих свойств с использованием отношения логического следования вызывают определенные сложности у учеников. Таким образом, наглядные рассмотрения и формально-логические средства при доказательстве свойств неравенств могут взаимно обогащать друг друга, если организовать их сопоставление в процессе изучения свойств неравенств. Такое сопоставление может быть организовано и при изучении теоретического материала, и при решении задач. Наиболее характерный пример, показывающий возможности указанного сопоставления,— доказательство транзитивности отношения «больше». Формальное доказательство проводится так: по определению $a>b$, если $a-b>0$. Поэтому если $a>b$ и $b>c$, то $a-b>0$ и $b-c>0$. Поскольку сумма двух положительных чисел положительна, складывая левые части двух последних неравенств, получаем $(a-b)+(b-c)=a-c>0$, значит, $a>c$. Графическая иллюстрация транзитивности отношения «больше» намного проще — она опирается на очень важный для всего курса математики, особенно в прикладном отношении, факт: $a>b$ означает, что точка M_a расположена на координатной прямой правее M_b (здесь M_x обозначает точку на оси x с координатой x). Так как дано, что M_a правее M_b и M_b правее M_c, то «очевидно», что M_a правее M_c, т. е. $a>c$.

Подчеркнем, что необходимо не просто провести это наглядное рассмотрение, но и (в случае, если формальное доказательство входит в программу курса) произвести его сопоставление с доказательством.

Приведем теперь пример сопоставления в решении задач.

Пример. Доказать, что если $ab>0$ и $bc>0$, то $ac>0$.

Первое решение. Из условия следует, что числа a и b одного знака и что числа b и c также одного знака — того же, что и a. Но это и значит, что $ac>0$.

Второе решение. $ab>0,\ bc>0\Rightarrow b^2(ac)>0.$

$ab>0\Rightarrow b\neq 0\Rightarrow b^2>0.$

$b^2>0,\ b^2(ac)>0\Rightarrow ac>0.$

При разборе решений задач такого типа и их сравнении полезно отмечать, что основа рассуждений в обоих случаях одна и та же: используются основные свойства неравенств, только в различных словесных выражениях.

Очень важное значение имеют свойства неравенств, содержащих знаки модуля. Многие из неравенств такого типа допускают наглядные обоснования, основанные на интерпретации $|a-b|$ как расстояние между точками M_a и M_b. Для облегчения изучения в курсе алгебры и начал анализа понятий непрерывности и предела функций полезно уже в курсе алгебры рассматривать условные неравенства с модулями, например, такого типа: доказать, что $|x-2|<0{,}1\Rightarrow\Rightarrow|x^2-2^2|<0{,}5$.

Отметим еще одну важную особенность изучения доказательства неравенств: необходимость в них может возникнуть по ходу решения задания, внешне не относящегося к неравенствам. Обычно в курсе школьной математики это происходит при учете области определения рассматриваемых выражений, функций или формул. Пример такого «внезапного» появления неравенства уже был приведен (см. пример 4 из § 15).

При выполнении таких заданий очень полезно обращать внимание на ту часть решения, которая связана с неравенствами. Причина в том, что в целом на специальное изучение свойств неравенств в курсе школьной алгебры отводится время, недостаточное для глубокого усвоения соответствующего теоретического материала. Вообще изучение неравенств производится в этом курсе с меньшей глубиной, чем изучение тождеств, относящихся к равенствам. Поэтому связи на материале конкретных заданий могут существенно дополнить навыки преобразования неравенств, формируемые в школьной математике.

Глава 6. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 18. Содержание и роль линии уравнений и неравенств в современном школьном курсе математики

Материал, связанный с уравнениями и неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики. Это объясняется тем, что уравнения и неравенства широко используются в различных разделах математики, в решении важных прикладных задач.

Истоки алгебраических методов решения практических задач связаны с наукой древнего мира. Как известно из истории математики, значительная часть задач математического характера, решаемых египетскими, шумерскими, вавилонскими писцами-вычислителями (XX—VI вв. до н. э.), имела расчетный характер. Однако уже тогда время от времени возникали задачи, в которых искомое значение величины задавалось некоторыми косвенными условиями, требующими, с нашей современной точки зрения, составления уравнения или системы уравнений. Первоначально для решения таких задач применялись арифметические методы. В дальнейшем начали формироваться начатки алгебраических представлений. Например, вавилонские вычислители умели решать задачи, сводящиеся с точки зрения современной классификации к уравнениям второй степени. Таким образом, был создан метод решения текстовых задач, послуживший в дальнейшем основой для выделения алгебраического компонента и его независимого изучения.

Это изучение осуществлялось уже в другую эпоху сначала арабскими математиками (VI—X вв. н. э.), выделившими характерные действия, посредством которых уравнения приводились к стандартному виду (приведение подобных членов, перенос членов из

одной части уравнения в другую с переменой знака), а затем европейскими математиками Возрождения, в итоге длительного поиска создавшими язык современной алгебры (использование букв, введение символов арифметических операций, скобок и т. д.). На рубеже XVI—XVII вв. алгебра как специфическая часть математики, обладающая своим предметом, методом, областями приложения, была уже сформирована. Дальнейшее ее развитие, вплоть до нашего времени, состояло в совершенствовании методов, расширении области приложений, уточнении понятий и связей их с понятиями других разделов математики. В этом процессе все яснее становилась важность роли, которую играло понятие уравнения в системе алгебраических понятий.

Открытие координатного метода (Декарт, XVII в.) и последовавшее за ним развитие аналитической геометрии позволили применить алгебру не только к задачам, связанным с числовой системой, но и к изучению различных геометрических фигур. Эта линия развития алгебры упрочила положение уравнения как ведущего алгебраического понятия, которое связывалось теперь уже с тремя главными областями своего возникновения и функционирования: а) уравнение как средство решения текстовых задач; б) уравнение как особого рода формула, служащая в алгебре объектом изучения; в) уравнение как формула, которой косвенно определяются числа или координаты точек плоскости (пространства), служащие его решением. Каждое из этих представлений оказалось в том или ином отношении полезным.

Таким образом, уравнение как общематематическое понятие многоаспектно, причем ни один из аспектов нельзя исключить из рассмотрения, особенно если речь идет о проблемах школьного математического образования.

Ввиду важности и обширности материала, связанного с понятием уравнения, его изучение в современной методике математики организовано в содержательно-методическую линию — линию уравнений и неравенств. Здесь рассматриваются вопросы формирования понятий уравнения и неравенства, общих и частных методов их решения, взаимосвязи изучения уравнений и неравенств с числовой, функциональной и другими линиями школьного курса математики.

Выделенным областям возникновения и функционирования понятия уравнения в алгебре соответствуют три основных направления развертывания линии уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

а) *Прикладная направленность* линии уравнений и неравенств раскрывается главным образом при изучении алгебраического метода решения текстовых задач. Этот метод широко применяется в школьной математике, поскольку он связан с обучением приемам, используемым в приложениях математики.

В настоящее время ведущее положение в приложениях математики занимает математическое моделирование. Используя это понятие, можно сказать, что прикладное значение уравнений,

неравенств и их систем определяется тем, что они являются основной частью математических средств, используемых в математическом моделировании.

б) *Теоретико-математическая направленность* линии уравнений и неравенств раскрывается в двух аспектах: во-первых, в изучении наиболее важных классов уравнений, неравенств и их систем и, во-вторых, в изучении обобщенных понятий и методов, относящихся к линии в целом. Оба эти аспекта необходимы в курсе школьной математики. Основные классы уравнений и неравенств связаны с простейшими и одновременно наиболее важными математическими моделями. Использование обобщенных понятий и методов позволяет логически упорядочить изучение линии в целом, поскольку они описывают то общее, что имеется в процедурах и приемах решения, относящихся к отдельным классам уравнений, неравенств, систем. В свою очередь, эти общие понятия и методы опираются на основные логические понятия: неизвестное, равенство, равносильность, логическое следование, которые также должны быть раскрыты в линии уравнений и неравенств.

в) Для линии уравнений и неравенств характерна *направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики.* Эта линия тесно связана с числовой линией. Основная идея, реализуемая в процессе установления взаимосвязи этих линий,— это идея последовательного расширения числовой системы. Все числовые области, рассматриваемые в школьной алгебре и началах анализа, за исключением области всех действительных чисел, возникают в связи с решением каких-либо уравнений, неравенств, систем. Например, числовые промежутки выделяются неравенствами или системами неравенств. Области иррациональных и логарифмических выражений связаны соответственно с уравнениями $x^k=b$ (k — натуральное число, большее 1) и $a^x=b$.

Связь линии уравнений и неравенств с числовой линией двусторонняя. Приведенные примеры показывают влияние уравнений и неравенств на развертывание числовой системы. Обратное влияние проявляется в том, что каждая вновь введенная числовая область расширяет возможности составления и решения различных уравнений и неравенств. Например, введение арифметического квадратного корня из рациональных чисел позволяет записывать корни не только уравнений вида $x^2=b$, где b — неотрицательное рациональное число, но и любых квадратных уравнений с рациональными коэффициентами и неотрицательным дискриминантом.

Линия уравнений и неравенств тесно связана также и с функциональной линией. Одна из важнейших таких связей — приложения методов, разрабатываемых в линии уравнений и неравенств, к исследованию функции (например, к заданиям на нахождение области определения некоторых функций, их корней, промежутков знакопостоянства и т. д.). С другой стороны, функциональная линия оказывает существенное влияние как на содержание линии уравнений и неравенств, так и на стиль ее изучения. В частности, функциональные представления служат основой привлечения

графической наглядности к решению и исследованию уравнений, неравенств и их систем.

С функциональной линией непосредственно связан также и небольшой круг вопросов школьного курса математики, относящихся к дифференциальным и функциональным уравнениям. Сама возможность возникновения дифференциального уравнения кроется в наличии операции дифференцирования (может быть поставлен вопрос о нахождении для заданной функции f другой функции F, такой, что $F'(x)=f(x)$).

Однако сама по себе возможность выделения дифференциальных уравнений в школьном курсе математики еще не следует из того факта, что имеются формальные основания для их рассмотрения. Как известно, теория дифференциальных уравнений обладает большой сложностью. В школьном обучении эта теория представлена лишь своими начальными частями, которые не образуют связного целого, а относятся к различным конкретным, по большей части прикладным вопросам.

По-видимому, понятие дифференциального уравнения допускает более широкое представление в школьном курсе. В настоящее время этот вопрос является открытой методической проблемой.

В отличие от дифференциальных функциональные уравнения (неизвестным в которых, так же как и в дифференциальных, является функция) почти не представлены в школьном курсе математики. Единичные задания, связанные с этим классом уравнений, могут быть использованы при рассмотрении показательной функции, в связи с понятием обратной функции и др.

В качестве последнего примера отметим взаимосвязь линии уравнений и неравенств с алгоритмической линией. В главе 10 показано, что само содержание понятия алгоритма может быть в значительной мере выделено на основе анализа процесса решения уравнений различных классов. Влияние же алгоритмической линии на линию уравнений и неравенств заключается прежде всего в возможности использования ее понятий для описания алгоритмов решения уравнений, неравенств и систем различных классов.

§ 19. Основные понятия линии уравнений и неравенств

1. О трактовке понятия уравнения. Понятие уравнения относится к важнейшим общематематическим понятиям. Именно поэтому затруднительно предложить его определение, одновременно и строгое с формальной точки зрения, и доступное для учащихся, приступающих к овладению школьным курсом алгебры.

Логико-математическое определение уравнения можно привести в такой форме: пусть на множесте M зафиксирован набор алгебраических операций, x — переменная на M; тогда уравнением на множестве M относительно x называется предикат вида $a(x)=b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ — термы относительно заданных операций, в запись которых входит символ x. Аналогично определяется уравнение от двух переменных и т. д. [57].

Принятым в логике терминам «терм» и «предикат» соответствуют термины школьной математики «выражение» и «предложение с переменной». Поэтому наиболее близко к приведенному формальному определению следующее определение: «Предложение с переменной, имеющее вид равенства между двумя выражениями с этой переменной, называется уравнением» [59].

Анализируя приведенное математическое определение уравнения, можно выделить в нем два компонента. Первый состоит в том, что уравнение — это особого рода предикат. Второй уточняет, какого именно рода: это равенство, соединяющее два терма, причем термы также имеют определенный специальный вид. При изучении материала, относящегося к линии уравнений и неравенств, оба компонента играют значительную роль.

Первый — *смысловой* компонент, важен прежде всего для уяснения понятия корня уравнения. Кроме того, смысловой компонент почти всегда используется при обосновании корректности того или иного преобразования уравнения.

Второй компонент относится к формальным особенностям записи, изображающей уравнение. Назовем этот компонент *знаковым*. Он важен в случаях, когда запись уравнения подвергается различным преобразованиям: зачастую такие преобразования производятся чисто механически, без обращения к их смыслу.

Возможность использования в школьном обучении подхода к понятию уравнения, включающего явно упоминание о предложении с переменной, зависит от присутствия этого термина и терминов «истина», «ложь» в обязательном материале курса математики. Если их нет, то привести подобное определение невозможно. В этом случае смысловой компонент понятия уравнения переходит в определение другого понятия, тесно связанного с понятием уравнения,— корня уравнения. Получается система из двух терминов: термин «уравнение» несет в себе признаки знакового компонента, а термин «корень уравнения» учитывает смысловой компонент. Такое определение приведено, например, в [25, с. 330]: «Равенство с переменной называется уравнением. Значение переменной, при котором равенство с переменной обращается в верное числовое равенство, называется корнем уравнения».

Часто, особенно в начале систематического курса алгебры, понятие уравнения вводится посредством выделения его из алгебраического метода решения задач. В этом случае независимо от того, каков текст определения, существенным оказывается подход к понятию уравнения, при котором оно представляет косвенную форму задания некоторого неизвестного числа, имеющего в соответствии с сюжетом задачи конкретную интерпретацию. Например, в [20] понятие уравнения вводится на материале текстовой задачи: «Конверт с новогодней открыткой стоит 17 к. Конверт дешевле открытки на 5 к. Найти стоимость открытки». Переход к определению уравнения осуществляется на основе анализа некоторых формальных особенностей записи $x+(x-5)=17$, выражающей содержание данной задачи в алгебраической форме. С помощью этого же

сюжета вводится и понятие корня уравнения. Вот эти определения: «Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением. Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство». Указанный способ введения понятия уравнения соответствует еще одному компоненту понятия уравнения — *прикладному*.

Помимо выделенных компонентов понятия уравнения (смыслового, знакового, прикладного), в школьной математике большую роль играет компонент, при котором уравнение трактуется как равенство двух функций. Его роль проявляется в изучении графического метода решения уравнений. Однако в известных нам учебниках алгебры этот компонент не кладется в основу определения уравнения.

Еще один подход к определению понятия уравнения получается при сопоставлении области определения уравнения и множества его корней. Обычно множество корней уравнения — собственное подмножество его области определения. С другой стороны, при решении уравнений приходится использовать преобразования, которые опираются на тождества, т. е. на равенства, истинные на всей области определения. Выделенное здесь противопоставление тождества и уравнения может быть положено в основу определения уравнения: «Буквенное равенство, которое не обязательно превращается в верное численное равенство при допустимых наборах букв, называется уравнением» [159, с. 11.]

Формирование понятия уравнения требует использования еще одного термина: «решить уравнение». Различные варианты его определения отличаются друг от друга, по существу, только наличием или отсутствием в них термина «множество».

Таким образом, при освоении понятия уравнения необходимо использовать термины «уравнение», «корень уравнения», «что значит решить уравнение». При этом наряду с компонентами понятия уравнения, входящими в текст определения, надо включать и все другие его компоненты по мере развертывания материала данной линии.

В определении понятия уравнения используется один из двух терминов: «переменная» или «неизвестное». Различие между ними состоит в том, что переменная пробегает ряд значений, не выделяя ни одного из них специально, а неизвестное представляет собой буквенное обозначение конкретного числа (поэтому этим термином удобно пользоваться при составлении уравнений по текстовым задачам). Вопросы, связанные с выбором одного их этих терминов для использования в школьной практике, в настоящее время еще нельзя считать окончательно решенными. Выбор того или иного из них влечет определенные различия в развертывании содержания линии уравнений и неравенств. Так, с термином «переменная» связана операция подстановки числа вместо буквы, поэтому в уравнение $a(x)=b(x)$ можно подставлять вместо x конкретные числа и находить среди них корни. Термин же «неизвестное»

обозначает фиксированное число; подставлять число на место буквы, обозначающей неизвестное, поэтому нелогично. Нахождение корней уравнения $a(x)=b(x)$ с этой точки зрения должно осуществляться с помощью действий, при которых это равенство рассматривают как верное и пытаются привести его к виду $x=x_0$, где x_0 — числовое выражение.

При описании методики мы будем пользоваться термином «неизвестное», который ближе, чем «переменная», связан с алгебраическим методом решения текстовых задач и тем самым с прикладной направленностью линии уравнений и неравенств.

2. Равносильность и логическое следование. В этом пункте мы рассмотрим логические средства, используемые в процессе изучения уравнений и неравенств. Наиболее важным среди них является понятие равносильности.

Напомним, что уравнения называются равносильными, если равносильны соответствующие предикаты, т. е. если выполнены условия: области определения уравнений одинаковы и множества их корней равны. Имеются два пути установления равносильности уравнений. Первый: используя известные множества корней уравнений, убедиться в их совпадении; например, уравнения $x+1=x+2$ и $x^2+1=x^2+2$ равносильны, потому что не имеют корней. Второй: используя особенности записи уравнений, осуществить последовательный переход от одной записи к другой посредством преобразований, не нарушающих равносильности.

Очевидно, что для большинства заданий второй путь более характерен. Это и понятно, ведь равносильность в теории уравнений как раз и используется для того, чтобы указать конкретные правила для решения уравнений. Однако в преподавании ограничиваться им нецелесообразно, поскольку он относится только к практическому применению равносильности и требует первого для своего обоснования. Вместе с тем усвоение понятия равносильности как равносильности предикатов требует значительной культуры мышления и не может быть усвоено на начальных этапах изучения школьного курса алгебры без специальных значительных усилий.

В отношении формирования понятия равносильности и его применения к решению уравнений учебные пособия по алгебре можно разделить на две группы. К первой относятся те пособия, в которых использование равносильных преобразований основано на явном введении и изучении понятия равносильности; ко второй — те, в которых применение равносильных преобразований предшествует выделению самого понятия. Методика работы над понятием равносильности имеет при указанных подходах значительные отличия.

В связи с рассматриваемым вопросом в изучении материала линии уравнений и неравенств можно выделить три основных этапа. Первый этап охватывает начальный курс школьной математики и начало курса алгебры. Здесь происходит ознакомление с различными способами решения отдельных, наиболее простых

классов уравнений. Используемые при этом преобразования получают индуктивное обоснование при рассмотрении конкретных примеров. По мере накопления опыта индуктивные рассуждения все чаще заменяются такими, где равносильность фактически используется, но сам термин не употребляется. Длительность этого этапа может быть различной; она зависит от методических установок, принятых в данном учебном пособии.

На втором этапе происходит выделение понятия равносильности и сопоставление его теоретического содержания с правилами преобразований, которые выводятся на его основе. Длительность этого этапа незначительна, поскольку на нем происходит только выделение этого понятия и его использование на нескольких теоретических примерах.

На третьем этапе на основе общего понятия равносильности происходит развертывание и общей теории, и теории отдельных классов уравнений. Такой стиль характерен для курса алгебры и начал анализа, изучаемого в старших классах средней школы. Он применяется и в некоторых пособиях по алгебре для неполной средней школы.

Помимо равносильных, к изучению материала линии уравнений и неравенств применяются и другие, вообще говоря, не равносильные преобразования. Бо́льшая часть из них в школьном курсе не выявляется, хотя они более или менее существенно используются, в частности, при изучении уравнений. Единственным исключением служит понятие логического следования, которое в ряде учебных пособий является предметом изучения. Методика работы с понятием логического следования (а также с представлением о нем в случае, если понятие не вводится) имеет много общих черт с методикой изучения равносильности и равносильных преобразований.

Логическое следование начинает применяться значительно позже равносильности и осваивается в качестве некоторого дополнения к нему. При решении уравнений при прочих равных условиях предпочтение отдается равносильному преобразованию; логическое следование применяется лишь тогда, когда соответствующего равносильного преобразования найти не удается. Это, однако, не означает, что использование логического следования — вынужденная мера. Нередко в практике работы учителей логическое следование применяется как прием, упрощающий процесс решения, если сохранение равносильности может быть достигнуто сравнительно дорогой ценой.

Среди неравносильных преобразований есть преобразования, не являющиеся логическим следованием. Например, переход к рассмотрению частного случая (пример: переход от уравнения $a \cdot b = 0$ к рассмотрению уравнения $a = 0$). Такие переходы можно рассматривать как практические приемы, позволяющие сосредоточить внимание на отдельных шагах процесса решения уравнения.

3. О классификации преобразований уравнений, неравенств и их систем. Можно выделить три основных типа таких преобразований:

1) Преобразование одной из частей уравнения или неравенства.

2) Согласованное преобразование обеих частей уравнения или неравенства.

3) Преобразование логической структуры.

Поясним эту классификацию.

Преобразования первого типа используются при необходимости упрощения выражения, входящего в запись решаемого уравнения или неравенства. Например, решая уравнение $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = 1$, можно пытаться заменить выражение в левой части более простым. В данном случае соответствующее преобразование приводит к уравнению $\sin x = 1$, неравносильному исходному за счет изменения области определения. Возможность получения при такой замене уравнения, неравносильного данному, приходится учитывать при изучении некоторых типов уравнений, например тригонометрических или логарифмических. В классе дробно-рациональных уравнений с этим явлением приходится сталкиваться гораздо реже. (Здесь это связано с возможностью потери корней при сокращении дроби.) Наконец, в классе целых алгебраических уравнений рассматриваемый тип преобразований всегда приводит к уравнениям, равносильным данным.

Преобразование одной из частей уравнения используют раньше всех других преобразований уравнений, это происходит еще в начальном курсе математики. Прочность владения навыком преобразований этого типа имеет большое значение для успешности изучения других видов преобразований, поскольку они применяются очень часто.

Основой преобразований данного типа являются тождественные преобразования (см. гл. 5). Поэтому классифицировать их можно в соответствии с классификацией тождественных преобразований, например раскрытие скобок, приведение подобных членов и т. д.

Преобразования второго типа состоят в согласованном изменении обеих частей уравнения или неравенства в результате применения к ним арифметических действий или элементарных функций. Общей основой всех преобразований этого типа является логический принцип, выражающий характеристическое свойство равенства выражений: если выражения a и b равны и в выражении $F(x)$ выделена переменная x, которая может принимать значение a, то выражения $F(a)$ и $F(b)$ равны: $a = b \Rightarrow F(a) = F(b)$.

Преобразования второго типа сравнительно многочисленны. Они составляют ядро материала, изучаемого в линии уравнений и неравенств.

Приведем примеры преобразований этого типа.

1) Прибавление к обеим частям уравнения (неравенства) одного и того же выражения.

2а) Умножение (деление) обеих частей уравнения на одно и то же выражение.

2б) Умножение (деление) обеих частей неравенства на выражение, принимающее только положительные значения.

2в) Умножение (деление) обеих частей неравенства на выражение, принимающее только отрицательные значения и изменение знака неравенства на противоположный.

3а) Переход от уравнения $a=b$ к уравнению $f(a)=f(b)$, где f — некоторая функция, или обратный переход.

3б) Переход от неравенства $a>b$ к неравенству $f(a)>f(b)$, где f — возрастающая функция, или обратный переход.

3в) Переход от неравенства $a>b$ к неравенству $f(a)<f(b)$, где f — убывающая функция, или обратный переход.

Из сравнения преобразований *3а, 3б* и *3в* ясно, что роль, аналогичную основному свойству равенства, выполняет понятие монотонной функции.

Среди преобразований второго типа преобразования неравенств образуют сложную в изучении, обширную систему. Этим в значительной степени объясняется то, что навыки решения неравенств формируются медленнее навыков решения уравнений и не достигают у большинства учащихся такого же уровня.

К *третьему типу преобразований* относятся преобразования уравнений, неравенств и их систем, изменяющие логическую структуру заданий. Поясним использованный термин «логическая структура». В каждом задании можно выделить элементарные предикаты — отдельные уравнения или неравенства. Под логической структурой задания мы понимаем способ связи этих элементарных предикатов посредством логических связок конъюнкции или дизъюнкции.

В зависимости от средств, которые используются при преобразованиях, в этом типе можно выделить два подтипа: преобразования, осуществляемые при помощи арифметических операций и при помощи логических операций. Первые можно назвать арифметическими преобразованиями логической структуры, вторые — логическими преобразованиями логической структуры.

Наиболее важными для школьного курса математики а р и ф м е т и ч е с к и м и преобразованиями логической структуры являются:

а) Переход от уравнения $a\cdot b=0$ к совокупности уравнений $a=0$, $b=0$. Для неравенств аналогичный переход имеет вид $a\cdot b>0 \longmapsto (a>0\wedge b>0)\vee(a<0\wedge b<0)$. Сюда же относятся сходные преобразования для уравнений и неравенств вида $\frac{a}{b}=0$, $\frac{a}{b}>0$.

б) Переход от системы уравнений к одному уравнению посредством почленного сложения, вычитания, умножения или деления уравнений, входящих в систему.

Приведем примеры л о г и ч е с к и х преобразований логической структуры:

а) Выделение из системы уравнений или неравенств одного из компонентов. Например, при решении системы уравнений $\begin{cases} 2x+6y=10, \\ 3x-5y=7 \end{cases}$ способом подстановки можно в качестве первого

шага рассмотреть первое из уравнений (это и будет преобразование данного типа, условно его можно изобразить так: $A \wedge B \dashrightarrow A$). Смысл такого преобразования в том, что выделенное уравнение можно подвергать дальнейшим преобразованиям независимо от той системы, в которую оно входит.

б) Замена переменных. В простейшем случае замена переменных состоит в переходе от уравнения $F(f(x))=0$ к системе $\begin{cases} F(y)=0, \\ y=f(x). \end{cases}$ Связь этой системы и данного уравнения такова: число x_0 — решение уравнения $F(f(x))=0$ тогда и только тогда, когда пара $(x_0, f(x_0))$ — решение системы. Это преобразование позволяет одно «сложное» уравнение заменить системой более простых уравнений. Так решаются биквадратные уравнения, многие типы иррациональных и трансцендентных уравнений (например, при их сведении к алгебраическим уравнениям). Замена переменных используется и при решении неравенств.

в) Преобразование, противоположное замене переменных, т. е. переход от системы вида $\begin{cases} y=f(x), \\ F(x, y)=0 \end{cases}$ к уравнению $F(x, f(x))=0$. Корни этого уравнения и решения данной системы связаны так же, как при замене переменной. Это преобразование назовем подстановкой.

На основе подстановки в процессе обучения алгебре вводится стандартный метод решения системы уравнений с двумя неизвестными: в одном из уравнений одно из неизвестных выражается через другое, полученную при этом систему решают методом подстановки. Этот метод превращается в дальнейшем в курсе школьной алгебры в универсальный метод уменьшения количества неизвестных в системе.

г) Укажем еще на преобразования, основанные на тождественно истинных формулах алгебры логики, имеющих вид равносильности или логического следования. Преобразования эти весьма многочисленны, но в практике школьного обучения используются редко. Приведем пример такого преобразования. При решении уравнения $2x+3|x|=1$ можно в соответствии с определением модуля рассмотреть случаи $x \geqslant 0$ или $x<0$, т. е. решить систему

$$\begin{cases} 2x+3|x|=1, \\ x \geqslant 0 \text{ или } x<0. \end{cases}$$

В процессе решения логическая структура этой системы преобразуется к виду совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2x+3|x|=1, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x+3|x|=1, \\ x<0. \end{cases}$$

Таким образом, происходит изменение логической структуры, осуществляемое по схеме $A \wedge (B \vee C) \dashrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Изучение и использование преобразований уравнений, неравенств и их систем, с одной стороны, предполагают достаточно высокую логическую культуру учащихся, а с другой стороны, в процессе изучения и применения таких преобразований имеются ши-

рокие возможности для формирования логической культуры. Большое значение имеет выяснение вопросов, относящихся к характеризации производимых преобразований: являются ли они равносильными или логическим следованием, требуется ли рассмотрение нескольких случаев, нужна ли проверка? Сложности, которые приходится здесь преодолевать, связаны с тем, что далеко не всегда возможно привести характеризацию одного и того же преобразования однозначно: в некоторых случаях оно может оказаться, например, равносильным, в других равносильность будет нарушена.

В итоге изучения материала линии уравнений и неравенств учащиеся должны не только овладеть применением алгоритмических предписаний к решению конкретных заданий, но и научиться использовать логические средства для обоснования решений в случаях, когда это необходимо.

4. Логические обоснования при изучении уравнений и неравенств. При изучении материала линии уравнений и неравенств значительное внимание уделяется вопросам обоснования процесса решения конкретных заданий. На начальных этапах изучения курса алгебры и в курсе математики предшествующих классов эти обоснования имеют эмпирический, индуктивный характер. По мере накопления опыта решения уравнений, неравенств, систем различных классов все большую роль приобретают общие свойства преобразований. Наконец, достигнутый уровень владения различными способами решения позволяет выделить наиболее часто используемые преобразования (равносильность и логическое следование). Учебные пособия по алгебре имеют существенные различия в отношении описанных способов обоснования. Тем не менее выделяются все указанные направления, причем в общей для них последовательности. Кратко рассмотрим каждое из этих направлений.

Эмпирическое обоснование процесса решения. Таким способом описываются приемы решения первых изучаемых классов уравнений. В частности, это характерно для уравнений 1-й степени с одним неизвестным. Методика изучения этих уравнений состоит в предъявлении алгоритма решения таких уравнений и разборе нескольких типичных примеров.

Указанный алгоритм формируется, естественно, далеко не сразу. Перед этим разбирается несколько примеров, причем цель рассмотрения состоит в выделении в последовательности действий нужных для описания алгоритма операций. Объяснения учителя могут быть такими: «Нужно решить уравнение $5x+4=3x+10$. Постараемся все члены, содержащие неизвестное, собрать в одной части, а все члены, не содержащие неизвестное,— в другой части уравнения. Прибавим к обеим частям уравнения число (-4), данное уравнение примет вид $5x=3x+10-4$. Теперь прибавим к обеим частям уравнения $(-3x)$, получим уравнение $5x-3x=10-4$. Приведем подобные члены в левой части уравнения, а в правой вычислим значение выражения; уравнение примет вид $2x=6$. Разделим обе части уравнения на 2, получим $x=3$». Этот рассказ

сопровождается последовательно возникающей на доске записью преобразований:

$$5x+4=3x+10$$
$$5x=3x+10-4$$
$$5x-3x=10-4$$
$$\ldots\ldots$$

Анализируя решение, учитель может прийти к правилам решения уравнений 1-й степени с одним неизвестным. Обратим внимание на некоторые формальные пробелы этого изложения. Прежде всего, в таком рассказе не акцентируется внимание на том, что под действием преобразований уравнение преобразуется в некоторое новое уравнение. Ученики как бы имеют дело все время с тем же уравнением. Если бы упор делался непосредственно на переход от одного уравнения к другому, то это потребовало бы более внимательного анализа представлений, связанных с равносильностью, что как раз не характерно для первых этапов обучения алгебре.

Далее, вопрос о том, все ли корни уравнения найдены, здесь не ставится. Если даже он и возникает по ходу обсуждения процесса решения, то ответ на него, как правило, не дается. Основную роль играют действия по переносу членов из одной части уравнения в другую, группировка подобных членов.

Таким образом, вопросы обоснования решения уравнения стоят на втором плане, а на первом — формирование прочных навыков преобразований. Отсюда можно сделать вывод: на этом этапе проверка найденного корня служит необходимой частью обоснования правильности решения.

Дедуктивное обоснование процесса решения уравнений и неравенств без явного использования понятия равносильности. Разобранное обоснование процесса решения не всегда может быть эффективно использовано при изучении других классов уравнений. Тем или иным способом к изучению материала линии уравнений и неравенств нужно привлекать различные приемы дедуктивного обоснования. Это связано с возрастанием сложности предлагаемых заданий по сравнению с исходным классом (уравнения 1-й степени с одним неизвестным). При этом постоянно приходится опираться на свойства числовой системы и основные понятия теории уравнений (корень уравнения, множество корней уравнения, что значит «решить уравнение»).

При наличии в курсе теоретико-множественных понятий дедуктивное обоснование решения уравнений проводится так: при переходе от рассмотрения уравнения $f=g$ к уравнению $f_1=g_1$ обращается внимание на совпадение множеств корней этих уравнений и этот факт обосновывается при помощи свойств равенства числовых выражений. Например, с этой точки зрения переход от уравнения $3x+2y=5$ к уравнению $y=-1{,}5x+2{,}5$ обосновывается с использованием свойства: если $a=b$ — верное равенство, то $a+c=b+c$ и $ac=bc$ также верные равенства.

При отсутствии теоретико-множественных представлений тот же переход производится тем же, по существу, способом, но с

использованием конкретного решения одного из этих двух уравнений. Рассуждения при этом проводятся так: «Пусть (x_0, y_0) — решение первого уравнения, т. е. $3x_0+2y_0=5$. Пользуясь свойствами **числовых** равенств, данное равенство можно записать в виде $y_0=-1{,}5x_0+2{,}5$, значит, (x_0, y_0) — решение второго уравнения». Так же проверяется обратное заключение.

Внешне различие между двумя способами обоснования (помимо того, что в первом используется термин «множество») проявляется в том, что в первом из них пользуются свойствами равенств с переменными, а во втором — свойствами числовых равенств. Сложность обучения любому из этих способов примерно одинакова.

Переход к дедуктивному обоснованию может производиться на различном материале. Например, в [19] это сделано при изучении линейного уравнения с двумя переменными, в [20] — системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, в [129] — линейного уравнения с одним неизвестным.

Необходимо, однако, отметить, что, каким бы ни был способ обоснования, он не является самоцелью в курсе школьной математики. Цель изучения обоснований (в линии уравнений и неравенств) состоит в обеспечении осознанности процесса решения. После того как она достигнута, дальнейшее использование уже обоснованного приема приводит к формированию навыка, которым учащиеся пользуются в дальнейшем, возвращаясь к обоснованию приема только изредка.

Введение для обоснования решения уравнений, неравенств и их систем понятий равносильности и логического следования. Рассмотренные приемы обоснования опираются на связь линии уравнений и неравенств с числовой системой. Однако последовательное применение этих приемов затруднительно из-за громоздкости рассуждений. Поэтому на определенном этапе изучения содержания курса алгебры происходит выявление общелогической системы обоснований. Уже говорилось о том, что в эту систему входят понятия равносильности и (в ряде пособий) логического следования.

Обратимся к разобранному уравнению $5x+4=3x+10$. С использованием равносильности его решение проводится так: «Поскольку перенос членов уравнения из одной части в другую с изменением знака — равносильное преобразование, то, осуществив его, приходим к уравнению, равносильному данному: $5x-3x=10-4$. Упрощая выражения в левой и правой частях уравнения, получим $2x=6$, откуда $x=3$».

Отметим особенности приведенного решения по сравнению с изложенным ранее. Прежде всего, оно более свернуто, предполагает намного более высокий уровень владения материалом курса алгебры. Поэтому применению такого способа решения уравнений, неравенств и их систем должна предшествовать большая подготовительная работа. Объем предварительного материала зависит от общих методических установок, используемых в учебных пособиях.

Например, в учебниках алгебры для VI—VIII классов под редакцией А. И. Маркушевича понятие о равносильности вводится спустя полтора года после начала изучения систематического курса алгебры. В других курсах оно вводится гораздо позже, в старших классах [23].

В случае отсутствия понятий равносильности и логического следования описание процесса решения также становится постепенно все более сжатым. Отсутствие указанных терминов проявляется в том, что само описание решения не содержит элементов обоснования, которое в этих условиях произвести достаточно сложно. По этой причине в пособиях, где равносильность и логическое следование появляются поздно, сравнительно большое внимание уделяется формированию не общих приемов решения (любых) уравнений, а навыков решения уравнений тех или иных классов.

Использование логической терминологии при описании решений позволяет параллельно с нахождением корней получать также и логическое обоснование. Особенно велика роль логических понятий при итоговом обобщающем повторении курса алгебры и всего курса математики средней школы. Поскольку при этом необходимо выявить структуру крупных частей изученного материала, отсутствует возможность вновь пройти весь путь нахождения приемов решений различных классов уравнений, неравенств и их систем. Логические понятия позволяют не только быстро восстановить путь нахождения таких приемов, но и одновременно обосновать их корректность. Тем самым происходит развитие средств логического мышления учащихся. Учитывая это, на этапах обобщающего повторения целесообразно формулировать свойства равносильности и логического следования в общем виде и иллюстрировать их заданиями, относящимися к различным классам уравнений, неравенств и их систем.

§ 20. Общая последовательность изучения материала линии уравнений и неравенств

1. Основные этапы изучения уравнений, неравенств и их систем. В этом параграфе будут рассмотрены общие черты последовательного изучения материала в линии уравнений и неравенств, отмечены особенности, которые проявляются на различных этапах. Необходимо учитывать два противоположно направленных процесса, сопровождающие обучение. Первый процесс — постепенное возрастание количества классов уравнений, неравенств и приемов их решения, различных преобразований, применяемых в решении. За счет увеличения объема материал как бы дробится, изучение его новых фрагментов затрудняется наличием уже изученных. Второй процесс — установление разнообразных связей между различными классами уравнений, выявление все более общих классов, закрепление все более обобщенных типов преобразований, упрощение описания и обоснования решений.

В результате взаимодействия этих процессов изученный материал должен представляться учащимся в сравнительно компактном виде, не затрудняющем, а, наоборот, облегчающем усвоение нового. Необходимость установления такого взаимодействия обусловливает применяемые в линии уравнений и неравенств методические приемы, в частности распределение материала обучения по ступеням.

Можно выделить четыре основные ступени: независимое изучение основных типов уравнений, неравенств, систем; постепенное расширение количества изученных классов уравнений, неравенств и их систем; формирование приемов решения и анализа уравнений, неравенств и их систем, имеющих широкую область применимости; синтез материала линии уравнений и неравенств. Дадим характеристику этих ступеней.

2. Изучение основных типов уравнений, неравенств, систем. Среди всех изучаемых в курсе математики типов уравнений, неравенств и систем выделяется сравнительно ограниченное количество основных типов. К их числу можно отнести: линейные уравнения с одним неизвестным, линейные неравенства с одним неизвестным, системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, квадратные уравнения и неравенства, простейшие иррациональные и трансцендентные уравнения и неравенства.

Эти классы изучаются с большой тщательностью, для них указывается и доводится до автоматизма выполнение алгоритмов решения, указывается форма, в которой должен быть записан ответ.

Введение каждого нового основного класса уравнений сопровождается введением новой области числовых выражений, входящих в стандартную форму записи ответа. Например, квадратичные иррациональности ($a+b\sqrt{c}$; a, b, $c\in\boldsymbol{Q}$) связываются с решениями квадратных уравнений; логарифмические выражения появляются при решении показательных и логарифмических уравнений; числовые множества вида $\pi/6+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, возникают в связи с тригонометрическими уравнениями. Такое распределение числовых областей в дальнейшем сохраняется на протяжении всего школьного курса математики. Вообще говоря, это не следует считать недостатком методики изучения уравнений и неравенств, поскольку внешние, формальные признаки в записи чисел до некоторой степени помогают учащимся ориентироваться в материале и контролировать получаемый результат.

Вместе с тем, когда материал усвоен, целесообразно изредка предлагать и такие задания, в которых могут возникать нестандартные для данного класса уравнений ответы. Например, подавляющее большинство заданий на решение квадратных уравнений содержит в данных только рациональные числа; при повторении можно предложить и такое задание: $x^2+21x+\sqrt{2}=0$.

Каждый из основных классов уравнений, неравенств, систем требует проведения исследования зависимости результата от коэффициентов, поскольку множества решений у заданий, входящих в один и тот же класс, могут существенно различаться. Для урав-

нений с одним неизвестным (систем уравнений с двумя неизвестными) в качестве меры различия обычно берется количество корней (решений); для неравенств и их систем — простейшие особенности геометрических фигур, изображающих их множества решений на координатной прямой или плоскости. Изредка требуется выяснить положительность или отрицательность корней (если неизвестное одно), принадлежность решений уравнений с двумя неизвестными одной из координатных четвертей.

3. Изучение уравнений, неравенств, систем, сводящихся к основным классам. Каждый из основных классов уравнений, неравенств, систем уравнений имеет четкую, стандартную форму записи. Например, уравнение $x^2+x-1=0$ — квадратное, а уравнение $x^2+x=1$, равносильное первому, квадратным не является.

Смысл выделения основных классов состоит именно в том, что за счет стандартизации формы задания «общего вида» можно записать ответы к заданиям формулой (или привести простое описание процесса решения). При решении текстовых задач алгебраическим методом получаемые модели вовсе необязательно имеют форму, связанную с каким-либо основным классом. Приходится искать способы сведения уравнений и неравенств из более обширной области к этим классам.

В результате длительного развития как элементарной алгебры, так и методики преподавания математики было выделено несколько типов уравнений, неравенств, систем уравнений, сведение которых к основным классам производится особенно просто. Именно эти «вторичные» классы изучаются сразу вслед за изучением основных, причем в тесном взаимодействии с ними. Например, уже при изучении систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными могут быть предложены задания, не имеющие стандартного вида: $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+3y=4x-2. \end{cases}$ Первый шаг в решении таких заданий состоит в том, что они приводятся к стандартному виду заданий основного класса; в нашем случае этот шаг преобразует систему к виду $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x-3y=2. \end{cases}$

Классификация «вторичных» классов уравнений обширнее, чем основных. Она включает, например, уравнения первой степени, биквадратные, алгебраические, иррациональные уравнения. По мере введения этих классов, установления соответствий между ними и основными классами возникают взаимосвязи, которыми пользуются для упрощения процесса решения. Некоторые вторичные классы находятся между собой в отношении включения. Например, класс алгебраических уравнений шире класса биквадратных. Тем не менее далеко не всегда меньший класс теряет свою индивидуальность в большем; он может сохраниться, если существуют методы решения, специфические для него. В частности, биквадратные уравнения имеют особый прием сведения их к квадратным; и термин, и этот прием продолжают сохраняться до окончания школьного курса математики.

4. Формирование общих приемов решения и исследования уравнений, неравенств и их систем. В ходе изучения уравнений, неравенств, систем различных классов становится все более заметной роль общих, универсальных средств решения и исследования. Такие обобщенные средства, приемы можно разделить на три группы. Первая группа состоит из *логических* методов обоснования решения. Используя эти методы (например, равносильные преобразования или логическое следование), переходят от исходных уравнений, неравенств, систем к новым. Такие переходы делаются до тех пор, пока не получаются задания, относящиеся к известным классам. Указанная группа методов была рассмотрена в § 19.

Вторая группа состоит из *вычислительных* приемов, посредством которых производятся упрощения одной из частей данного уравнения или неравенства, проверка найденных корней при помощи подстановки вместо неизвестного, различные промежуточные подсчеты и т. д. Роль вычислительных приемов особенно заметна при выполнении заданий по нахождению приближенных значений корней уравнений. Возможности проведения численных расчетов резко возрастают при использовании вычислительной техники.

В третью группу входят *наглядно-графические* приемы. Большинство этих приемов используют в качестве основы координатную прямую либо координатную плоскость.

Использование координатной прямой позволяет решать некоторые неравенства и системы неравенств с одним неизвестным, а также уравнения и неравенства с модулями. Например, прием решения систем линейных неравенств с одним неизвестным состоит в том, что на координатную прямую наносятся множества решений каждого неравенства, а потом выделяется их общая часть. Решение уравнений и неравенств с модулями связывается с геометрической интерпретацией модуля разности чисел. Например, решение уравнения $|x-a|=b$ сводится к нахождению на координатной прямой точек, удаленных от точки с координатой a на расстояние b.

Использование координатной плоскости позволяет применить графические методы к решению и исследованию уравнений, неравенств и их систем как с одним, так и с двумя неизвестными. Один из самых ярких примеров использования графических методов в курсе школьной математики — прием графического представления системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Этот прием используется, главным образом, для того, чтобы провести исследование этого класса систем. В качестве подготовительного этапа необходимо рассмотреть график линейного уравнения с двумя неизвестными. Построение соответствующего графика осуществляется при помощи преобразования данного уравнения к виду $y=l(x)$, где $l(x)$ — линейная функция, и использования известных фактов о графике линейной функции (график уравнения $x=c$ рассматривается отдельно).

Графические приемы эффективно применяются для изображения результатов исследования там, где чисто аналитическая за-

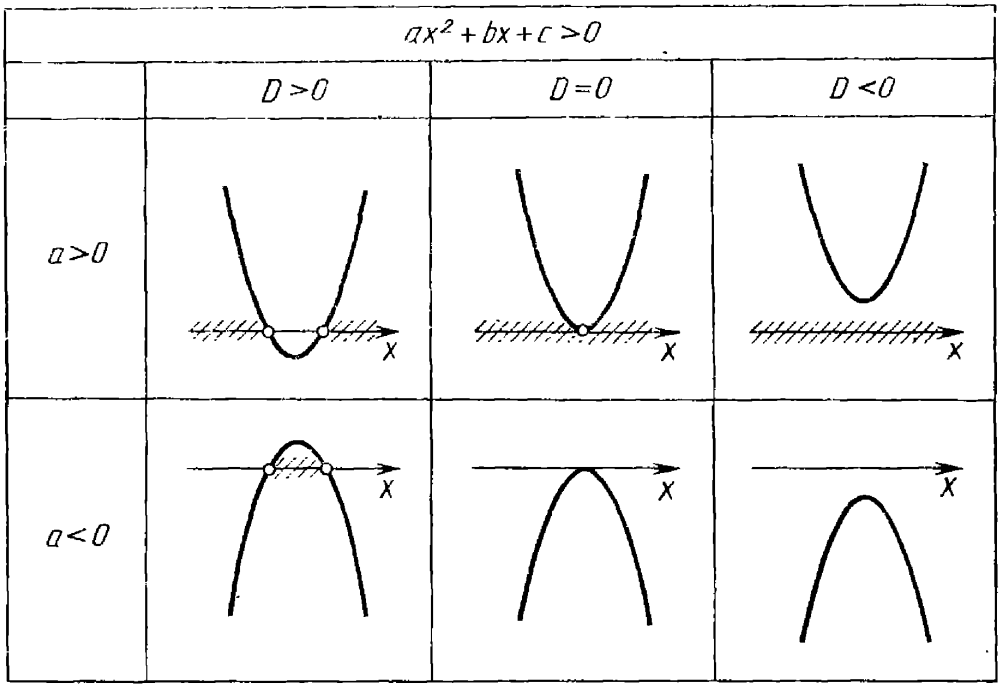


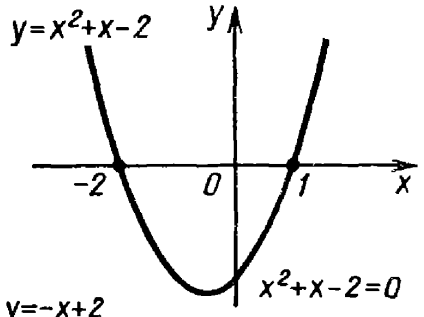
Рис. 34

пись громоздка. Характерным примером служит схема, на которой приведены различные случаи решения неравенства $ax^2+bx+c>0$, помещенная на рис. 34. В результате определенной тренировки учащиеся привыкают пользоваться такой схемой, а затем ее мысленным образом.

Иногда графический метод применяется и для фактического нахождения числовых значений корней или компонентов решений. Например, графический способ решения уравнения с одним неизвестным $f(x)=g(x)$ состоит в нахождении абсцисс точек пересечения графиков функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ (рис. 35); фактически при этом используется графический метод решения системы уравнений $\begin{cases} y=f(x), \\ y=g(x). \end{cases}$ Заметим, что равносильные уравнения могут получать внешне совершенно несхожие графические образы (рис. 36).

Область применения графического метода *решения* уравнений и систем в отличие от *исследования* ограничена, поскольку с его помощью можно рассматривать только задания, в которых требуемые для построения графики хорошо известны, а искомые точки пересечения не выходят за пределы чертежа; кроме того, на отыскание решений влияют неизбежные погрешности чертежа.

Из предыдущего изложения видно, что графические методы, использующие координатную плоскость, могут играть достаточно важную роль в решении и исследовании уравнений и неравенств с одним неизвестным, уравнений и систем уравнений с двумя неизвестными. Роль этого метода в применении к неравенствам с двумя неизвестными (и их системам) иная — здесь он исполь-



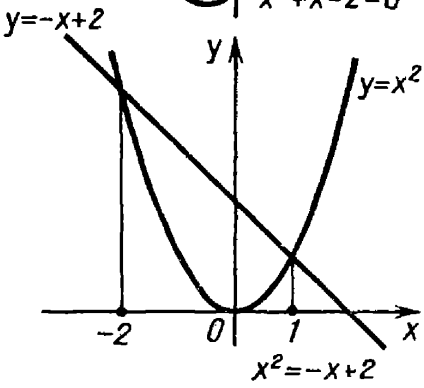
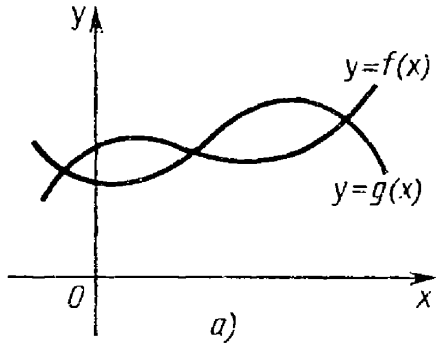
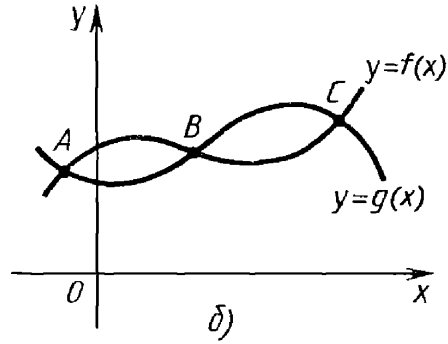


Рис. 35





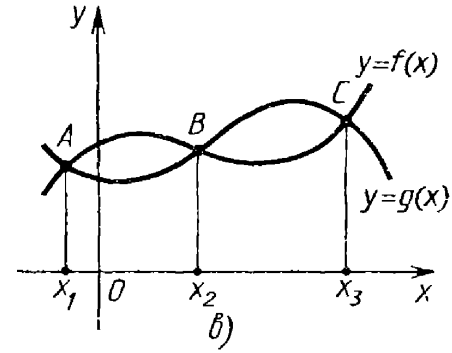


Рис. 36

зуется только для изображения ответа; часто это единственная форма, в которой ответ может быть указан.

Изложенные графические приемы являются важной составной частью координатного метода. Дальнейшему освоению координатного метода способствует расширение запаса геометрических фигур, задаваемых уравнениями или неравенствами (полуплоскость, окружность, круг, гипербола, парабола и т. д.).

5. Синтез материала линии уравнений и неравенств. Последняя ступень в освоении школьной теории уравнений и неравенств относится к организации имеющихся у учащихся знаний и опыта решения уравнений и неравенств в единую, целостную систему. Для этой ступени характерны более сложные задания, в которых возрастает роль таких компонентов, как распознавание возможности сведения задания к одному из типовых классов, организация процесса решения. Здесь существенно производить разбор решаемых заданий, выделять особенности различных классов заданий и их общие черты, отмечать ценность тех или иных применяемых средств.

По своему положению в курсе алгебры эта ступень может быть отнесена к прохождению последних тем курса и к итогово-

му повторению; в результате формируется общая картина связей изученных классов уравнений, неравенств и их систем. Для уравнений и систем уравнений ее можно изобразить в виде схемы (рис. 37).

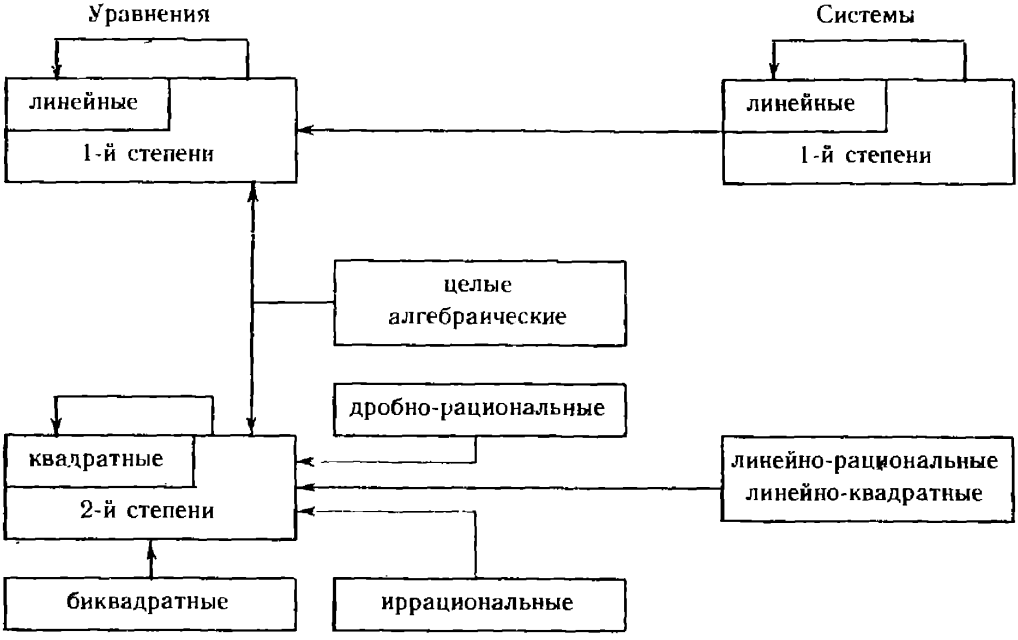


Рис. 37

В курсе математики старших классов учащиеся сталкиваются с новыми классами уравнений, неравенств, систем или с углубленным изучением уже известных классов. Однако это мало влияет на уже сформированную систему; они дополняют ее новым фактическим содержанием, не меняя сложившиеся связи, соединяющие различные классы. На этом, более высоком уровне владения материалом связи становятся намного более освоенными, так что учащиеся в процессе выполнения заданий могут самостоятельно их восстанавливать.

§ 21. Методика изучения основных классов уравнений, неравенств и их систем

1. Различные последовательности изучения материала. В этом параграфе будут рассмотрены вопросы методики изучения наиболее важных классов уравнений, неравенств и их систем. Эти классы можно разбить на две группы. Первая группа — рациональные уравнения, неравенства и системы. Наиболее важными классами здесь являются линейные уравнения с одним неизвестным, квадратные уравнения, соответствующие классы неравенств, системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Вторая группа — иррациональные и трансцендентные уравнения, неравенства и системы. В состав этой группы входят иррациональные,

показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения и неравенства.

Первая группа получает достаточное развертывание, вплоть до формирования прочных навыков решения, уже в курсе алгебры неполной средней школы. Вторая же группа в этом курсе только начинает изучаться, причем рассматриваются далеко не все классы, а окончательное изучение происходит в курсе алгебры и начал анализа. При изучении второй группы приходится опираться на общие понятия и методы, относящиеся к линии уравнений и неравенств. Указанное различие, однако, не является единственным, которое противопоставляет эти две группы. Более существенным является учет особенностей, связанных с развертыванием материала каждой из этих групп. По сравнению с первой группой уравнения и неравенства, входящие в состав второй, в процессе их изучения обнаруживают значительно более сложные связи с другими линиями курса математики — числовой, функциональной, тождественных преобразований и др.

Последовательность изучения различных классов уравнений, неравенств и систем различна в разных учебниках. Однако количество возможных вариантов для последовательности их введения не слишком велико — классы находятся в определенной логической зависимости друг от друга, которая предписывает порядок их появления в курсе. Можно выделить два основных пути развертывания содержания линии уравнений и неравенств.

I путь. Сначала проходится материал, относящийся к уравнениям и их системам, затем к неравенствам. Раздельное изложение проводится до теории квадратного трехчлена включительно. Дальнейшее изучение, происходящее в старших классах, лишено этого противопоставления; логарифмические, показательные, тригонометрические уравнения и соответствующие неравенства изучаются в более тесной связи друг с другом.

II путь. Основные классы неравенств изучаются сразу вслед за изучением соответствующих классов уравнений.

Имеются и промежуточные пути, когда некоторые классы уравнений и неравенств сближены друг с другом по времени изучения, а другие, наоборот, не связаны.

Наличие такого разнообразия подходов затрудняет методическое описание, поскольку принятие того или иного пути требует различных приемов изучения материала. Мы будем придерживаться первого пути, ограничиваясь по отношению к другим отдельными замечаниями.

2. Линейные уравнения с одним неизвестным. Этот класс уравнений — первый в курсе алгебры, поэтому от характера его изучения в значительной мере зависят особенности организации всего последующего изучения линии уравнений и неравенств. При изучении этого класса уравнений, помимо его непосредственного выделения и описания, приходится останавливаться на вопросах, относящихся к формированию общего понятия об уравнении, вводить терминологию.

В § 18 были приведены различные взгляды на содержание понятия уравнения. Было отмечено, что каждый из них имеет определенную ценность в развертывании содержания курса алгебры. Поскольку рассматриваемый класс является первым в курсе, указанные взгляды тем или иным способом должны найти место на этом этапе изучения материала линии уравнений и неравенств.

Первая методическая задача, с которой учитель сталкивается, приступая к изложению этой темы, состоит в выделении формальной части понятия уравнений из той содержательной ситуации, в которой оно возникает. В качестве такой ситуации обычно выступает несложная текстовая задача, решение которой алгебраическим методом приводит к уравнению первой степени с одним неизвестным. Учителю следует обратить внимание учащихся на основной метод, примененный в решении задачи,— *переход к ее алгебраической модели,* общий вид которой $f(x)=g(x)$, где f и g — некоторые выражения, содержащие неизвестное x. Далее, на основе анализа конкретно полученной формулы учитель приводит формулировку общего понятия уравнения, принятую в учебнике, и вводит (или напоминает) связанные с ним термины. Вслед за этим нужно обратить внимание на те формальные характеристики составленного уравнения, которые уже непосредственно приводят к описанию изучаемого конкретного класса уравнений.

В различных учебниках применяется разная терминология, относящаяся, по существу, к одному и тому же классу уравнений. В этом отношении необходимо быть чрезвычайно внимательным и употреблять только те термины, которые введены в учебнике, причем именно в том смысле, который им придается.

Опишем несколько подходов к выделению первого изучаемого в курсе алгебры класса уравнений.

В учебнике [19] это линейные уравнения с одной переменной, т. е. уравнения вида $ax=b$, где x — переменная, a и b — числа. Естественно, что это определение выделяет очень узкий класс уравнений, недостаточный для решения самых простых задач. Какую роль он выполняет? Это роль двоякая. Во-первых, уравнения этого класса просто решаются, причем так описанный класс допускает полное исследование (что и осуществляется в учебнике). Во-вторых, запись уравнений из этого класса играет роль образца, к которому могут быть сведены посредством простейших преобразований уравнения более широкого класса. Большая часть времени, отводимого на изучение линейных уравнений по этому учебнику, используется именно на то, чтобы сформировать навыки сведения к линейным других уравнений, не входящих в этот класс.

В [20] вводится и рассматривается класс уравнений, названный по-иному — уравнения первой степени с одним неизвестным. К особенностям введения этого класса следует отнести то, что явного определения он не получает: определение заменяется описанием и иллюстрацией несколькими примерами. Предполагается, что в итоге их рассмотрения учащиеся получат достаточно ясное представление об объеме понятия. Основное внима-

ние уделяется изложению правил последовательного преобразования уравнения ко все более простому виду. Фактически при этом приходят к уравнению $ax=b$. Этот последний класс уравнений явно не выделяется, но на примерах рассматриваются все возможные случаи решения уравнений из него. Такой подход позволяет сконцентрировать внимание непосредственно на алгоритмах решения уравнений.

В [159] также вводится понятие уравнения первой степени с одним неизвестным и объясняется алгоритм его решения. В отличие от [20] здесь дано явное определение: «Алгебраическое уравнение от одного неизвестного называется уравнением первой степени, если обе его части являются многочленами первой степени относительно неизвестного». По поводу этого определения следует сказать, что по смыслу понятия степени многочлена, введенного в этом учебнике, оно относится к конкретной записи многочлена без приведения подобных членов; например, многочлен $2x+1-(2x-3)$ — первой степени.

В [129] в системе изучения присутствуют оба понятия: и линейного уравнения с одним неизвестным, и уравнения первой степени. Первое из них описывает широкий класс уравнений (левая и правая части уравнения — нуль или многочлены не выше первой степени), а второе — более узкий (уравнение вида $kx+b=0$, $k\neq 0$).

Выделение подкласса уравнений первой степени в классе линейных уравнений в принципе может облегчить изложение этого класса. В частности, введение двух терминов (линейное уравнение, уравнение первой степени) позволяет четче описать сам процесс решения. Однако при этом возникает необходимость в усвоении двух, а не одного термина. Точно так же указание явного определения изучаемого понятия по сравнению с описанием имеет преимущество большей четкости, но предъявляет более высокие требования к развитию логического мышления учащихся.

Охарактеризованные четыре варианта изложения теории уравнений, имеющих вид $ax+b=cx+d$, свидетельствуют о том, что эта теория допускает несколько различных по стилю и методике изучения развертываний. Можно (как это сделано в первом и четвертом случаях) сконцентрировать внимание на выделении более узкого класса, играющего роль «канонического вида», к которому приводятся данные уравнения; но можно (как во втором и третьем случаях) обойтись и без этого, а сразу изучать способы решения уравнений общего класса, используя изученные типы преобразований уравнений. Точно так же можно с разной степенью выявленности описывать вводимые термины: четким определением [19], [129], [160] или же посредством описания [20].

Несмотря на наличие таких разных подходов к введению первого класса уравнений, значительная часть методики его изучения одинакова при любом из них. Это объясняется прежде всего тем, что основной целью изучения в данном случае всегда является освоение правил решения уравнений данного класса, образующих

сравнительно компактную систему и относящихся исключительно к преобразованиям буквенно-числовых выражений. В последнем отношении рассматриваемый класс сильно отличается от большинства других классов, в изучении которых определенную, а иногда значительную роль играют логические, графические, вычислительные компоненты.

При изучении этого класса уравнений учащиеся подходят к осознанию того, что уравнения, с первого взгляда мало отличные друг от друга, могут резко различаться по количеству корней. Это ответственный момент, один из самых существенных в изучении всего курса алгебры, поскольку при этом учащиеся впервые сталкиваются с необходимостью теоретического осмысления именно *класса* уравнений, а не каждого уравнения в отдельности.

Конкретные способы изложения материала, относящегося к исследованию, могут быть различными. Зависят они в первую очередь от стиля выделения этого класса. Если он выделяется явным определением ([19] и др.), то и результаты исследования формулируются в виде четкой системы условий, при выполнении которых имеет место один из трех возможных случаев. Если же этот класс уравнений выделяется посредством описания, то реализация каждого из этих случаев показывается на примерах, но общего обоснования не дается [20].

Отметим еще, что рассматриваемый класс является единственным, для которого в современной методике есть разные подходы к проведению исследований. Для каждого из остальных классов уравнений, неравенств, систем исследование проводится, по существу, одинаково при любом построении курса алгебры. Именно те классы уравнений, неравенств, систем, алгоритмы решения которых заучиваются при усвоении материала, исследуются аналогично первому способу; для тех классов, где результирующих формул для получения ответа не указывается, используется второй способ.

В итоге тематического изучения первого класса уравнений учащиеся должны овладеть: алгоритмом решения уравнений данного класса; умением применять результаты исследования уравнений данного класса; основными понятиями общей теории уравнений; применением уравнений данного класса к решению текстовых задач.

3. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. С помощью линейных уравнений с одним неизвестным можно решать многочисленные задачи, в которых либо имеется только одно неизвестное, либо среди неизвестных можно указать одно «ведущее», через которое выражаются остальные. Но многие ситуации описываются несколькими параметрами, вообще говоря, равноправными друг другу; эти ситуации требуют разработки новых алгебраических средств их изучения. В качестве одного из таких средств в курсе алгебры выступает класс систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Приведенное рассуждение может быть положено в основу методики изучения указанного класса, которая реализована, например, в [20]. Такой способ введения подчеркивает прикладную

значимость уравнений с двумя неизвестными. Однако изучение этого класса требует введения обширной совокупности формальных понятий и методов, поэтому отмеченная схема изложения, в которой проводится содержательная мотивировка данного класса, не единственный способ изложения этого материала.

Изложение темы можно начать с рассмотрения понятий, входящих в качестве компонентов в понятие системы линейных уравнений с двумя неизвестными; их соединение формирует представление о данном классе. Эти компоненты таковы: представление о конъюнкции логических условий, которое формализуется в понятии системы уравнений; представление о наличии в составе логического условия двух переменных; представление о линейном уравнении с двумя неизвестными, непосредственно связанное с данным классом систем.

Рассмотрим эти компоненты подробнее. Полезность изучения понятия *уравнения с двумя неизвестными* перед введением понятия о системе уравнений заключается в том, что при этом могут быть рассмотрены два важных в дальнейшем вопроса: выражение одного из неизвестных через другое (это преобразование используется при изучении метода подстановки) и введение понятия графика уравнения с двумя неизвестными.

Существенно новым представлением, которое получают учащиеся при изучении этой темы, является представление о том, что решением уравнения с двумя неизвестными служит не число, а упорядоченная пара чисел. Вторым представлением, резко расширяющим кругозор учащихся, служит то, что множество решений уравнения с двумя неизвестными, как правило, бесконечно и его изображение на координатной плоскости — некоторая линия.

Изучение этой темы может рассматриваться как определенный мостик, связывающий понятие функции и понятие уравнения с двумя неизвестными: с одной стороны, уравнение с двумя неизвестными, в котором одно из них выражено через другое, по виду формулы совпадает с функцией; с другой — оказывается, что один и тот же геометрический образ является и графиком уравнения, и графиком функции. Эти первые представления в дальнейшем подвергаются неоднократному уточнению и переосмысливанию, но уже и в таком несовершенном виде они с успехом используются при изучении систем уравнений.

Тема «Уравнение с двумя неизвестными» в случае наличия ее в курсе изучается недолго. Цель ее изучения состоит скорее во введении новых представлений, чем в развитии навыков.

Непосредственно за ней или на ее месте рассматривается тема «Линейные уравнения с двумя неизвестными». Этот класс изучается детальнее. Здесь необходимо приобрести навыки перехода от линейного уравнения $ax+by=c$ к уравнению $y=kx+b$ или $x=k_1y+b_1$. Кроме того, требуется усвоить факт: график линейного уравнения $ax+by=c$, где $a\neq 0$ или $b\neq 0$, есть прямая линия, а также научиться строить график коикретных линейных уравнений с двумя неизвестными.

Непосредственно перед изучением систем линейных уравнений может быть введено понятие о *системе уравнений* с двумя неизвестными. Но здесь необходимы некоторые уточнения. Понятие системы уравнений в курсе школьной математики строго определено быть не может из-за отсутствия в нем понятия конъюнкции. Однако для развития теории уравнений достаточно оказывается формировать представление о системе уравнений косвенным образом, посредством указания на цель — нахождение общих решений двух данных уравнений. Заметим, что общее понятие о системе уравнений в этот момент и необязательно вводить (такой подход проведен в [20]). Общее понятие формируется постепенно на основе своего ведущего частного случая — системы линейных уравнений,— который и составляет непосредственный предмет изучения. Фактически получается так, что понятие о системе уравнений формируется у учащихся на основе осмысления понятия «решение уравнения» и представления о том, что значит решить уравнение.

Переход к изучению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными целесообразно осуществить при помощи того же процесса выделения математических понятий из текстовой задачи, который был использован в изучении первого класса уравнений. Если реализуемая в учебнике методическая система не содержит пропедевтики этого понятия, такой подход является единственно возможным [20]. Однако даже и при наличии подготовки он позволяет уточнить формальные характеристики вводимого класса систем уравнений и подчеркнуть некоторые существенные моменты: например, что решением системы является не одно число, а пара чисел.

Основное содержание рассматриваемой темы состоит в изучении двух алгебраических способов решения таких систем, графического способа решения и исследования систем этого класса.

Отметим наиболее важные отличия в изучении этого материала от изучения класса линейных уравнений с одним неизвестным.

Алгоритмы решения систем линейных уравнений намного сложнее алгоритма решения линейного уравнения с одним неизвестным. Поэтому при их изучении учитель должен четко указывать последовательность операций, используемых в этих алгоритмах, а также провести изучение каждого действия. Эти алгоритмы, по существу, являются первым нетривиальным примером алгоритма в линии уравнений и неравенств.

В развертывании содержания данной темы используются геометрические представления, которые не только в ряде мест могут пояснить изложение, но имеют важное самостоятельное значение. Наиболее принципиальным является их применение для проведения исследования данного класса систем. Возможны различные уровни развертывания этого материала — от иллюстраций, поясняющих смысл различных типов множеств решений, и до использования геометрических представлений для выведения аналитических условий, определяющих каждый случай.

Второй, более высокий уровень в современном школьном курсе алгебры обычно не достигается.

4. Квадратные уравнения. Для этой темы характерна большая глубина изложения и богатство устанавливаемых с ее помощью связей в обучении, логическая обоснованность изложения. Поэтому она занимает исключительное положение в линии уравнений и неравенств. К изучению этой темы учащиеся приступают, уже накопив определенный опыт, владея достаточно большим запасом алгебраических и общематематических представлений, понятий, умений. В значительной мере именно на материале этой темы осуществляется синтез материала, относящегося к уравнениям.

Во всех современных школьных учебниках алгебры и термин, и объем понятия квадратного уравнения одинаковы. Понятие вводится посредством явного определения, что обязывает организовать работу по усвоению его формальных признаков. Это тем более необходимо, что соответствующие признаки существенно используются при построении теории квадратных уравнений, в частности при выводе формулы корней и в теореме Виета.

Вывод формулы корней квадратного уравнения может быть осуществлен несколькими различными способами: сразу для общего или сначала для приведенного квадратного уравнения, сведением к уравнению $x^2-a=0$ или к уравнению $x^2=a$. Но в любом случае приходится использовать выделение полного квадрата в трехчлене ax^2+bx+c, сводящее уравнение к двучленному. Выделение последовательности шагов, приводящих к решению квадратных уравнений, проводится сначала на конкретных примерах.

Необходимым этапом при выводе формулы корней квадратного уравнения служит исследование, выявляющее три возможных случая: отсутствие корней, наличие одного или двух корней. При этом вводится дискриминант уравнения. В результате исследования формулируется вывод: «Если дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ отрицателен, то оно не имеет действительных корней; если дискриминант равен нулю, то имеется один корень, равный $-\frac{b}{2a}$; если дискриминант положителен, то уравнение имеет два корня $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$».

Учитывая этот вывод, решение конкретных квадратных уравнений проводится следующим образом: сначала вычисляется дискриминант, сравнивается с нулем, и если он неотрицателен, то применяются формулы для нахождения корней.

В ряде учебников, кроме основной формулы для корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, приводятся еще формулы корней уравнения $x^2+px+q=0$ или $x^2+2px+q=0$. Иногда использование этих формул упрощает вычисления, при наличии времени полезно их рассмотреть.

При изучении темы «Квадратные уравнения» рассматриваются и неполные квадратные уравнения. Обычно они изучаются перед выводом корней общего квадратного уравнения. Хотя различные

виды неполных квадратных уравнений имеют разные алгоритмы решения, при изучении данной темы необходимо показать, что общая формула корней применима и для этих случаев.

Важным моментом в изучении квадратных уравнений является рассмотрение теоремы Виета, которая утверждает наличие зависимости между корнями и коэффициентами квадратного уравнения. Сложность освоения теоремы Виета связана с несколькими обстоятельствами. Прежде всего требуется учитывать различие прямой и обратной теоремы. В прямой теореме Виета даны квадратное уравнение и его корни; в обратной — только два числа, а квадратное уравнение появляется в заключении теоремы. Учащиеся часто совершают ошибку, обосновывая свои рассуждения неверной ссылкой на прямую или обратную теорему Виета. Например, при нахождении корней квадратного уравнения подбором ссылаться нужно на обратную теорему Виета, а не на прямую, как часто делают учащиеся. Для того чтобы распространить теоремы Виета на случай нулевого дискриминанта, приходится условиться, что в этом случае квадратное уравнение имеет два равных корня. Удобство такого соглашения проявляется при разложении квадратного трехчлена на множители.

Владение теорией квадратных уравнений существенно расширяет возможности решения уравнений методами, изучаемыми в курсе алгебры. Так, прямо сводятся к квадратным дробно-рациональные уравнения вида $\frac{a}{x-b}+\frac{c}{x-d}=k$ и биквадратные уравнения. Еще один класс составляют алгебраические уравнения, которые разложением на множители могут быть сведены к линейному и квадратному уравнениям. Богатство и разнообразие приемов, имеющихся у учащихся, овладевших сведением различных уравнений к квадратным, служат необходимой предпосылкой перехода к завершающему этапу освоения методов решения уравнений. Особенно это сказывается на приложении к алгебраическому методу решения текстовых задач. Сюжеты их становятся более разнообразными, возрастает также сложность перевода на язык математики. В целом можно сказать, что освоение темы «Квадратные уравнения» поднимает учащихся на качественно новую ступень овладения содержанием школьной математики.

5. Особенности изучения неравенств. В целом изучение неравенств в школьном курсе математики организовано так же, как и уравнений. В частности, они проходят те же этапы изучения (см. § 20, п. 1 и 2). Не рассматривая здесь уже описанные общие закономерности, отметим ряд особенностей изучения неравенств.

1) Как правило, навыки решения неравенств, за исключением квадратных, формируются на более низком уровне, чем уравнений соответствующих классов. Эта особенность имеет объективную природу: теория неравенств сложнее теории уравнений. Отмеченное обстоятельство отчасти смягчается другими особенностями изучения неравенств, поэтому в целом можно считать, что содержатель-

ная сторона неравенств, возможности их приложений от этого не страдают.

2) Большинство приемов решения неравенств состоит в переходе от данного неравенства $a \gtrless b$ к уравнению $a=b$ и последующем переходе от найденных корней уравнения к множеству решений исходного неравенства. Пожалуй, такого перехода не производится лишь при рассмотрении линейных неравенств, где в нем нет необходимости из-за простоты процесса решения таких неравенств. Эту особенность необходимо постоянно подчеркивать, с тем чтобы переход к уравнениям и обратный переход превратились в основной метод решения неравенств; в старших классах он формализуется в виде «метода интервалов».

3) В изучении неравенств большую роль играют наглядно-графические средства.

Указанные особенности могут быть использованы для обоснования расположения материала, относящегося к неравенствам, количества заданий, необходимых для усвоения программного минимума.

Приведем примеры. Первая особенность может быть истолкована так: при выполнении одного и того же числа упражнений техника решения неравенств какого-либо класса будет ниже, чем уравнений соответствующего класса; следовательно, если имеется необходимость формирования прочных навыков решения неравенств, то для этого требуется большее число заданий. Вторая особенность объясняет то, что темы, относящиеся к неравенствам, расположены после тем, относящихся к соответствующим классам уравнений. В соответствии с третьей особенностью изучение неравенств зависит от качества изучения функциональной линии школьного курса (построение графиков и графическое исследование функций, см. гл. 8).

Перечисленные особенности показывают, что изучение предшествующего материала сильно влияет на изучение неравенств. Поэтому роль IV этапа в изучении неравенств особенно возрастает (этап синтеза, см. § 20, п. 5).

Проиллюстрируем указанные особенности на материале квадратных неравенств. Изучение этого раздела курса следует за изучением квадратного уравнения и квадратного трехчлена. К моменту его изучения учащиеся умеют строить графики квадратичной функции, причем на них отмечаются нули функции, если они существуют. Поэтому переход к рассмотрению квадратных неравенств можно осуществить как переход от неравенства $ax^2+bx+c>0$ к построению и изучению графика функции $y=ax^2+bx+c$. Поскольку возможны различные случаи расположения графика относительно оси абсцисс, лучше начать с рассмотрения конкретного задания, для которого соответствующий квадратный трехчлен имеет различные корни. На этом примере устанавливается соответствие между двумя задачами: «Решить неравенство $ax^2+bx+c>0$»; «Найти значения аргумента, для которых значения функции $y=ax^2+bx+c$ положительны». Посредством этой связи

производится переход к построению графика функции. Нули этой функции разбивают ось абсцисс на три промежутка, в каждом из которых она сохраняет знак, поэтому ответ считывается прямо с чертежа. Другие случаи решения квадратных неравенств (у квадратного трехчлена ax^2+bx+c не больше одного корня) требуют дополнительного рассмотрения, но опираются на то же соответствие.

В процессе дальнейшего изучения устанавливается, что нет нужды в точно вычерченном графике квадратного трехчлена, достаточно наметить только положение корней, если они есть, и учесть на эскизе нужные особенности графика (направление ветвей параболы).

В школьном курсе математики ограничиваются изучением только неравенств основных классов; задания, которые требуют сведения к основным классам, встречаются сравнительно редко. Например, не изучаются биквадратные неравенства.

Из числа типов заданий, в которых проявляется прикладная роль неравенств в курсе алгебры, отметим нахождение области определения функции и исследование корней уравнений в зависимости от параметров.

6. Иррациональные и трансцендентные уравнения и неравенства. Определения различных классов иррациональных и трансцендентных уравнений и неравенств, которые приводятся в школьных учебниках, обычно имеют вид: «Уравнение (или неравенство) называется иррациональным (показательным и т. д.), если оно содержит неизвестное под знаком корня (в показателе степени и т. д.)». Несмотря на формальную расплывчатость, определения такого типа достаточны для того, чтобы указать некоторую область, уравнения или неравенства из которой решаются способами, изучаемыми при прохождении соответствующей темы. В каждом из таких классов можно указать подклассы простейших уравнений или неравенств, к которым и сводится решение более сложных заданий. Например, для иррациональных уравнений это уравнения вида $\sqrt[k]{x}=a$; для тригонометрических — вида $\cos x=a$ и т. д.

Каждый простейший класс тесно связан с классом соответствующих функций; по существу, формулы решений и исследование простейших уравнений и неравенств здесь опираются на свойства функций. В начале изучения каждого простейшего класса учащимся приходится преодолевать трудности, связанные с освоением специфической символики, в частности узнавать новые формы записи чисел и числовых областей, в которых должен быть получен ответ к заданию. При решении заданий часто используются наряду с известными специфические для соответствующего класса функций тождества (см. гл. 5). Значительно чаще, чем в предшествующей части курса, в решении уравнений и неравенств используются неравносильные преобразования, широко используются подстановки. Поэтому весь этот материал требует в еще большей мере, чем изучение квадратных уравнений, достаточной логической грамотности учащихся.

Специфика иррациональных уравнений. Здесь применяется характерное преобразование — «освобождение неизвестного из-под знака корня», обычно состоящее в возведении обеих частей уравнения в одинаковую степень. Необходимо довести до понимания учащихся причины возможного появления при этом посторонних корней. Они появляются при возведении в четную степень, так как получаемое при этом уравнение — логическое следствие данного, но может быть и неравносильным ему. Например, уравнение $\sqrt{x}=x-2$ имеет один корень $x=4$, а уравнение $x=(x-2)^2$ имеет два корня $x_1=1$, $x_2=4$; первый из них является корнем уравнения $\sqrt{x}=-(x-2)$.

Кроме того, посторонние корни могут появиться при переходе к выражениям с большей областью определения. Например, область определения уравнения $\sqrt{x^2-20}=\sqrt{8x}$ состоит из чисел $x\geqslant\sqrt{20}$; при возведении в квадрат обеих его частей получается уравнение, определенное при всех значениях x, и из двух его корней $x_1=-2$, $x_2=10$ только второй — корень исходного уравнения.

При решении таких уравнений возможны два пути. Первый состоит в переходе от уравнения к его следствию и проверке корней полученного уравнения подстановкой в исходное. Второй — использование равносильных преобразований, но при этом приходится переходить к системам. Пример:

$$\sqrt[2k]{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g^{2k}(x),\\ g(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

На простых примерах полезно проводить сравнение этих двух способов.

Специфика трансцендентных уравнений и неравенств. При рассмотрении различных классов трансцендентных уравнений и неравенств необходимо уделять достаточное внимание формированию навыка применения тождеств для преобразования данных уравнений или неравенств. Особенно ярко это проявляется в тригонометрии, поэтому при изучении тригонометрических уравнений и неравенств большое значение приобретают задания и системы вопросов, связанные с распознаванием применимости того или иного тождества, возможности приведения уравнения или неравенства к определенному виду. В частности, полезны задания типа: «Изложить план решения данного уравнения».

Здесь, как и при решении иррациональных уравнений, значительные трудности связаны с тем, что некоторые тождества, используемые в преобразованиях, приводят к изменению области определения. К числу таких тождеств относятся, например, такие: $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$; $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$; $\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $1=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. Использование этих тождеств слева

направо может привести к потере корней, а справа налево — к появлению посторонних корней. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить неравенство $\log_2(x-2)<1-\log_2(x-3)$.

Решение. $\log_2(x-2)<1-\log_2(x-3) \Leftrightarrow \log_2(x-2)+$

$+\log_2(x-3)<1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2((x-2)(x-3))<1, \\ x-2>0, \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<(x-2)(x-3)<2, \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4<0, \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<4, \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3<x<4.$

Ответ: $3<x<4$.

Здесь учет ограничений при использовании тождества для логарифма произведения выполнен при втором переходе, в результате чего неравенство преобразовалось в систему неравенств, из которых два последних позволяют сохранить исходную область определения неизменной.

В результате выполнения аналогичных заданий можно сделать вывод: если приходится пользоваться преобразованиями, расширяющими область определения, то для сохранения равносильности необходимо дополнительно ввести ограничения, сохраняющие исходную область определения неизменной.

Пример 2. Решить уравнение $3\sin x-5\cos x=5$.

Решение. Воспользовавшись универсальной подстановкой, сведем данное уравнение к уравнению $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{5}{3}$, откуда $x=2\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. Однако эта подстановка сужает область определения — исключаются числа вида $\pi+2\pi k$. Поэтому необходимо проверить, есть ли среди них корни уравнения. Проверка показывает, что все они корни.

Хотя преобразования, сужающие область определения, встречаются в школьной практике нечасто, но и для них необходимо отметить общий вывод. Он может быть сформулирован так: если используемое преобразование сужает область определения задания, то в числовом множестве, исключенном этим преобразованием, необходимо выделить корни исходного задания (уравнения или неравенства).

Особенности тригонометрических уравнений и неравенств. В отличие от иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств, где в каждом классе имеется по одному типу простейших, здесь приходится рассматривать три (а в некоторых учебниках и четыре) типа простейших уравнений: $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$ ($\operatorname{ctg} x=a$) — и соответствующие типы неравенств. Изучение этих типов уравнений требует введения новых функций — обратных тригонометрических функций, что представляет собой самостоятельную сложную задачу. Кроме того, приходится рассматривать наряду с общими формулами решения многочисленные частные случаи. Например, для уравнения $\sin x=a$ к числу основных для усвоения фактов относятся: а) знание общей формулы корней $x=(-1)^k\arcsin a+\pi k$, $k\in Z$, и условия $|a|\leqslant 1$, указывающего на наличие корней; б) владение частными случаями этого уравнения для

$a=0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) владение геометрическим смыслом решения на координатной плоскости (и на координатной окружности при использовании учебника [27]).

Широкое использование графиков составляет заметную черту изучения простейших классов тригонометрических уравнений и неравенств. Графическая наглядность позволяет смягчить недостаточно уверенное владение учащимися обратными тригонометрическими функциями, которые, по существу, только здесь и применяются. В решении неравенств роль графиков особенно велика, причем изучаются в школьном курсе только простейшие типы неравенств.

Тригонометрические уравнения изучаются с большей глубиной, здесь изучение доводится до выделения нескольких стандартных методов решения, укажем два из них.

а) Сведение тригонометрических уравнений к алгебраическим вида $f(y)=0$, где y — одна из основных тригонометрических функций.

б) Различные приемы решения важных частных классов уравнений. К их числу относится, например, метод введения вспомогательного аргумента, используемый при решении уравнения $a\sin x+b\cos x=c$.

Содержание линии уравнений и неравенств развертывается на протяжении всего школьного курса математики. Учитывая важность и обширность материала этой линии, еще раз отметим целесообразность на заключительных этапах обучения предлагать достаточно разнообразные и сложные задания, рассчитанные на активизацию наиболее существенных компонентов этой линии, основных понятий и основных приемов решения, исследования и обоснования заданий.

Глава 7. ТЕКСТОВЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 22. Пропедевтика алгебраического метода решения текстовых задач

Решение текстовых задач способствует развитию мышления учащихся, более глубокому усвоению идеи функциональной зависимости, повышает вычислительную культуру. В процессе решения текстовых задач у учащихся формируются умения и навыки моделирования реальных объектов и явлений.

В курсе математики IV—VIII классов рассматриваются два основных способа решения текстовых задач: арифметический и алгебраический. Арифметический способ состоит в нахождении значений неизвестной величины посредством составления числового выражения (числовой формулы) и подсчета результата. Алгебраический способ основан на использовании уравнений и систем уравнений, составляемых при решении задач.

Остановимся на некоторых основных вопросах пропедевтической работы по составлению уравнений при решении текстовых задач.

Такая работа в основном осуществляется в IV—V классах, хотя простейшие задачи уже решались этим методом в I—III классах.

Здесь можно выделить два основных этапа. На первом задача учителя состоит в том, чтобы систематически и целенаправленно формировать у учащихся некоторые важные общеучебные и математические навыки. На втором этапе основное внимание должно быть уделено выявлению зависимостей между величинами, входящими в текст задачи, и обучению переводу этих зависимостей на математический язык. Остановимся на каждом этапе подробнее.

Первый этап пропедевтики. К наиболее важным умениям, которые необходимо сформировать у учащихся на этом этапе изучения текстовых задач, относятся следующие: умение внимательно читать текст задачи; умение проводить первичный анализ текста задачи — выделять условие и вопрос задачи; умение оформлять краткую запись текста задачи; умение выполнять чертежи (рисунки) по тексту задачи.

В методике обучения математике разработаны соответствующие приемы работы учителя по формированию выделенных умений (З. П. Матушкина).

Приемы, формирующие умение читать текст задачи:

— показ образцов правильного чтения задачи;

— проведение специальной работы над текстом задачи по усвоению ее содержания. Здесь имеются в виду различные формы предъявления задачи: текстом, краткой записью текста, рисунком. Сюда включаются также приемы работы над усвоением содержания задачи: изменение числовых данных задачи; изменение сюжета задачи; изменение сюжета и числовых данных задачи.

Приемы, формирующие умения выделять условие и вопрос задачи:

— выявление роли вопроса в нахождении способа решения задачи; обращение внимания на точность, ясность формулировки вопроса задачи; переформулировка вопроса задачи. Этот прием направлен на воспитание у учащихся потребности выделять условие и вопрос задачи;

— формулирование одного или нескольких вопросов к условию задачи;

— нахождение необходимых данных для ответа на вопрос задачи;

— составление задачи по вопросу; формулирование одной или нескольких задач по данному вопросу.

Приемы обучения оформлению краткой записи текста задачи:

— оформление краткой записи в виде таблицы, схемы;

— оформление краткой записи в строку (столбец);

— чтение краткой записи задачи;

— составление задачи по ее краткой записи.

Приемы обучения выполнению чертежей (рисунков) по тексту задачи. Основные из них следующие:

— предъявление заданий, требующих только выполнения соответствующего рисунка;

— чтение рисунка, выполненного по тексту задачи;

— составление задачи по рисунку или чертежу.

Сделаем некоторые пояснения к приемам оформления чертежей по тексту задачи. Выполненный чертеж (рисунок) по тексту за-

дачи позволяет фиксировать ход рассуждений при ее решении, что способствует формированию общих подходов к решению задач. Поэтому к выполнению чертежей предъявляются требования: они должны быть наглядными, четкими, соответствовать тексту задачи; на них должны быть отражены по возможности все данные, входящие в условие задачи; выделенные на них данные и искомые должны соответствовать условию задачи и общепринятым обозначениям.

Формирование умения выполнять чертеж задачи будет успешным, если учащиеся будут уметь читать соответствующий чертеж. В связи с этим важным моментом является составление текста задачи по чертежу, рисунку. В результате выполнения таких упражнений формируются навыки перевода графических данных на словесный текст.

Второй этап пропедевтики. Важным моментом здесь является обучение пониманию учащимися способов словесного выражения изменения величин и фиксация их в виде математических выражений или уравнений (см. [100]). Достигается это с помощью соответствующих упражнений. Например, при изучении действий умножения натуральных чисел в IV классе учащиеся рассматривают одно из применений умножения — увеличение числа в несколько раз. Здесь для достижения указанной цели возможны следующие упражнения:

1) Отец старше сына в 4 раза. Сколько лет отцу, если сыну m лет? ($4\ m$.)

2) На первых двух полках стоит по n книг на каждой, а на третьей — m книг. Сколько книг на трех полках? ($2n+m$.)

3) Сравните a и c, если $a=5c$. (a больше c в 5 раз или c меньше a в 5 раз.)

4) Составьте равенство, исходя из условия: x больше y в n раз. ($x=ny$.)

5) Составьте задачу по уравнению $2x=28$. (Например: «В корзине было несколько грибов. После того как в нее добавили столько же, в ней стало 28 грибов. Сколько грибов было в корзине?»)

Аналогичные упражнения могут быть предложены учащимся также при изучении других арифметических действий.

Сложность подобных упражнений должна быть посильной для учащихся, а число их — достаточным для формирования соответствующих умений и навыков.

В методике обучения решению задач предлагаются также другие системы упражнений для достижения поставленной цели. Например, рассматриваются конкретные текстовые задачи и после прочтения их текстов учащимся предлагается ответить на ряд вопросов [39]. Раскроем содержание этого приема на нескольких задачах.

З а д а ч а 1. Теплоход «Метеор» за час проходит расстояние в 5 раз большее, чем катер. Сколько километров в час проходит каждый из них, если сумма их скоростей равна 90 км/ч?

З а д а н и я. 1) Назовите величины, которые связаны зависимостями: а) одна больше другой в 5 раз; б) одна меньше другой в 5 раз. 2) Если катер проходит x км/ч, то как можно истолковать выражения: $5x$; $5x+x$? Значение какой из представленных здесь величин известно по условию задачи?

З а д а ч а 2. Футбольная команда школьников выиграла на ... состязаний..., чем проиграла. Число проигранных состязаний в ... числа состязаний, проведенных вничью. Сколько проведено состязаний, если ничьих было на ..., чем проигрышей?

З а д а н и е. Используя справочный материал, заполните пропуски в тексте задачи. Справочный материал: команда школьников выиграла 16 состязаний, проиграла 6 и свела вничью 2.

З а д а ч а 3. На школьной математической олимпиаде было предложено 8 задач. За каждую решенную задачу засчитывалось 5 очков, а за каждую нерешенную задачу списывалось 3 очка. Сколько задач правильно решил ученик, если он получил 24 очка?

З а д а н и е. Установите, к решению каких из приведенных ниже уравнений сводится решение предложенной задачи:

а) $5x-3(8-x)=24$; в) $5(8-x)-3x=24$; д) $3y=24$;
б) $5x=24$; г) $5x-3(8+x)=24$; е) $5x+3(8-x)=24$.

З а д а ч а 4. С противоположных концов катка длиной 180 м бегут навстречу друг другу два мальчика. Через сколько секунд они встретятся, если начнут бег одновременно и если один пробегает 9 м/с, а другой 6 м/с?

З а д а н и е. Дополните приведенные ниже выражения до уравнения, к которому сводится решение задачи: а) $9x+...=180$; б) $180 ...=6x$; в) $...9x=...$.

Заметим, что задания к задачам не требуют решения исходных задач. Причем четко выделяются две группы заданий: первая группа (задачи 1 и 2) направлена на формирование умения видеть всевозможные зависимости между величинами, входящими в задачу; вторая группа (задачи 3 и 4) формируют умение видеть в математическом выражении или формуле определенное содержание, т. е. математическую модель.

Изложенная система пропедевтической работы учителя по обучению решению текстовых задач показывает, что эти задачи выступают не только как цель и средство, но и как предмет изучения. Это соответствует той важной роли, которая отводится им в курсе математики.

В IV—V классах учащиеся решают также текстовые задачи на все действия с натуральными и дробными числами, на зависимость между компонентами и результатами действий. Эти задачи и методы их решения имеют важное методическое значение. Прочное усвоение методов решения «чисто арифметических» задач позволяет подготовить учащихся к осознанному решению задач методом составления уравнений. Тем самым, этот вид задач можно рассмотреть в связи с прикладной направленностью курса школьной математики (пропедевтика представления о математическом моделировании).

§ 23. Основы методики обучения решению задач методом составления уравнений

В каждой текстовой задаче отражается одна или несколько связанных между собой ситуаций, формализуемых некоторым основным отношением. Типичным примером такого отношения является формула $a \cdot b = c$, имеющая большое число разнообразных проявлений (связь пройденного пути, времени и скорости равномерного движения; связь цены, стоимости и количества изделий и т. д.). Действия по распознаванию таких ситуаций, их сопоставлению и преобразованию выражающих их формул — основная часть работы по составлению математических моделей текстовых задач.

Задача 1. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух поселков, расстояние между которыми 76 км. Через 2 ч они встретились. Какова скорость каждого велосипедиста, если известно, что скорость одного из них на 3 км/ч меньше скорости другого?

В данной задаче описывается равномерное движение велосипедистов. Значит, задача (явно или неявно) содержит три физические величины: скорость движения v, время движения t и пройденный путь s. Существенным для задачи является то, что зависимость между этими величинами выражается формулой $v \cdot t = s$.

Если отвлечься от конкретного содержания задачи, то, обозначив первую величину буквой a, вторую — буквой b и третью — c, получим зависимость между ними, выражаемую равенством $ab = c$. Это есть основное отношение, реализованное в задаче, где a — первый, b — второй и c — третий его компоненты.

В предложенной задаче описываются две ситуации: равномерное движение первого велосипедиста и равномерное движение второго велосипедиста до момента встречи. При этом каждая из двух ситуаций формализуется основным отношением $ab = c$, определенным на предметной области задачи. Ситуация, формализуемая в задаче основным отношением, является элементом структуры задачи, при этом она минимальный компонент, обладающий свойствами целого (т. е. задачи).

Приведенные соображения позволяют сделать вывод о том, что при поиске решения данной задачи нужно учесть обе ситуации, которые в ней описаны. Опыт преподавания математики в школе показывает, что эффективной наглядной моделью поиска решения текстовых задач алгебраическим методом является табличная форма записи тех отношений, которые включают данные, искомые, условия и требования задачи.

Пусть в данной задаче a — скорость движения (км/ч), b — время движения (ч), c — пройденное расстояние (км); величины a, b, и c связаны отношением $ab = c$.

Обозначим через x (км/ч) скорость первого велосипедиста.

Тогда модель поиска решения задачи можно представить следующей таблицей:

Величины	Велосипедист			
	I		II	
Скорость, км/ч	x	$<$	$x+3$	На 3
Время, ч	2	|	2	
Расстояние, км	$2x$	$+$	$2(x+3)$	$=76$

Исходя из табличной записи, получаем уравнение $2x+2(x+3)=76$.

Анализ задачи, ее мысленное расчленение на составные части, выполняется путем вычленения данных и искомых с учетом отношений между ними, указанных в тексте. С другой стороны, основное отношение, реализованное в таблице, направляет ученика на то, чтобы выделенные в ходе анализа выражения мысленно объединить в единое целое. В данном случае искомое уравнение получено путем синтеза двух выражений одной и той же величины (расстояния), являющейся третьим компонентом основного отношения $ab=c$, реализованного в задаче.

Если через x (км) обозначить расстояние, пройденное первым велосипедистом до момента встречи со вторым, то модель поиска решения задачи будет следующей:

Величины	Велосипедист			
	I		II	
Скорость, км/ч	$\frac{x}{2}$	$<$	$\frac{x}{2}+3$	На 3
Время, ч	2	|	2	
Расстояние, км	x	$<$	$76-x$	На ?

Уравнение: $\left(\frac{x}{2}+3\right)\cdot 2=76-x$.

В данном случае уравнение получено другим способом: в составлении уравнения приняли участие все три компонента основного отношения $ab=c$. Однако это не означает, что в задаче обе ситуации изолированы друг от друга. Действительно, выражение величины скорости первого велосипедиста $\left(\frac{x}{2}\right)$ необходимо для получения выражения скорости второго $\left(\frac{x}{2}+3\right)$. Поэтому можно сказать, что между задачными ситуациями имеет место неявная связь — связь порождения.

Покажем, что рассматриваемая модель поиска решения задачи работает также и в случае, когда в задаче реализовано основное отношение другого вида, например $a_1+a_2=a_3$. Рассмотрим задачу.

Задача 2. В первом элеваторе было зерна в 2 раза больше, чем во втором. Когда из первого элеватора вывезли 600 т зерна, а во второй привезли 400 т, зерна в обоих элеваторах стало поровну. Сколько тонн зерна было первоначально в каждом элеваторе?

Обозначим через x (тонн) первоначальное количество зерна во втором элеваторе. Тогда модель поиска решения задачи будет следующей:

Количество зерна	Элеватор			
	I		II	
Первоначально, т	$2x$	$>$	x	В 2 раза
Перевезли, т	600	|	400	
Осталось, т	$2x-600$	$=$	$x+400$	

Уравнение: $2x-600=x+400$.

Выше были раскрыты возможности модели поиска решения задач на составление уравнений первой степени.

Задачи на составление уравнений второй степени, в которых реализовано отношение $ab=c$, обладают той особенностью, что при одном и том же выбранном неизвестном они допускают не менее двух различных путей поиска решения. Этой особенностью не всегда обладают задачи на составление уравнений первой степени. Рассмотрим примеры.

Задача 3. Спортивная площадка прямоугольной формы имеет площадь 840 м^2. Если длину площадки уменьшить на 5 м, а ширину увеличить на 4 м, то получится прямоугольник, равновеликий данному. Найти размеры спортивной площадки.

Введем обозначения величин. Пусть a — ширина площадки (м), b — длина площадки (м), c — площадь площадки (м^2); величины a, b и c связаны условием $ab=c$.

Обозначим через x (м) ширину спортивной площадки. При выбранном неизвестном с учетом вида основного соотношения $ab=c$, реализованного в задаче, модель поиска ее решения будет следующей:

Величины	Участок			
	I		II	
Ширина, м	x	$<$	$x+4$	На 4
Длина, м	$\frac{840}{x}$	$>$	$\frac{840}{x+4}$	На 5
Площадь, м^2	840	|	840	

Уравнение: $\frac{840}{x}-5=\frac{840}{x+4}$.

В данном случае уравнение получено путем сравнения двух выражений одной и той же величины (длины), являющейся вторым компонентом основного отношения $ab=c$. Можно сказать, что в данном случае между двумя ситуациями (элементами задачи) имеет место связь сравнения.

Покажем теперь, что при том же выбранном неизвестном уравнение можно составить путем сравнения двух выражений другой величины — площади, являющейся третьим компонентом основного отношения $ab=c$.

Величины	Участок			
	I		II	
Ширина, м	x	$<$	$x+4$	На 4
Длина, м	$\frac{840}{x}$	$>$	$\frac{840}{x}-5$	На 5
Площадь, м^2	840	$=$	$\left(\frac{840}{x}-5\right)\cdot(x+4)$	

Уравнение: $840=\left(\frac{840}{x}-5\right)\cdot(x+4)$.

Если через x (м) обозначить ширину площадки, а через y (м) — ее длину, то модель поиска решения задачи приведет к системе уравнений; это третий путь поиска решения.

Величины	Участок			
	I		II	
Ширина, м	x	$<$	$x+4$	На 4
Длина, м	y	$>$	$y-5$	На 5
Площадь, м^2	840		840	

Система уравнений: $\begin{cases} xy=840, \\ (x+4)(y-5)=840. \end{cases}$

В данном случае каждое уравнение системы получено с участием всех трех компонентов основного отношения $ab=c$, а потому между двумя задачными ситуациями имеется связь типа конъюнкции.

Анализ рассмотренных выше задач позволяет сделать некоторые выводы:

— отношения $ab=c$ и $a_1+a_2=a_3$, реализованные в данных задачах и определенные на их предметных областях, формализуют по две ситуации, которые являются элементами структуры задач;

— между этими элементами устанавливаются связи одного из

следующих типов: сравнения, конъюнкции, дизъюнкции, порождения;

— структура задачи с двумя ситуациями представляет взаимосвязь двух элементов (ситуаций) с помощью того или иного типа связи;

— в рассмотренных задачах их структура является постоянной, не зависящей от пути поиска решения.

Заметим, однако, что в большинстве случаев последняя закономерность может нарушаться, т. е. структура задачи зависит от пути поиска решения. Такие задачи называют задачами с переменной структурой. Структура задачи определяет способ ее решения, т. е. систему операций по преобразованию условий задачи, необходимых для достижения искомого (см. [111, с. 54—68], [121, с. 195]). Следовательно, задачи с постоянной структурой имеют только один способ решения, а задачи с переменной структурой соответственно несколько способов. Методика работы с задачами этого вида обладает некоторыми особенностями.

Приведем пример задачи с переменной структурой.

З а д а ч а 4. Две машины выехали одновременно из одного пункта и едут в одном направлении. Первая машина идет со скоростью 50 км/ч, а вторая — 40 км/ч. Спустя полчаса из этого же пункта и в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую на полтора часа позже, чем вторую. Какова скорость третьей машины?

Введем следующие обозначения: a — скорость движения (км/ч), b — время движения (ч), c — пройденное расстояние (км); величины a, b и c связаны условием $ab=c$.

Обозначим через x (км/ч) скорость третьей машины. При этом заметим, что третья машина вышла только через полчаса после выхода первой и второй машин, которые двигались со скоростями соответственно 50 и 40 км/ч. Значит, чтобы догнать их, третья машина должна сократить расстояние между собой и машинами — соответственно 25 и 20 км. В этом случае модель поиска решения задачи может выглядеть одним из следующих двух способов:

Величины	Ситуация				
	1-я		2-я		
	III машина догоняет II машину		III машина догоняет I машину		
Прирост скорости, км/ч	$x-40$	$>$	$x-50$		На ?
Время, ч	$\frac{20}{x-40}$	$<$	$\frac{25}{x-50}$		На $\frac{3}{2}$
Расстояние, км	20		25		

Уравнение: $\frac{20}{x-40}+\frac{3}{2}=\frac{25}{x-50}$.

Величины	Ситуация			
	1-я		2-я	
	III машина догоняет II машину		III машина догоняет I машину	
Прирост скорости, км/ч	$x-40$	$>$	$x-50$	На ?
Время, ч	$\frac{20}{x-40}$	$<$	$\frac{20}{x-40}+\frac{3}{2}$	На $\frac{3}{2}$
Расстояние, км	20	$<$	$\left(\frac{20}{x-40}+\frac{3}{2}\right)\times$ $\times(x-50)$	На 5

Уравнение: $20+5=\left(\frac{20}{x-40}+\frac{3}{2}\right)(x-50)$.

Однако при выбранном неизвестном можно осуществить такой путь поиска, который выявит другую структуру задачи:

Величины	Ситуация				
	1-я	2-я		3-я	
	III машина догоняет II машину	III машина догоняет I машину		Расстояние до обгона первой машины третьей	
Скорость или прирост скорости, км/ч	$x-40$	x	$>$	50	На ?
Время, ч	$\frac{20}{x-40}$	$\frac{20}{x-40}+\frac{3}{2}$	$<$	$\frac{20}{x-40}+2$	На $\frac{1}{2}$
Расстояние, км	20	$\left(\frac{20}{x-40}+\frac{3}{2}\right)x$	$=$	$\left(\frac{20}{x-40}+2\right)\cdot 50$	

Уравнение: $\left(\frac{20}{x-40}+\frac{3}{2}\right)x=\left(\frac{20}{x-40}+2\right)\cdot 50$.

Первые два пути поиска решения задачи используют одну и ту же структуру, состоящую из двух элементов и связи сравнения между ними. В третьем пути поиска выявляется иная структура данной задачи. Она включает три элемента и две связи: связь порождения (между первым и вторым элементами) и связь сравнения (между вторым и третьим элементами). Таким образом, данная задача имеет не менее двух способов решения.

Заметим, если в задаче описывается более трех ситуаций, то возникают значительные трудности в применении табличной формы в качестве наглядной модели поиска решения.

§ 24. Этапы решения задач на составление уравнений

В методике математики общепринято следующее деление процесса решения задач: 1) анализ текста задачи; 2) поиск способа решения задачи и составление плана решения; 3) осущест-

вление найденного плана; 4) изучение (анализ) найденного решения.

Выделенные этапы представляют норму деятельности человека по решению задач. Однако в реальном процессе решения необязательно явным образом проходить через все указанные этапы. Это зависит от того, насколько решающему известен способ решения задачи. Все же следует иметь в виду, что выделенные этапы процесса решения задачи служат той ориентировочной основой, опираясь на которую учитель управляет действиями учащихся по формированию способов решения задач. Каждый этап имеет свои признаки (ориентиры), руководствуясь которыми учитель формирует у учащихся компоненты общего умения решать задачи.

На **первом этапе** (анализ текста задачи) учитель должен добиться того, чтобы учащиеся «приняли» задачу, т. е. поняли ее смысл, сделав целью своей деятельности. В этом случае задача становится объектом мышления.

Поэтому усвоение текста задачи учащимися будет первой важной целью учителя. Исходным здесь является выделение в задаче условия, т. е. данных и отношений между ними, и требования задачи, т. е. искомого (искомых) и отношений между ними. Дальнейшее соотнесение условия и требования позволяет выявить в задаче основное отношение, направляющее процесс поиска ее решения. Как правило, это отношение имеет вид функциональной зависимости рассмотренных в § 23 типов. Важное значение имеют краткая запись текста задачи, составление схем, рисунков.

Схемы и рисунки выступают в роли наглядного представления содержания задачи и зависимостей величин, входящих в нее. Еще большее значение приобретает схема в роли модели, выявляющей скрытые зависимости между величинами. Поэтому составлению кратких записей и схем по тексту задачи необходимо специально обучать.

Сопоставление условия и требования задачи позволяет выяснить, достаточно ли данных для ответа на вопрос задачи, нет ли среди них противоречивых или лишних данных.

На первом этапе решения необходимо также актуализировать «базис» решения задачи, т. е. теоретическую и практическую основу, необходимую для обоснования решения. Здесь выясняется также, не принадлежит ли задача к известному типу задач.

На **втором этапе** процесса решения задачи важным моментом является выяснение стратегии решения задачи:

1) устанавливается, будет ли неизвестным, относительно которого составляется уравнение, искомая величина или же промежуточная величина. Если принято решение найти сначала промежуточную величину, то искомая величина выражается через нее;

2) по какому компоненту основного отношения будет составлено уравнение или оно будет составлено с использованием всех его компонентов (другими словами, для каких величин соответствующие выражения будут приравниваться).

Далее осуществляется поиск способа решения задачи на основе построения модели поиска. Аналитико-синтетический поиск решения заканчивается получением уравнения. Соответствующий план решения обсуждается с учащимися, при этом используется табличная запись поиска решения задачи. В случае необходимости план как способ решения задачи оформляется письменно. В этом он выполняет роль ориентировочной основы деятельности учащегося.

На **третьем этапе** процесса решения задачи осуществляется найденный план решения, выполняется проверка решения и записывается полученный ответ.

Четвертый этап — изучение (анализ) найденного решения задачи. Здесь анализ имеет своей целью выделение главной идеи решения, существенных его моментов, обобщение решения задач данного типа. Выясняются недостатки решения и производится поиск другого, более рационального решения, выявляются и закрепляются в памяти учащихся приемы, которые были использованы в процессе решения задачи.

В психолого-дидактических исследованиях высказывается мнение, что осуществление этого этапа будет способствовать переносу знаний и служить средством более эффективного обучения решению задач (см. [162]).

Раскроем методику обучения решению текстовых задач на конкретном примере.

З а д а ч а. По плану бригада должна была выполнить заказ за 10 дней. Но фактически она перевыполняла норму на 27 деталей в день и за 7 дней работы не только выполнила предусмотренное планом задание, но и изготовила сверх плана 54 детали. Сколько деталей в день должна была изготовить бригада по плану?

А н а л и з т е к с т а з а д а ч и. После прочтения текста задачи анализ может быть проведен посредством рассмотрения следующих вопросов (самими учащимися или с помощью учителя):

За сколько дней бригада должна выполнить заказ по плану?

За сколько дней бригада фактически выполнила заказ?

Почему бригада выполнила заказ раньше намеченного срока?

Сколько деталей изготовила бригада сверх плана?

Какие величины содержатся в задаче?

Как связаны между собой производительность труда, время и объем выполненной работы? (Учитель может конкретизировать этот вопрос, исходя из возможностей учащихся.)

Сколько различных ситуаций можно выделить в задаче?

Какие величины, входящие в условие и вопрос задачи, неизвестны?

Какая величина в задаче является искомой?

Решалась ли раньше задача, похожая на эту?

В итоге первого этапа работы над задачей с учетом основного отношения выполняется запись текста задачи. Табличная форма записи на первых этапах обучения решению текстовых задач наиболее эффективна, потому что умение учащегося оформить

соответствующую таблицу говорит о том, принял он задачу или нет. Заметим, что существуют и другие формы записи. С ними можно ознакомиться, например, по книге [36].

Величины	Ситуация			
	По плану		Фактически	
Производительность бригады, дет. в день	?	<	?	На 27
Время работы, ди.	10	|	7	
Объем выполненной работы, дет.	?	<	?	На 54

Для выяснения связи между значениями одной и той же величины перед учащимися ставятся соответствующие вопросы, например: в каком случае производительность труда бригады была выше? На сколько деталей в день бригада перевыполняла норму?

Правильный ответ на первый вопрос позволяет поставить в таблице соответствующий знак неравенства между неизвестными значениями одноименной величины. Ответ на второй вопрос позволяет записать: «На 27» (в указанном в таблице месте). Полученная запись позволяет учащимся актуализировать часть условия задачи: производительность бригады, предусмотренная планом, на 27 деталей в день меньше фактической. Аналогично поступают при выяснении связи между неизвестными значениями другой величины. В данном случае сравнивается плановый и фактический объем выполненной работы.

Поиск способа решения задачи. На этом этапе обсуждается стратегия решения задачи. Затем вводится обозначение искомой или другой неизвестной величины в зависимости от выбранной учителем совместно с учащимися стратегии. Далее, пользуясь установленными зависимостями между значениями одноименных величин и основным отношением, реализованным в задаче (т. е. зависимостью между величинами), на основе табличной записи текста задачи заполняется таблица поиска решения задачи:

Величины	Ситуация			
	По плану		Фактически	
Производительность бригады, дет. в день	x	$<$	$x+27$	На 27
Время работы, ди.	10	|	7	
Объем выполненной работы, дет.	$10x$	$<$	$(x+27)\cdot 7$	На 54

Исходя из модели поиска решения, выписывается неравенство $10x<(x+27)\cdot 7$ на 54, с помощью которого составляется уравнение $10x+54=(x+27)\cdot 7$ или уравнение $10x=(x+27)\cdot 7-54$.

Осуществление плана решения задачи. Отсюда естественно вытекает план решения задачи, который включает в

себя поиск решения (способ получения уравнения) и решение полученного уравнения. Заметим, что табличная форма записи деятельности учащихся по составлению уравнения не требует повторного ее описания. Поэтому на третьем этапе процесса решения текстовой задачи остается решить полученное уравнение, выполнить проверку решения и записать ответ.

Имеем уравнение: $10x+54=(x+27)\cdot 7$. Решим его:

$$\begin{gathered}10x+54=7x+189,\\3x=135,\\x=45.\end{gathered}$$

Данное уравнение имеет один корень — число 45.

Однако решение задачи не может заканчиваться решением уравнения: необходимо проверить, удовлетворяет ли полученный корень уравнения условию и требованию задачи. В связи с этим необходимо сделать проверку корня уравнения по смыслу задачи. Здесь возможны два способа письменного оформления проверки корней уравнения.

Первый способ состоит в том, что по найденному значению x по порядку вычисляются значения входящих в задачу величин. При этом проверяется, удовлетворяют ли эти величины смысловым ограничениям. Если все найденные значения величин им удовлетворяют, то корень уравнения дает решение задачи (см. [40]).

С этой целью воспользуемся моделью поиска решения задачи. По смыслу данной задачи все входящие в нее величины должны принимать положительные значения. Проверим, выполняется ли это для найденного значения $x=45$:

$x=45$	Положительное число.
$x+27=45+27=72$	Положительное число.
$(x+27)\cdot 7=72\cdot 7=504$	Положительное число.
$10x=10\cdot 45=450$	Положительное число.
$504-450=54$	Положительное число, являющееся данным.

Следовательно, значение $x=45$ удовлетворяет условию задачи, т. е. является ее решением.

Ответ: бригада должна изготовить в день по плану 45 деталей.

Второй способ письменного оформления проверки корней уравнения по смыслу задачи возможен после изучения темы «Неравенства с одной переменной». Сущность проверки остается при этом прежней, а способ оформления состоит в следующем. Совместно с уравнением, составленным по тексту задачи, рассматриваются смысловые ограничения для значений величин, входящих в задачу. Получают систему:

$$\begin{cases}10x+54=(x+27)\cdot 7,\\x>0,\\10x>0,\\x+27>0,\\(x+27)\cdot 7>0,\\10x<(x+27)\cdot 7,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}10x+54=(x+27)\cdot 7,\\0<x<63.\end{cases}$$

Видим, что значение $x=45$ удовлетворяет двойному неравенству и, следовательно, является решением задачи. Множество целочисленных значений x, удовлетворяющих двойному неравенству, является областью допустимых по смыслу задачи значений искомой величины. Следует иметь в виду, что даже нахождение области определения не снимает вопроса о том, удовлетворяет ли найденное значение корня полученного уравнения условию и требованию задачи. Дело в том, что количество ограничений, определяющее эту область, может оказаться большим и некоторые ограничения могут быть незамечены (например, целочисленность корня в данной задаче). Поэтому проверку задачи вторым способом целесообразно делать только в некоторых случаях, но необходимо развивать у учащихся умение выявлять смысловые ограничения значений величин, входящих в задачи.

Изучение (анализ) найденного решения. Перед учащимися в соответствии с содержанием этого этапа процесса решения задачи ставятся вопросы следующего типа:

Какова главная идея решения данной задачи?

Нельзя ли указать другие способы решения данной задачи?

Почему рассмотренный способ решения является рациональным?

Заметим, что для данной задачи все возможные пути поиска ее решения не выявляют другого способа, т. е. эта задача имеет постоянную структуру.

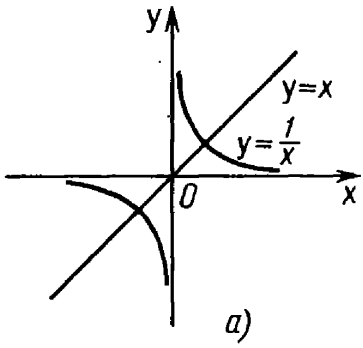
Если учащиеся решили ряд задач рассматриваемого в этой главе типа (на процессы, см. § 23), то возможна постановка вопроса о том, какова сущность общего способа решения таких задач.

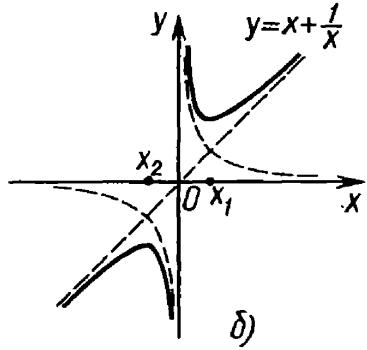
В заключение отметим, что предложенная методика обучения решению текстовых задач на процессы эффективна также и в случае решения задач, приводящих к решению уравнений более сложного вида, чем линейные, например квадратных. Естественно, что при последовательном формировании умений решать текстовые задачи методика обучения претерпевает определенные изменения: отпадет необходимость применять табличную форму записи текста задачи и поиска ее решения, сократится число выявленных этапов процесса ее решения, сам этот процесс станет более свернутым.

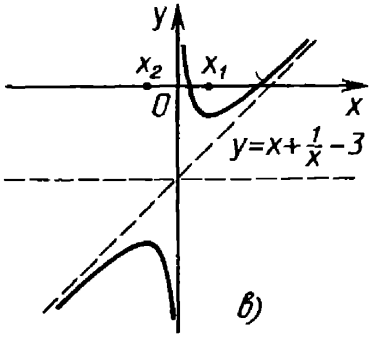
Глава 8. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

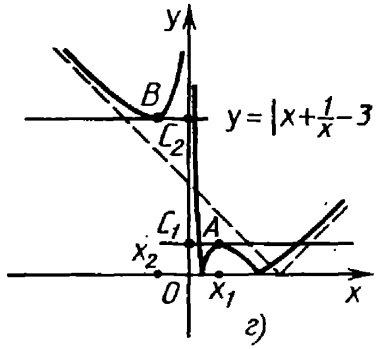
§ 25. О понятии функции в современном школьном курсе

1. Внутрипредметные связи на основе функционально-графических представлений. Функциональная линия школьного курса математики является в настоящее время одной из ведущих, определяющих стиль изучения многих тем и разделов курсов алгебры и начал анализа. Наиболее заметной особенностью материала этой линии является то, что с его помощью возможно устанавливать разнообразные связи в обучении. В качестве примера, на котором мы рассмотрим некоторые важные особенности этой линии, разберем следующее задание:









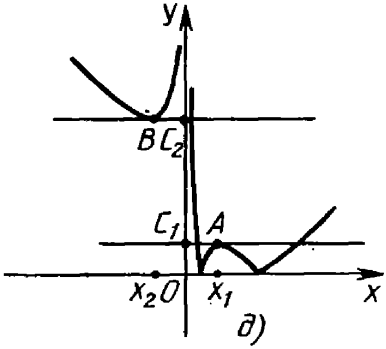


Рис. 38

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $\left| x+\frac{1}{x}-3\right| =a$ имеет ровно четыре корня?

Решение. Построим график функции $c(x)=\left| x+\frac{1}{x}-3\right|$. Различные этапы построения графика показаны на рисунке 38, *а — г*. На рисунке 38, *д* показаны некоторые точки, используемые для исследований, они появляются в процессе построения.

Найдем число точек пересечения графика функции $c(x)$ (обозначим его Г) и прямой l с уравнением $y=a$. На рисунке 38, *д* видно, что l пересекает Г в четырех точках в том случае, когда l расположена в верхней полуплоскости и не пересекает отрезок $[c_1, c_2]$. Первое из этих условий приводит к ограничению $a>0$. Для нахождения второго заметим, что точка на оси абсцисс с координатой x_1 — точка максимума функции $c(x)$ на отрезке $[a_1, a_2]$, аналогично x_2 — точка минимума функции $c(x)$ на интервале $]-\infty, 0[$.

Числовые значения для x_1 и x_2 можно получить, учитывая, что неравенство $\left| x+\frac{1}{x}\right| \geqslant 2$ справедливо при любом значении x и

обращается в равенство только при $x=1$ и $x=-1$. Отсюда получаем, что $c_1=1$, $c_2=5$. Следовательно, четыре корня данное уравнение имеет при $a\in]0;\ 1[\cup]5;\ \infty[$.

Как легко заметить, основа приведенного решения состоит в использовании функциональных и графических представлений. Принципиально решение состоит в переходе от исследования данного уравнения к исследованию графика функции $c(x)$ (см. гл. 6). Однако наиболее трудная часть решения в данном случае состоит в построении графика функции $c(x)$. Рассмотрим основные этапы построения.

На рисунке 38, *а* изображены графики исходных для $c(x)$ функций $y=1$ и $y=\frac{1}{x}$. Это простейшие элементарные функции. Они входят в состав определенных классов элементарных функций и подробно изучаются в своем классе (см. § 27). Рисунок 38, *б* показывает график суммы этих функций. Как это ни удивительно на первый взгляд, график функции $y=x+\frac{1}{x}$ школьными средствами построить с достаточной точностью почти невозможно (см. § 27). Причина состоит в том, что в этом курсе отсутствуют операции с функциями, такие, как сложение. Не дается поэтому и представление о построении графиков суммы двух функций, так что в каждом случае такой график приходится строить, пользуясь особенностями данного выражения. Здесь можно рассуждать так: при больших по абсолютному значению аргументах $x+\frac{1}{x}\approx x$, а при малых $x+\frac{1}{x}\approx\frac{1}{x}$, так что график функции $y=x+\frac{1}{x}$ близок соответственно к биссектрисе I—III координатных углов и гиперболе $y=\frac{1}{x}$. Здесь же на основе тождества $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$ могут быть указаны точки x_1 и x_2. На рисунке 38, *в*, *г* показано, как график последовательно подвергается действию параллельного переноса вдоль оси ординат и симметрии относительно оси абсцисс. Эти преобразования графиков рассматриваются в курсе алгебры: первое — при построении графика функции $f(x)+c$ по графику функции $f(x)$, второе — при построении графика функции $|f(x)|$ по графику функции $f(x)$; соответствующие задания устанавливают связи курсов алгебры и геометрии на основе координатного метода. Наконец, интерпретация данных (рис. 38, *д*) использует принцип: уравнение $c(x)=a$ имеет столько же корней, сколько имеет точек пересечения график функции $y=c(x)$ и прямая с уравнением $y=a$. На этом этапе изучение графика сочетается с числовыми расчетами: график позволяет найти точки, значения координат которых позволят найти ответ, а использование неравенств приводит к их определению.

Поскольку метод, с помощью которого была решена задача, состоял в преобразовании исходного задания, построении для него более удобной модели, причем основным инструментом здесь

явились понятия функции и графика функции, естественно назвать этот метод методом функционально-графического моделирования. Освоению этого метода и с формальной, и с прикладной стороны в значительной мере подчинено изучение всей функциональной линии курсов алгебры и начал анализа.

Связующая роль функциональной линии достаточно полно отражена в методическом анализе решения примера; отметим только, что при рассмотрении заданий, связанных с построением графиков функций, можно организовать работу по пропедевтике ряда понятий математического анализа уже в курсе школьной алгебры; в данном примере, в частности, особую роль играли экстремальные точки функции $c(x)$, и при разборе решения примера можно указать на их значение.

Разобранный пример значительно превышает по сложности те задания, которые посильны учащимся даже на заключительных этапах изучения курса алгебры. Вместе с тем он дает представление о тех трудностях, которые учащиеся будут испытывать при освоении метода функционально-графического моделирования, поскольку идеи, собранные в решении примера, присутствуют и в более простых заданиях, имеющихся в содержании обучения.

2. Различные подходы к определению понятия функции. Обоснование функциональной линии как ведущей для школьного курса математики — одно из крупнейших достижений современной методики. Однако реализация этого положения может быть проведена многими различными путями; многообразие путей вызвано фундаментальностью самого понятия функции.

Для того чтобы составить представление об этом многообразии, сравним две наиболее резко различающиеся методические трактовки этого понятия; первую мы назовем генетической, а вторую — логической.

Генетическая трактовка понятия функции основана на разработке и методическом освоении основных черт, вошедших в понятие функции до середины XIX в. Наиболее существенными понятиями, которые при этой трактовке входят в систему функциональных представлений, служат переменная величина, функциональная зависимость переменных величин, формула (выражающая одну переменную через некоторую комбинацию других переменных), декартова система координат на плоскости (см. [57]).

Генетическое развертывание понятия функции обладает рядом достоинств. В нем подчеркивается «динамический» характер понятия функциональной зависимости, легко выявляется модельный аспект понятия функции относительно изучения явлений природы. Такая трактовка естественно увязывается с остальным содержанием курса алгебры, поскольку большинство функций, используемых в нем, выражаются аналитически или таблично.

Генетическая трактовка понятия функции содержит также черты, которые следует рассматривать как ограничительные. Одним из очень существенных ограничений является то, что переменная при таком подходе всегда неявно (или даже явно) предполага-

ется пробегающей непрерывный ряд числовых значений. Поэтому в значительной степени понятие связывается только с числовыми функциями одного числового аргумента (определенными на числовых промежутках). В обучении приходится, используя и развивая функциональные представления, постоянно выходить за пределы его первоначального описания.

Логическая трактовка понятия функции исходит из положения о том, что строить обучение функциональным представлениям следует на основе методического анализа понятия функции в рамках понятия алгебраической системы (см. [57]). Функция при таком подходе выступает в виде отношения специального вида между двумя множествами, удовлетворяющего условию функциональности. Начальным этапом изучения понятия функции становится вывод его из понятия отношения.

Реализация логического подхода вызывает необходимость иллюстрировать понятие функции при помощи разнообразных средств; язык школьной математики при этом обогащается. Помимо формул и таблиц, здесь находят свое место задание функции стрелками, перечислением пар, использование не только числового, но и геометрического материала; геометрическое преобразование при таком подходе оказывается возможным рассматривать как функцию. Обобщенность возникающего понятия и вытекающие отсюда возможности установления разнообразных связей в обучении математике — основные достоинства такой трактовки.

Однако выработанное на этом пути общее понятие оказывается в дальнейшем связанным главным образом с числовыми функциями одного числового аргумента, т. е. с той областью, в которой оно гораздо проще формируется на генетической основе.

Таким образом, если генетический подход оказывается недостаточным для формирования функции как обобщенного понятия, то логический обнаруживает определенную избыточность. Отметим, что различия в трактовках функции проявляются с наибольшей резкостью при введении этого понятия. В дальнейшем изучении функциональной линии различия постепенно стираются, поскольку изучается в курсах алгебры и начал анализа не само **понятие** функции, а в основном **конкретно** заданные функции и классы функций, их разнообразные приложения в задачах естествознания и общественного производства.

В современном школьном курсе математики в итоге длительных методических поисков в качестве ведущего был принят генетический подход к понятию функции. Одновременно учитывается все ценное, что можно извлечь из логического подхода. Исходя из этого при формировании понятий и представлений, методов и приемов в составе функциональной линии система обучения строится так, чтобы внимание учащихся сосредоточивалось, во-первых, на выделенных и достаточно четко разграниченных представлениях, связанных с функцией, и, во-вторых, на установлении их взаимодействия при развертывании учебного материала. Иными словами, в обучении должна быть выделена система компонентов

понятия функции и установлена связь между ними. В эту систему входят такие компоненты:

— представление о функциональной зависимости переменных величин в реальных процессах и в математике;

— представление о функции как о соответствии;

— построение и использование графиков функций, исследование функций;

— вычисление значений функций, определенных различными способами.

В процессе обучения алгебре все указанные компоненты присутствуют при любом подходе к понятию функции, но акцент может быть сделан на одном из них. Как только что мы отметили, функциональный компонент является основой введения и изучения понятия функции. На этой основе при организации работы над определением вводятся и другие компоненты, проявляющиеся в различных способах задания функциональной зависимости и ее графического представления.

Рассмотрим теперь взаимодействие компонентов на примере, относящемся к формированию прикладных умений и навыков.

Пример 2. С мороза в комнату внесли банку со льдом и стали наблюдать за изменением температуры вещества в банке: лед постепенно таял, когда он растаял весь, температура воды стала повышаться, пока не сравнялась с температурой в комнате. На рисунке 39 изображен график зависимости температуры от времени. Ответьте на вопросы: а) Какова исходная температура льда? б) За какое время температура льда повысилась до 0 °С? в) Какая температура в комнате? г) Укажите область, на которой определена функция, промежутки ее возрастания, промежуток, на котором она постоянна.

В этом примере необходимо использовать все компоненты, кроме последнего, вычислительного компонента. Процесс с самого начала представлен как функциональная зависимость. В вопросах требуется уточнить характер этой зависимости (вопрос г)), выяснить соответствующие значения функции и аргумента в определенные моменты процесса (вопросы а) и в)). Цель заданий состоит в изучении соответствия ситуации, изложенной в условии, и способа ее математического представления. Понятие функции, в системе формирования которого необходимо должны присутствовать такие задания, сразу же выступает в курсе математики как определенная математическая модель, что и является мотивировкой для его углубленного изучения.

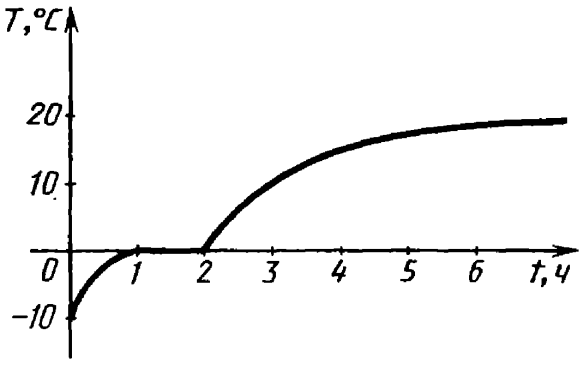


Рис. 39

§ 26. Введение понятия функции

Введение понятия функции — длительный процесс, завершающийся формированием представлений о всех компонентах этого понятия в их взаимной связи и о роли, играемой им в математике и в ее приложениях. Этот процесс ведется по трем основным направлениям:

— упорядочение имеющихся представлений о функции, развертывание системы понятий, характерных для функциональной линии (способы задания и общие свойства функций, графическое истолкование области определения, области значений, возрастания и т. д. на основе метода координат);

— глубокое изучение отдельных функций и их классов;

— расширение области приложений алгебры за счет включения в нее идеи функции и разветвленной системы действий с функцией.

Первое из этих направлений проявляется в курсе школьной алгебры ранее остальных. Его рассмотрение составляет содержание этого параграфа.

В реализации этого направления значительное место отводится усвоению важного представления, входящего в понятие функции,— однозначности соответствия аргумента и определенного по нему значения функции. Для рассмотрения этого вопроса привлекаются различные способы задания функции.

Чаще других в математике и ее приложениях применяется задание функции формулой. Все другие способы играют подчиненную роль. Именно поэтому после первого знакомства с несколькими такими способами основное внимание в обучении уделяется тем функциям и классам, которые имеют стандартную алгебраическую форму их выражения. Однако при введении понятия сопоставление разных способов задания функции выполняет важную роль. Во-первых, оно связано с практической потребностью: и таблицы, и графики, как правило, служат для удобного в определенных обстоятельствах представления функции, имеющей аналитическую форму записи. Во-вторых, оно важно для усвоения всего многообразия аспектов понятия функции. Формула выражает функцию лишь будучи включенной в соответствующую систему представлений и операций, а эта система такова, что различные компоненты понятия функции могут быть отображены наиболее естественно различными средствами. Использование перевода задания функции из одной формы представления в другую — необходимый методический прием при введении понятия функции.

Реализация этого приема состоит в использовании системы заданий, в которых представлены все случаи такого перевода. Если ограничиться основными способами представления функции — формулой, графиком, таблицей, то получится 6 типов упражнений, при которых форма представления меняется, и 3 — при которых она остается такой же. Приведем примеры заданий первого типа — изменения формы представления:

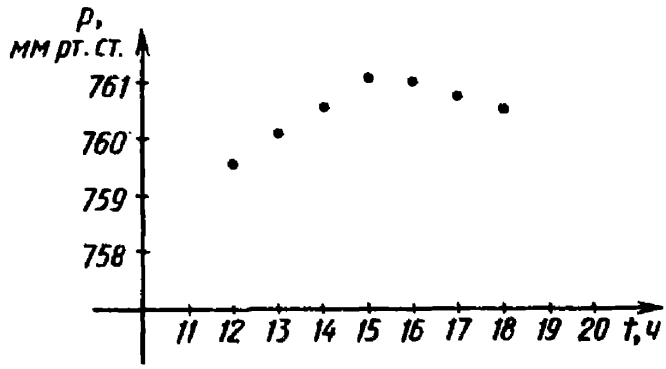


Рис. 40

а) Изобразить график функции $y=4x+1$ на промежутке $[0; 2]$.

б) Проверить, насколько точна таблица квадратов чисел, взяв несколько значений для аргумента и проведя расчет: $x=1{,}35$; 2,44; 9,4; 7; 6,25.

в) На рисунке 40 изображены точки на координатной плоскости, выражающие результаты наблюдений за атмосферным давлением. Построить график зависимости давления от времени в промежутке $12 \leqslant t \leqslant 18$, соединив эти точки плавной линией.

Мы рассмотрим методику работы с этими заданиями только на этапе первоначального ознакомления с понятием функции, на других этапах она может быть совершенно иной. На рассмотренном этапе учащиеся еще не знают общего вида графика линейной функции (задание а)). Поэтому график функции $y=4x+1$ они могут построить только по точкам. Учитель может обратить внимание на то, что по точкам нельзя построить целиком график функции, если она определена на бесконечном множестве, но з а м е т н о, что эти точки лежат на прямой; оказывается, что это замечание верно. Таким образом, можно установить связи с дальнейшим изучением материала. Способ построения графика функции по точкам иллюстрируется заданием в); пользуясь конкретным содержанием задания, учитель может отметить, что предлагаемые учащимися графики могут отличаться от действительного положения, но что на практике этим приемом часто приходится пользоваться (интерполяция). В задании б) можно отметить связь функциональных представлений с числовой системой — с понятиями точного и приближенного числового значения. С их сопоставлением постоянно приходится сталкиваться при построении графиков, потому что наносить точки на график можно лишь с ограниченной точностью.

Задания второго типа можно связать с оптимизацией представления функции без изменения средств представления. Наиболее типичное такое задание — упростить формулу, задающую функцию. На этапе введения понятия функции можно рассмотреть несколько таких заданий с целью показать, что **одна и та же функция** может определяться различными формулами. Задания, относящиеся к таблицам (перестроить данную таблицу) и к графикам (например,

изобразить часть графика в более крупном масштабе), применяются в практике обучения нечасто, однако совсем пренебрегать ими нельзя.

Связь функциональной линии с числовой системой на этапе первоначального введения функции осуществляется при вычислении значений функции по формуле или описанию ее в словесной форме. При выполнении таких заданий необходимо довести до полной ясности следующую мысль: если о некоторой функции известно, что она определена на множестве M, то это значит, что для каждого $x \in M$ можно найти соответствующее значение $f(x)$. Для числовых функций, определенных на числовых промежутках (как отмечалось, именно такие функции преимущественно рассматриваются в курсе школьной алгебры), это означает, что $f(x)$ можно найти, вычислить, какое бы число ни взять из промежутка, на котором задана функция, независимо от той числовой области, которой принадлежит это число.

Пример 1. Функция задана формулой $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$. Найти ее значения при $x=7$; 0,12; $\frac{3}{4}$.

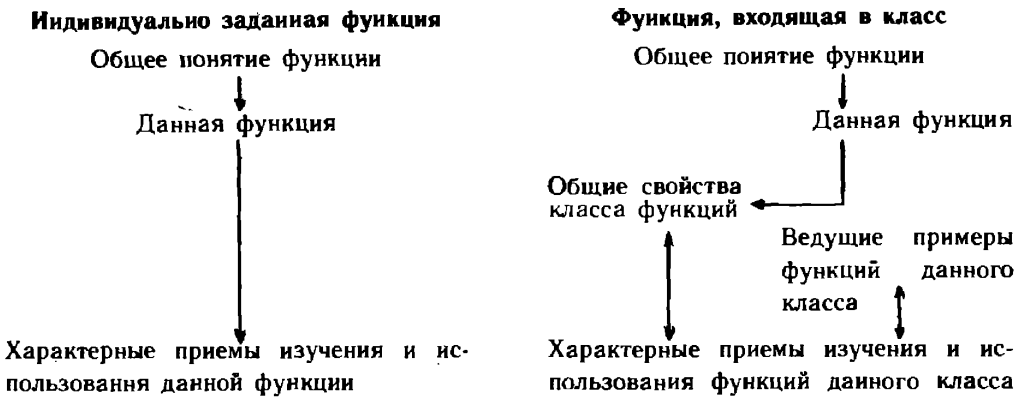
Здесь предлагаемое значение аргумента — целое число, десятичная дробь, обыкновенная дробь. В дальнейшем по мере введения новых числовых областей разнообразие форм представления чисел в подобных заданиях должно увеличиваться.

Наряду с раскрытием определения понятия и уточнения общих функциональных представлений введение понятия функции требует рассмотрения нескольких конкретных примеров функций, разобранных с учетом теоретических представлений, например $y=x+1$ и $y=\frac{1}{x}$. Для этого привлекаются новые приемы, которые мы сейчас рассмотрим.

Большинство изучаемых в школьной математике функций образует классы, обладающие общностью аналитического способа задания функций из него, сходными особенностями графиков, областей применения. В начале курса алгебры, когда внимание сосредоточено на выявлении основных понятий функциональной линии, каждая рассматриваемая функция представлена в виде объекта, до некоторой степени уникального, мысль о сходстве свойств различных функций еще не рассматривается в обучении. Освоение индивидуально заданной функции происходит поэтому в сопоставлении черт, специфических для нее, с общим представлением о функции непосредственно, без выделения промежуточных звеньев. Однако длительность этого периода независимого рассмотрения каждой функции незначительна; в курсе алгебры вслед за введением понятия о функции сразу рассматривается первый класс — линейные функции. Для функций, входящих в класс, изучение происходит по более сложной схеме, поскольку в нем выделяются новые аспекты: изучение данной функции как члена класса и изучение свойств всего класса на примере «типичной» функции

этого класса. Приведенные схемы показывают главные связи в обучении в этих двух случаях.

Связи внутри функциональной линии при изучении функции



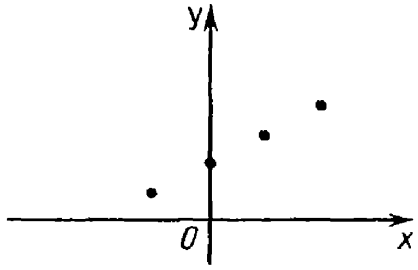
Типичный и одновременно важнейший для математики класс функций — линейные функции, которые мы рассмотрим с точки зрения изучения характерных для этого класса свойств и представлений, формируемых в курсе алгебры.

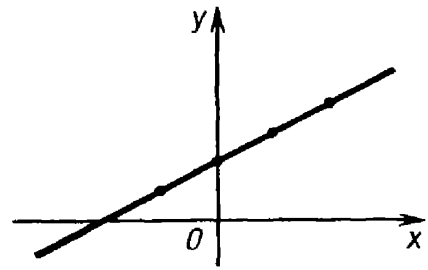
Первоначальное представление о линейной функции выделяется из рассмотрения задачи, обычно связанной с равномерным прямолинейным движением, а также при построении графика некоторой линейной функции. Рассмотрим второй из этих источников. Основная мысль, которую мы попытаемся обосновать, состоит в том, что рассмотрение графика о т д е л ь н о в з я т о й линейной функции не может привести к формированию представлений об основных свойствах графиков всех линейных функций.

Для этого рассмотрим два наиболее широко распространенных в начале изучения темы приема построения графиков линейной функции.

П е р в ы й с п о с о б. Использование «загущения» точек на графике (см. рис. 41, на котором показана последовательность действий по этому приему: а) нанесение нескольких точек; б) наблюдение — все построенные точки расположены на одной прямой; проведение этой прямой; в) проверка: берем произвольное значение аргумента и вычисляем по нему значение функции; наносим точку на координатную плоскость — она принадлежит построенной прямой). Отсюда делается вывод о графике данной линейной функции.

Этот способ безусловно может привести к пониманию того, что график и любой линейной функции — прямая, т. е. к выделению некоторого общего свойства класса линейных функций. Однако последовательное проведение приема требует большого времени и не может быть проделано более нескольких раз. Поэтому общее свойство будет при этом формироваться на основе изолированных примеров.





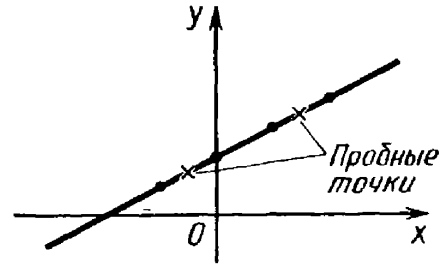


Рис. 41

Второй способ. По двум точкам. Этот способ уже предполагает знание соответствующего свойства графиков линейных функций. Выявления новых свойств здесь не происходит, поскольку внимание, как и при первом способе, сосредоточивается на конкретной функции из класса. Заметим, что в обучении происходит последовательная смена этих способов: когда общее свойство графиков усвоено (при рассмотрении первого способа), начинают применять второй — он экономнее и обоснован геометрически, поскольку через две точки проходит одна и только одна прямая.

Для того чтобы изучить класс линейных функций в совокупности его общих свойств, необходимо поставить **новую для учащихся познавательную задачу:** исследовать класс функций $y=kx+b$ в зависимости от параметров, установить геометрический смысл параметров. Эта задача возникает сразу же вслед за введением понятия функции. Наиболее естественный прием, который может быть применен, состоит в рассмотрении одновременно нескольких функций, у которых один из параметров изменяется, а другой остается постоянным. Простейшая система, реализующая этот прием, состоит из четырех заданий с их последующим анализом и установлением связей между ними.

Пример 2. Постройте графики функций:

$$y=0{,}5x;\ y=0{,}5x+0{,}5;\ y=1{,}5x;\ y=1{,}5x+0{,}5.$$

Основная часть работы начинается после построения графиков. Их нужно сравнить, обращая внимание на особенности графиков в зависимости от числовых значений коэффициентов. Опишем, например, методику выяснения геометрического смысла коэффициентов при переменной (рис. 42).

Следует обратить внимание на то, что графики (а) и (б) образуют с осью абсцисс одинаковые углы, это же имеет место и для графиков (в) и (г). Кроме того, графики (а) и (б) образуют с осью абсцисс меньшие углы, чем (в) и (г). С другой стороны, коэффициенты при переменной в формуле для первой и второй функций одинаковы и меньше, чем соответствующие коэффициенты

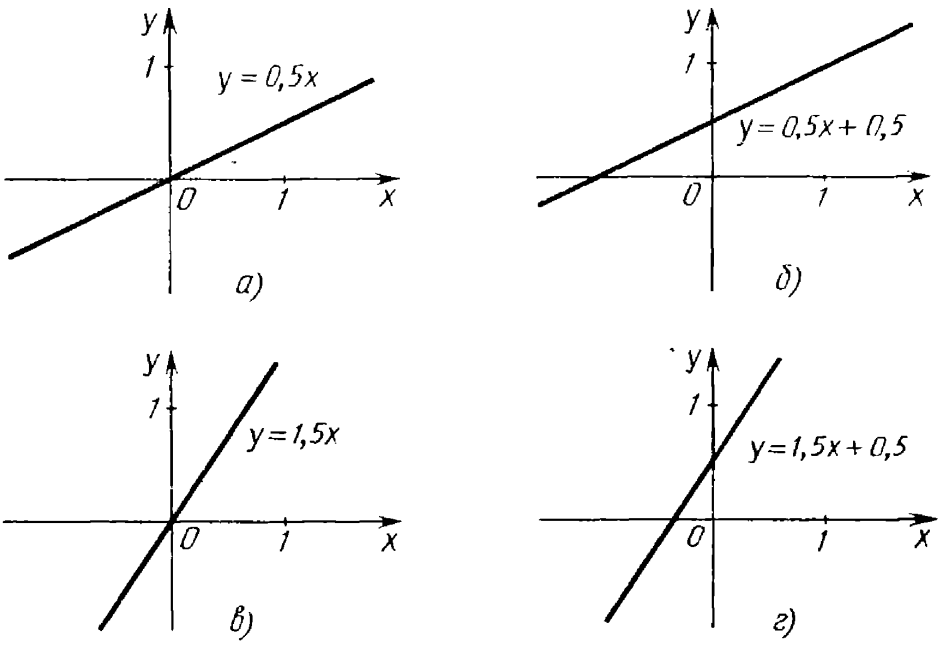


Рис. 42

у третьей и четвертой функций. Можно после этого сформулировать вывод о зависимости рассмотренного угла от коэффициента, ввести термин «угловой коэффициент» и привести несколько закрепляющих упражнений.

Значительные трудности представляет случай отрицательных значений углового коэффициента; для него требуется отдельная работа, построенная аналогичным образом.

Приведем пример закрепляющего упражнения: на одном и том же чертеже изображены графики функций $y=3x+2$; $y=\frac{3}{4}x+2$. Построить на этом же чертеже графики функций $y=3x-1$; $y=\frac{3}{4}x-1$; объяснить построение.

Если параметры, определяющие класс функций, имеют ясный геометрический смысл, то описанный прием изучения дает достаточно полное представление об этом классе. Однако в школьном курсе алгебры рассматриваются и такие классы, при изучении которых оказывается необходимым использовать и другие приемы.

Например, к изучению класса квадратичных функций привлекается прием, основанный на преобразовании выражения, задающего функцию, к виду $a(x-b)^2+c$, использовании геометрических преобразований для построения графика произвольной квадратичной функции из параболы стандартного положения — графика функции $y=ax^2$, $a\neq 0$.

Остановимся на этом классе функций подробнее. Квадратичная функция вводится и изучается в тесной связи с квадратными уравнениями и неравенствами.

Первой из этого класса функций, в значительной степени еще вне изучения собственного класса, рассматривается функция $y=x^2$. Свойства этой функции во многом отличаются от рассмотренного ранее случая линейных функций. Прежде всего, эта функция немонотонна; только на этом этапе у учащихся появляется пример функции, отличной от линейных, которые монотонны на всей области определения. Чтобы подчеркнуть указанное отличие, полезно предложить учащимся следующее задание: функция задана формулой $y=x^2$ на промежутке $-2\leqslant x\leqslant 3$. Найти множество значений этой функции. Перенося свойство монотонности с класса линейных функций на функцию $y=x^2$, учащиеся часто делают ошибку, приводя ответ: промежуток $4\leqslant x\leqslant 9$. Эта ошибка для своего устранения требует рассмотрения графика функции $y=x^2$.

Другое отличие состоит в том, что характер изменения значений функции $y=x^2$ неравномерный: на одних участках она растет быстрее, на других — медленнее. Эта особенность выявляется при построении графика, причем целесообразно рассмотреть два графика: один — в крупном масштабе на промежутке $-1\leqslant x\leqslant 1$, другой — в мелком масштабе на промежутке, например, $-3\leqslant x\leqslant 3$. Построение можно вести описанным выше методом загущения. Важно отметить свойство параболы — симметричность относительно оси абсцисс; в дальнейшем это свойство приведет к рассмотрению класса четных функций, причем именно функция $y=x^2$ будет ведущим примером функции этого класса.

Наиболее существенное применение эта функция имеет при рассмотрении понятия иррационального числа. Первый пример иррационального числа ($\sqrt{2}$) может быть введен различными способами, но независимо от этого необходимо объяснить его связь с графическим методом решения уравнения $x^2=2$.

Изучение класса квадратичных функций начинается с изучения функций вида $y=ax^2$; при этом выясняется геометрический смысл коэффициента a. Далее вводится более широкий класс функций, имеющий вид $y=ax^2+c$. И здесь также коэффициент c получает ясную геометрическую интерпретацию, подойти к которой можно либо явно используя понятие параллельного переноса вдоль оси ординат, либо независимым рассуждением.

Пример 3. Задан график функции $y=x^2$. Построить на этом чертеже график функции $y=x^2+1$.

Заметим, что при заданном значении аргумента x_0 (рассматриваются, конечно, конкретные значения) значения функции $y=x^2+1$ на одно и то же число, равное 1, больше значений функции $y=x^2$. Поэтому для построения соответствующей точки на графике второй функции достаточно поднять на 1 точку графика первой функции с абсциссой x_0. Следовательно, чтобы построить весь график второй функции, нужно поднять на 1 график первой.

Это рассуждение хорошо усваивается учащимися, целесообразно применить его и при изучении класса линейных функций. В дальнейшем при обобщении свойств графиков его можно сформулировать так: «Чтобы построить график функции $y=f(x)+c$ по извест-

ному графику функции $y=f(x)$, можно произвести параллельный перенос второго графика на c единиц вдоль оси ординат».

После этой подготовки, казалось бы, можно приступить к изучению графиков произвольных квадратичных функций. Но здесь возникает трудность: коэффициент при первой степени неизвестного не имеет для квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ достаточно простого геометрического смысла. Именно поэтому приходится идти обходным путем, следуя тем же преобразованиям, которые производились при выводе формулы решения квадратного уравнения, и вводить в рассмотрение новый подкласс квадратичных функций вида $y=a(x-b)^2$. Объяснения при построении графиков здесь в целом могут быть такими же, как при рассмотрении функций вида $y=x^2+c$, однако усваивается предлагаемый способ здесь с большим трудом, поэтому требуется достаточное количество упражнений для закрепления. После таких приготовлений построение графика, а также изучение его свойств происходят без принципиальных затруднений.

Отметим здесь один частный, но полезный прием, который состоит в использовании системы заданий, имеющих цель — дать представление о тех или иных чертах данной функции или целого класса без указания точного значения величин, связанных с рассматриваемым вопросом. Этот прием можно назвать качественным или оценочным исследованием функции. Приведем два примера, связанные с изучением квадратичных функций.

Пример 4. На рисунке изображены графики функций $y=x^2$ и $y=-0{,}5x^2$. Как относительно них пройдет график функции $y=0{,}5x^2$; $-2x^2$; $3x^2$?

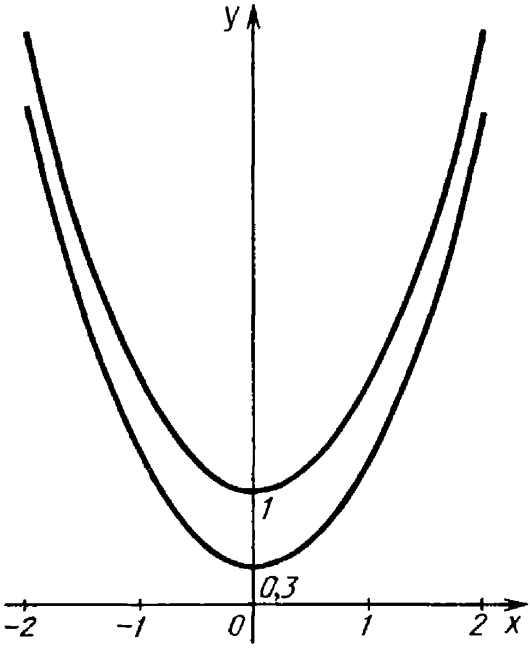


Рис. 43

Это задание **не предполагает** «точного» построения искомого графика; достаточно лишь указание на область, где он расположен, или его эскизное построение.

Пример 5. На рисунке 43 изображен график функции $y=x^2+1$, $-2\leqslant x\leqslant 2$. Пользуясь этим чертежом, изобразить от руки график функции $y=x^2+0{,}3$. Проверить правильность сделанного эскиза: вычислить значения функции $y=x^2$ при $x=\pm 0{,}5$; $\pm 1{,}5$ и отметить точки графика. Каким преобразованием можно перевести график функции $y=x^2+1$ в график функции $y=x^2$?

Цель задания — согласовать зрительный образ графика, его геометрические свойства и формулу. График функции $y=x^2+0{,}3$ симметричен относительно оси ординат, значит, рисунок не должен быть скошенным. Его симметричность подчеркивается симметричным расположением «пробных» значений аргумента. Положение точек на чертеже должно выправить распространенную неточность в изображении графиков квадратичных функций: нарисованные от руки ветви параболы, как правило, расположены гораздо шире, чем должны быть. Поэтому пробные точки (их ординаты вычисляются по условию, а не ищутся по чертежу) попадают в полосу между изображенными линиями. То, что графики сближаются по мере удаления от начала координат, требует пояснений, которые можно сделать при обсуждении.

Приведем еще один пример заданий рассматриваемого здесь типа, относящийся к пропедевтике систематической работы над приближенными вычислениями и в более общем плане к формированию полноценных представлений о приложениях математики.

Пример 6. В таблице приведены значения некоторой величины, равномерно меняющейся со временем. Однако за счет неизбежных погрешностей в измерениях, невозможности строго выдерживать заданный режим заметны небольшие отклонения от равномерности. Указать закон изменения скорости в заданном промежутке и отклонения от него, имеющиеся в таблице.

t, мин	2	3	4	5	6
v, км/ч	20	30,1	39,8	50	60,1

§ 27. Изучение функции в классе элементарных функций

Значительная часть материала функциональной линии относится к изучению класса функций, получивших название элементарных (см. [57]). К элементарным принадлежат целые функции, рациональные функции, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, а также различные их комбинации. Как отмечалось в главе 5, все эти функции тесно связаны с гомоморфизмами числовых групп, т. е. имеют единообразное математическое описание. Они также изучаются посредством сходных методических приемов. Вопросы методики изучения этого класса функций, связанные с тождествами для них и с соответствующими им классами уравнений и неравенств, уже были рассмотрены в главах 5 и 6. В этом параграфе мы рассмотрим вопросы, характерные для элементарных функций именно в функциональном плане.

Прежде всего, остановимся на операциях, посредством которых строится это семейство. Имеются две группы таких операций:

арифметические (сложение и т. д.) и операции композиции и обращения функций. Имеется резкое различие между характером изучения этих операций в курсе школьной математики. Рассмотрим сначала изучение операций первой группы.

Введение арифметических операций с функциями (числовыми) в современном школьном курсе математики производится неявно. Определения таких операций отсутствуют. Поэтому, строго говоря, такие выражения, как $f+g$, с точки зрения школьной математики не осмыслены, хотя иногда (но очень редко) к ним приходится прибегать: «Производная суммы равна сумме производных...» — в этой формулировке речь идет именно о сумме функций. Положение облегчается тем обстоятельством, что арифметические операции с числовыми функциями очень просто, очевидным в подавляющем большинстве случаев способом связаны с одноименными арифметическими числовыми операциями. По существу, здесь учитель сталкивается с одним из проявлений переноса действий из одной области в другую, причем он происходит в процессе обучения неосознанно. Целесообразно сделать этот перенос осознанным, рассматривая такие задания, в которых требуется сравнить значения $(f+g)(x)$ и $f(x)+g(x)$ или аналогичные значения для других одноименных функциональных и числовых операций. Приведем примеры таких заданий.

Пример. а) Даны многочлены $2x^2-1$ и $x-5-2x^2$. Вычислить сумму этих многочленов при $x=0{,}5$. б) Рациональное выражение $\frac{2}{(x^2-1)}$ можно представить в виде $\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x+1)}$. Пользуясь таким представлением, найти разность функций $f(x)=(x-1)^{-1}$ и $g(x)=(x+1)^{-1}$ в точках $x=2$; 1,25. Вычислить значение функции $f(x)=\frac{1}{x-3}\cdot\lg(x-3)$ при $x=3{,}35$, пользуясь таблицами Брадиса (или компьютером).

Как видно, все задания фактически должны быть выполнены по формуле, приведенной перед этим примером. Это обстоятельство целесообразно выявить учащимся, поставив вопрос: каким из двух способов вычисления значений данного выражения проще провести выкладки? Для первых двух заданий ясно, о каких способах идет речь. В третьем задании нужно просто отметить, что требуемое значение вычисляется по частям: сначала находится значение $\frac{1}{3{,}35-3}$, потом $\lg 0{,}35$, затем полученные числа перемножаются.

Рассмотренная особенность изучения арифметических действий с функциями отражается и в работе с графиками элементарных функций. За небольшими исключениями и в курсе алгебры, и в курсе алгебры и начал анализа старших классов наблюдается отчетливая тенденция избегать построения графиков функций $f\pm g$, fg, f/g. В итоге практически недоступным оказывается построение даже таких сравнительно несложных графиков, как в примере из § 25, п. 1: $y=x+\frac{1}{x}$. Графики функций непосредственно связаны

с изучаемыми классами функций, и это отрицательно сказывается на формировании общих приемов построения. Например, построение графика функции $y=x-\sqrt{x}$ затруднено не только из-за того, что данная функция есть разность функций с известными «основными» графиками, но также из-за того, что эти графики рассматриваются в различных темах, совместно не встречаются. Учитывая это обстоятельство, а также важность развития графических представлений, необходимо всеми возможными способами добиваться совершенствования навыков построения графиков функций. Поскольку приемы «сложение графиков» и т. п. выходят за пределы программы, полезно строить такого типа графики комбинацией двух приемов: по точкам и учитывая простейшие особенности тех функций, которые составляют формулу данной функции (область определения, характер возрастания, четность — нечетность, периодичность, нули и т. д.). Возможность применения производной к построению графиков в старших классах существенно расширяет методы, которые при этом могут быть использованы.

Изучение операций второй группы (композиция функций и нахождение обратной функции) построено иначе. Эти операции не имеют аналогов в операциях с числами (а сходство терминов — обратная функция и обратное число — может только вводить в заблуждение), опоры для переноса нет, поэтому приходится вводить их посредством явного определения. Каждая из этих операций используется в изучении теоретического материала; например, упоминание о композиции функций (сложная функция) имеется в формулировке теоремы о производной сложной функции. Роль обратной функции намного больше. Использование обратной функции необходимо для введения большого количества классов основных элементарных функций: корня k-й степени, логарифмической, обратных тригонометрических функций. Поэтому понятие обратной функции необходимо отнести к числу важнейших общих понятий в составе функциональной линии. При изучении обратной функции выясняется зависимость ее монотонности от монотонности исходной функции — это необходимо для того, чтобы обосновывать существование обратной функции и подробно рассматривать взаимное расположение графиков данной и обратной функций.

В цели изучения элементарных функций в курсе алгебры входит создание первоначальных представлений о непрерывности. Эти представления используются систематически при построении графиков; описанный выше прием «загущения» использует именно непрерывность и может послужить отправной точкой для работы по формированию соответствующих представлений. Они используются при изучении квадратного корня, при определении показательной функции, при рассмотрении графического метода решения уравнений и неравенств. В работе над этими понятиями и темами полезно использовать обороты речи типа «функция плавно меняется при изменении значений аргумента», «функция принимает значения, близкие между собой, если близки значения аргумента» и т. п.

В связи с обсуждаемым здесь вопросом отметим, что представление о непрерывности, возникающее в курсе алгебры, и даже в курсе алгебры и начал анализа, нельзя считать достаточно полным и прочным. В школьном курсе математики непрерывность представляет собой одну из сторон качественной определенности (числовой) функции, характеризации самого понятия функции. Поэтому понимание таких явлений, как разрывность функции $y=[x]$ и в то же время непрерывность функции $y=\frac{1}{x}$, оказывается чрезвычайно затрудненным. Полное понимание таких явлений — задача следующего этапа овладения математикой уже в высших учебных заведениях.

Глава 9. ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 28. Методика изучения предела и непрерывности функции

1. Понятие предела и непрерывности функции в учебной и методической литературе. Понятия предела функции и непрерывности функции относятся к числу самых сложных для усвоения понятий школьного курса математики. Естественно, что в поисках совершенствования методики изложения соответствующих разделов курса появляются различные варианты. Это относится к порядку изложения и к содержанию материала.

В некоторых учебных пособиях сначала вводится определение непрерывности. Чаще всего при этом в той или иной форме используются сведения из приближенных вычислений. Определение предела функции при этом опирается на определение непрерывности. Такой подход к порядку изложения часто объясняют тем, что понятие непрерывности считают более простым, хорошо знакомым из практики.

Но чаще изложение начинают с введения определения предела функции, а непрерывность вводится на его основе. Определение предела дается с разной степенью строгости. Например, в учебном пособии [25] формулировка определения такова: «Число называется пределом f при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, будет выполнено неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$». При переработке пособия это определение заменили другим [24]: «Число b называется пределом функции f в точке a, если для любого $\varepsilon>0$ при всех $x \neq a$, достаточно близких к a, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$». Приведенное выше определение дается в качестве необязательного.

В дальнейшем раскрытии темы мы будем исходить из последнего определения предела функции в точке и рассматривать предел как основное понятие, на котором строится непрерывность. Учитывая, что

в курсе алгебры и начал анализа допускается усвоение предела на наглядно-интуитивной основе, будем широко использовать наглядно-графические представления. Понятия, связанные с приближенными вычислениями, использованы не будут, поскольку их усвоение не всегда достигает уровня, позволяющего применять их при работе над введением предела и непрерывности. Иной подход к роли приближенных вычислений в формировании основных понятий математического анализа представлен в § 30.

2. Подготовка учащихся к изучению понятий предела и непрерывности функции, теорем о пределах. Чтобы наметить направления подготовительной работы к введению предела и непрерывности, проанализируем, с какими понятиями и представлениями учащиеся сталкиваются при изучении этих тем, какими навыками они должны обладать.

Выделим прежде всего группу вопросов, связанных с понятием функции. Учащиеся должны знать определение функции, способы задания функции, в частности несколькими формулами на различных промежутках из области определения. Они должны владеть нужной символикой, свободно строить графики функций, которые будут приводиться в качестве примеров (линейная, квадратичная функции, степенная функция с целым показателем и т. д.). Этот материал накапливается постепенно при изучении функциональной линии курса алгебры, так что к IX классу учащиеся должны располагать достаточным запасом функций, непрерывных и разрывных, свойства которых можно использовать при введении понятий предела и непрерывности.

При формулировке определений учащимся понадобится знание неравенств с модулями. Это также должно найти отражение в подготовительной работе. Приведенная ниже последовательность заданий дает представление о характере этой работы:

1. Записать, используя знак модуля, следующие предложения: а) расстояние между точками, изображающими на координатной прямой числа 3 и 7, равно 4 (далее будем говорить короче: «Расстояние между точками 3 и 7» и т. п.); б) расстояние между точками x и (-3) равно 1; в) расстояние между точками x и a равно δ.

2. Вторая группа заданий аналогична первой, но отношение равенства расстояний заменяется отношением «меньше».

3. Найти расстояние между точками и записать решение при помощи знака модуля: а) 5 и 3; б) 4 и x и т. д.

4. Решить уравнения, решение проиллюстрировать на чертеже: а) $|x-3|=2$; б) $|x+3|=2$; в) $|3-x|=2$ и т. д.

5. Решить неравенства, решение проиллюстрировать на чертеже: а) $|x-3|<2$; б) $|x+3|<2$; в) $|x-3|<\varepsilon$ и т. д.

3. Работа над определением предела функции в точке. Рассмотрим примеры, которые подготавливают учащихся к пониманию текста определения. В число примеров включены такие случаи, где предел при $x \to a$ (это синоним термина «предел в точке a») совпадает со значением функции в точке a,— ведущий случай; предел существует, но не совпадает со значением функции в точке a;

предел существует, а функция в точке a не определена. Примеры не должны быть сложными в вычислительном отношении, потому что внимание учащихся необходимо сосредоточить на выделении существенных признаков понятия.

Пример 1. $f(x)=2x+3$, $x\to 1$.

Пример 2. $f(x)=1{,}5x+3$, $x\to 2$.

Пример 3. $f(x)=\dfrac{1{,}5(x^2-4)}{x-2}$, $x\to 2$.

Пример 4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1{,}5(x^2-4)}{x-2} & \text{при } x\neq 2,\ x\to 2,\\ 3 & \text{при } x=2.\end{cases}$

Пример 5. $f(x)=x^2$, $x\to 3$.

Сначала ставится задача выяснить, к какому числу стремится значение функции, когда x стремится к указанному числу a, т. е. каков предел $f(x)$ при $x\to a$. Затем уже учащиеся подводятся к точному смыслу утверждения «предел $f(x)$ при x, стремящемся к a, равен числу b». В объяснении для создания представления о пределе могут использоваться, кроме слова «стремиться», и его синонимы: «приближаться», «подходить» и др. Приведем методику работы с указанными заданиями.

Здесь следует остановиться на двух этапах выполнения задания.

Первый этап. Строим график функции $y=2x+3$. Находим значение функции при $x=1$, оно равно 5. Отмечаем на оси абсцисс точку 1, а на оси ординат точку 5 (рис. 44 a). Давая теперь переменной x значения, все более близкие к числу 1, и отмечая соответствующие им значения на оси ординат, убеждаемся, что построенные на оси y точки приближаются к точке 5. При этом построенные точки на оси y могут стать как угодно близкими к 5: для этого нужно на оси абсцисс взять точки, достаточно близкие к 1. Иначе, значения y как угодно мало отличаются от значения функции в точке 1, если значения аргумента достаточно близки к 1. (Если использовать построение ε-полосы, то концы перпендикуляров, изображающих зна-

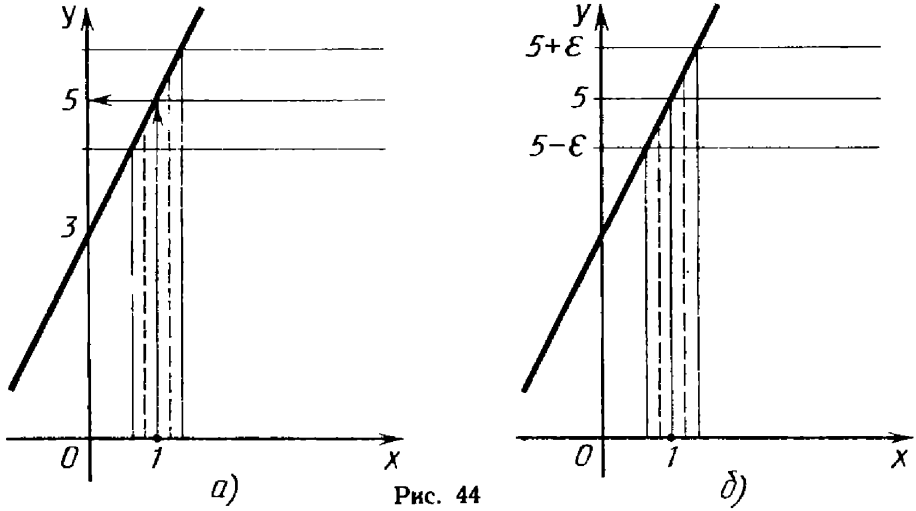


Рис. 44

чения функции, отличающиеся по модулю от 5 меньше чем на ε, попадают внутрь ε-полосы, см. рис. 44 *б*.)

Второй этап. Уточним смысл последнего утверждения. Расстояние между точками оси x и точкой 1 запишем так: $|x-1|$; расстояние между соответствующими точками оси y: $|f(x)-5|$. Таким образом, число $|f(x)-5|$ может стать как угодно малым, если достаточно мало число $|x-1|$. Подтвердим эти наблюдения выкладками.

$$|(2x+3)-5|=|2x-2|=2|x-1|.$$

Выберем какое-либо положительное число, например 0,1. Найдем, какому условию должны удовлетворять значения x, чтобы было верным неравенство $|f(x)-5|<0{,}1$:

$$2|x-1|<0{,}1, \quad (1)$$
$$|x-1|<0{,}055. \quad (2)$$

Неравенства (1) и (2) равносильны. Поэтому если выполняется (2), то выполняется и неравенство (1), значит, при выполнении условия (1) $|(2x+3)-5|<0{,}1$. Аналогично рассуждения проводятся для 0,01; 0,001 и т. д. Вообще, взяв произвольное положительное число ε и рассматривая неравенство

$$|(2x+3)-5|<\varepsilon, \text{ т. е. } 2|x-1|<\varepsilon, \text{ получим } |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Наоборот, если $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$, то $2|x-1|<\varepsilon$, т. е. $|(2x+3)-5|<\varepsilon$.

Обозначив $\frac{\varepsilon}{2}$ буквой δ, можно сформулировать полученный вывод так: для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что $|2x+3-5|<\varepsilon$, как только $|x-1|<\delta$.

Пример 1 не дает еще оснований для исключения числа a из множества тех значений x, для которых должно выполняться неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$, поэтому до введения определения предела надо рассмотреть еще примеры 3 и 4. Пример 2 позволит сделать это легче, поэтому сначала можно рассмотреть его. Работу с ним можно провести аналогично примеру 1, но не так подробно, например сразу взять произвольное положительное число ε. Получим, что если $|x-2|<\frac{2}{3}\varepsilon$, то $|f(x)-6|<\varepsilon$.

В примере 3 функция $f(x)$ не определена при $x=2$. При остальных значениях x ее значения совпадают со значениями функции $f(x)=1{,}5(x+2)=1{,}5x+3$, рассмотренной в примере 2. Поэтому относительно нее можно построить все приведенные в примере 2 рассуждения. Итак, для произвольного положительного числа ε найдется такое положительное число δ $(\delta=\frac{2}{3}\varepsilon)$, что для всех значений x, отличных от числа 2 и удовлетворяющих условию $|x-2|<\delta$, т. е. $0<|x-2|<\delta$, выполняется условие $|f(x)-6|<\varepsilon$. Число 6 называется пределом функции $\frac{1{,}5(x^2-4)}{x-2}$ при $x\to 2$.

Сравнивая примеры 2 и 3, видим, что в 2 функция определена в точке 2 и предел совпадает со значением функции в этой точке,

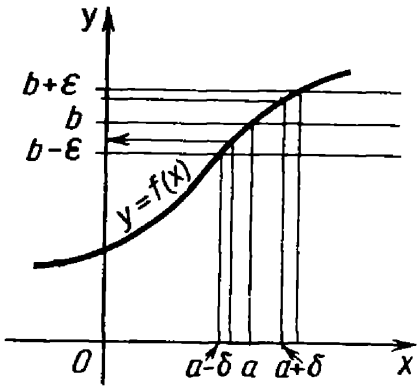


Рис. 45

а в 3 функция в точке 2 не определена, но на пределе это не отразилось.

Рассмотрим еще пример 4. Здесь функция в точке 2 определена, ее значение равно 3. В точках, отличных от точки 2, функция определяется по той же формуле, что и две предыдущие. Убеждаемся, что и в этом случае $|f(x)-6|<\varepsilon$ всякий раз, когда $0<|x-2|<\frac{2}{3}\varepsilon$. И здесь число 6 называется пределом функции $f(x)$ при $x\to 2$.

После этой подготовительной работы дается определение предела функции $f(x)$ при $x\to a$, или предела $f(x)$ в точке a. Можно дать геометрическую иллюстрацию (рис. 45).

Если определение на языке ε—δ не предусматривается, то можно ограничиться теми построениями и рассуждениями, которые приводились выше в примере 1, но без перехода к произвольному ε. В заключение можно сказать, что проведенные построения и рассуждения иллюстрируют мысль: если значения x неограниченно приближаются (стремятся) к a, то значения $f(x)$ неограниченно приближаются к b; число b называют пределом функции $f(x)$ при $x\to a$ или пределом в точке a.

Особое место занимает пример 5. Выкладки, связанные с доказательством того, что число 9 является пределом функции $f(x)=x^2$ при $x\to 3$, носят довольно искусственный характер. Рассмотреть этот пример нужно, чтобы у учащихся не создавалось впечатление, что определение предела формулируется лишь для тех случаев, которые сводятся к рассмотрению линейной функции, но можно ограничиться лишь графической иллюстрацией.

При изложении этого раздела удобно применять кодопозитивы (для предъявления графиков, построения ε-полосы и т. д.).

4. Методика изучения теорем о пределах. Теоремы о пределе суммы, произведения, частного функций даются учащимся без доказательства. Естественно, что, прежде чем формулировать эти теоремы, следует разъяснить, что понимается под суммой функций, произведением, частным. Например, когда речь идет о сумме функций, то имеют в виду функцию, областью определения которой является пересечение областей определений данных функций, а значение в каждой точке области определения находится как сумма значений данных функций в этой точке. Аналогично определяется произведение и частное данных функций (когда речь идет о частном $\frac{f(x)}{g(x)}$, из пересечения областей определения $f(x)$ и $g(x)$ исключаются те значения x, при которых $g(x)=0$).

Кроме того, надо обратить внимание учащихся на то, что в условие теоремы входит существование предела функций $f(x)$ и $g(x)$ в данной точке a. Применять теоремы можно только при выполнении этого условия.

5. Введение понятия непрерывности функции в точке. Набор примеров, который был рассмотрен при введении понятия предела функции, дает материал и для знакомства с непрерывностью функции. Интуитивное представление о непрерывности создается у учащихся и в процессе изучения функциональной линии курса алгебры. Эти представления надо использовать при введении определения. На первых порах можно исходить из того, что учащиеся будут считать непрерывной функцию, графиком которой является непрерывная кривая.

Приведем задания, которые можно рассматривать перед введением понятия непрерывности в точке:

1) $f(x)=x^2$;

2) $f(x)=\{x\}$; 3) $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } x>0, \\ 0 \text{ при } x=0, \\ -1 \text{ при } x<0; \end{cases}$

4) а) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$; б) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} \text{ при } x\neq 2, \\ 4 \text{ при } x=2; \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} \text{ при } x\neq 2, \\ 1 \text{ при } x=2; \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} \text{ при } 0<x<2, \\ 2x \text{ при } x\geqslant 2; \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} \text{ при } 0<x<4, \\ x-2 \text{ при } x\geqslant 4. \end{cases}$

Среди приведенных примеров есть такие, где предел функции в точке существует и совпадает со значением в точке; есть такие, где предел функции в точке существует, но не равен значению функции в точке.

После рассмотрения примеров, организация которых в общих чертах аналогична приведенной в п. 3, дается определение: «Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если она в этой точке определена и предел ее в этой точке равен ее значению в точке a, т. е.

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).»$$

Следует подчеркнуть при работе над определением, что в него входят три существенных компонента: 1) функция должна быть о п р е д е л е н а в точке a; 2) предел функции в точке a должен с у щ е с т в о в а т ь; 3) этот предел должен быть р а в е н з н а ч е н и ю функции в точке a. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, в точке a функция не является непрерывной.

Теперь можно вернуться к рассмотрению заданий и выяснить, почему в тех или иных точках функция не является непрерывной.

Хорошим упражнением в применении понятий предела функции и непрерывности, в использовании теорем о пределе суммы, произведения и частного функций является доказательство непрерывности

целых и дробно-рациональных функций. О каждой доказывается, что предел в любой точке области определения для данной функции равен значению функции в этой точке; для этого применяются теоремы о пределах.

В виде упражнения можно предложить доказать теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного функций. Доказательство требует только знания определения непрерывности в точке и теорем о пределах для соответствующих арифметических операций.

§ 29. Методика введения понятия производной

1. Сравнение различных формулировок определений производной. В книге [27] предлагается следующая схема введения определения производной.

Определение. Функция f называется дифференцируемой в точке a, если ее приращение при переходе от a к $a+h$ можно записать в виде $f(a+h)-f(a)=(k+\alpha)h$, где k — число (зависящее от a), а α — функция, бесконечно малая при $h\to 0$.

Пусть функция дифференцируема на промежутке X. Тогда для каждой точки $x\in X$ приращение функции f при переходе от x к $x+h$ можно записать в виде

$$f(x+h)-f(x)=(k+\alpha)h, \tag{1}$$

где k — число, зависящее от x, а α — функция, бесконечно малая при $h\to 0$. Для каждой точки x вычисляется свое значение k. Этим определяется новая функция, заданная на промежутке X, которая каждому $x\in X$ ставит в соответствие значение коэффициента k в точке x. Эту функцию называют производной функции f и обозначают f'. Таким образом, $k=f'(x)$, и потому формулу (1) можно переписать:

$$f(x+h)-f(x)=(f'(x)+\alpha)h,$$

откуда

$$f'(x)+\alpha=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{2}$$

По определению предела функции в точке это означает, что

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{3}$$

Верно и обратное: из (3) следует (2) и (1). Отсюда следует, что определение производной можно сформулировать следующим образом: «Производной функции f называют новую функцию f', значение которой в точке x определяется формулой

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}».$$

При получении формул дифференцирования пользуются последним определением.

Более распространен следующий подход к определению производной (см. [24] и [25]): «Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения Δf функции f в точке x_0 к приращению Δx, когда Δx стремится к нулю, т. е.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{».}$$

Это определение записывается здесь же [25] в другой форме:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Далее вводится термин «дифференцирование» и понятие производной как функции. Формулы дифференцирования записываются уже для произвольной точки x. Заметим, что в ряде учебников говорят не о производной в точке x_0, а о «производной при $x\to x_0$». Общепринятый сейчас термин «производная в точке» представляется более удачным: он короче и создает преемственность с термином «предел функции в точке». Важно, однако, чтобы учащиеся понимали различия в использовании слова «точка» (например, «производная в точке» и «точка касания»). На первых порах точку, в которой ищется производная, целесообразно обозначить x_0 (а не x), чтобы нагляднее отобразить соответствие x_0 с $f'(x_0)$.

Обозначение аргумента через x используется тогда, когда производная начинает рассматриваться как функция; при этом в каждой конкретной задаче, например при выводе формул дифференцирования, следует отмечать, что предел находится при условии $\Delta x\to 0$, а значения x и Δx независимы, т. е. x рассматривают как постоянную.

При решении некоторых прикладных задач, например в определении физических величин с помощью производной (скорость — производная пути по времени, ускорение — производная скорости по времени и др.), указывают, по какой переменной находится производная. На этапе введения понятия производной вводить эти уточнения нецелесообразно, так как при этом рассматриваются функции одного аргумента. Точно так же в определении производной мы не будем включать указание на то, что x_0 и $x_0+\Delta x$ принадлежат области определения функции, поскольку x_0 принадлежит этой области определения вместе с некоторым интервалом, содержащим точку x_0. Таким образом, будем рассматривать функцию $y=f(x)$, определенную в некотором интервале $(a; b)$ (конечном или бесконечном), и при условии $x_0\in(a; b)$, $x_0+\Delta x\in(a; b)$ будем использовать такое определение: «Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения Δf функции f в точке x_0 к приращению Δx, когда Δx стремится к нулю:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{».}$$

Важно, чтобы ученики запомнили символическую запись и хорошо понимали смысл входящих в нее символов; тогда, вообще говоря, отпадает необходимость в заучивании словесной формулировки определения. После введения определения производной в

точке устанавливается, что если указанный предел существует, то можно рассматривать функцию $y=f'(x)$, заданную на этом множестве указанным равенством. Достоинством такого определения является то, что оно прямо связано с определением предела функций в точке и не требует дополнительного понятия бесконечно малой.

2. Пропедевтика понятия производной. Направления пропедевтики понятия производной определяются выбранным подходом к определению и характером задач, которые предполагается решать, подводя учащихся к необходимости введения понятия производной.

Основная идея дифференциального исчисления — представление о функции как линейной в достаточно малой окрестности точки. Отсюда первое направление пропедевтики — глубокое изучение линейной функции.

Второе направление — работа над понятиями приращения аргумента и приращения функции. При введении определения производной учащиеся должны отчетливо представлять, что в этом случае отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ $\left(\text{или } \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ является функцией Δx; на ряде примеров необходимо подготовить понимание этого факта. Исключительно важны для дальнейшего геометрическая и механическая интерпретации отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Третье направление — введение понятия касательной к кривой. Поскольку задача о проведении касательной к кривой сыграла огромную роль в создании математического анализа, послужив математической моделью для большого числа различных естественнонаучных задач, ей уделяется большое внимание в учебной литературе по математическому анализу. Для школьного курса начал анализа она играет основную роль при формировании геометрической интуиции, связанной с понятием производной.

Остановимся подробнее на каждом из выделенных направлений.

1) К моменту введения производной учащимся должно быть известно определение линейной функции, вид ее графика и утверждение: всякая прямая, не параллельная оси ординат, является графиком некоторой линейной функции. Важно, чтобы учащиеся имели отчетливое представление об угле, составленном прямой с осью абсцисс (величину этого угла будем называть углом наклона прямой).

Говоря об угле наклона, будем различать три случая: прямая параллельна оси x — тогда угол наклона считается равным 0; прямая перпендикулярна оси x, т. е. не является графиком функции (угол наклона 90°); прямая не параллельна и не перпендикулярна оси x. В последнем случае будем рассматривать угол, вершиной которого является точка пересечения данной прямой с осью x, а сторонами — луч, имеющий положительное направление оси x, и луч, образованный пересечением данной прямой с верхней полуплоскостью. Таким образом, угол наклона прямой удовлетворяет неравенству $0° \leqslant \alpha < 180°$. Заметим, что если график функции распо-

ложен в нижней полуплоскости, то учащиеся иногда делают ошибку, считая углом наклона касательной величину угла MBX (рис. 46). От этой ошибки их надо предостеречь.

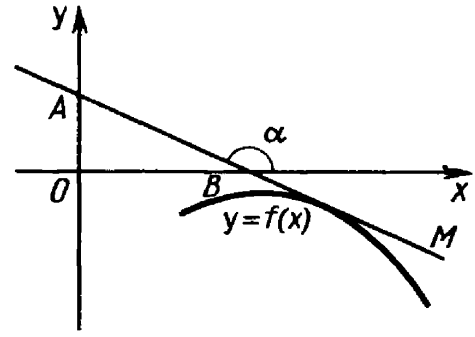


Рис. 46

Основная часть сведений о связи линейной функции и ее графика содержится в следующем утверждении, усвоение которого служит главным итогом данного направления пропедевтики: если линейная функция задана формулой $y=kx+b$, то тангенс угла наклона прямой, являющейся графиком этой функции, равен k.

2) При введении понятий приращения аргумента и приращения функции удобно использовать обозначения Δx, Δy, $\Delta f(x)$ (а не обозначать их одной буквой), так как видно, приращение какой переменной рассматривается. Следует предупредить учащихся о том, что символ Δ заменяет слово «разность», но его нельзя отрывать от обозначения переменной, стоящей следом за Δ. Основные равенства, содержащие этот символ, таковы:

$$x-x_0=\Delta x, \quad \text{т. е.} \quad x=x_0+\Delta x;$$
$$f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0), \quad \text{т. е.} \quad f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x_0).$$

Подчеркнем роль геометрических иллюстраций. На рисунке показано, что приращение аргумента может быть положительным, отрицательным, равным нулю; то же показано и для приращения функции (рис. 47).

Среди упражнений на закрепление введенных определений должны быть такие, где требуется найти приращение функции в точке x, соответствующее приращение аргумента Δx, а затем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Важно научить находить $f(x_0+\Delta x)$ в каждом конкретном случае.

Примеры. Найти $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если: а) $y=x^2$; б) $y=x^3$; в) $y=3x^2+2x+1$; г) $y=ax^2+bx+c$; д) $y=kx+b$.

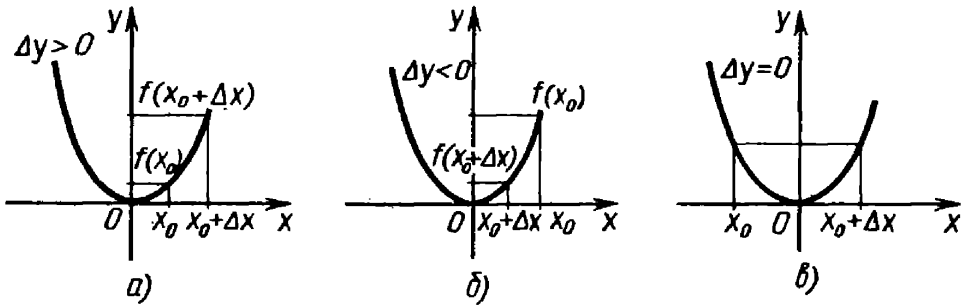


Рис. 47

Полезно заметить, что в каждом из этих примеров отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можно рассматривать как функцию Δx, поскольку в дальнейшем при отыскании производных придется ставить вопрос об отыскании предела этой функции при $\Delta x \to 0$. С этой же точки зрения полезно уже сейчас вычислить $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для тех функций, производные которых нужно будет находить.

Здесь же отмечается характерная особенность линейной функции: для нее отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постоянно и равняется угловому коэффициенту графика. Можно доказать, что и, наоборот, если для некоторой функции отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постоянно, то функция линейна.

Полезно выяснить, что когда в некотором промежутке положительному Δx соответствует положительное Δy (или $\Delta x < 0$ соответствует $\Delta y < 0$), то функция в этом промежутке возрастает; верно и обратное утверждение. Условие совпадения знаков Δx и Δy иначе можно записать как $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$; таким образом, если $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, то на промежутке, где это неравенство выполняется, функция возрастает, и обратно, т. е. условие $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ можно принять за определение возрастающей функции. Аналогично рассматривается связь убывания функции и условия $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

Целесообразно здесь же выяснить геометрический смысл отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, причем следует рассмотреть случаи, когда $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Будем пользоваться тем, что $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ выражают длины отрезков на осях x и y. Случай, когда $\Delta x > 0$, $\Delta y < 0$, показан на рисунке 48. Из треугольника ABC $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{|\Delta y|}{\Delta x}$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $|\Delta y| = -\Delta y$, так как $\Delta y < 0$. Значит, $-\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\operatorname{tg}\alpha$, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$. Аналогично рассматриваются и другие случаи при $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0$.

Случай, когда $\Delta y = 0$, рассматривается отдельно. Здесь секущая параллельна оси x, угол наклона ее равен 0°. Поэтому тангенс этого угла равен 0, и, с другой стороны, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Таким образом, устанавливается, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона секущей, проведенной через точки графика с абсциссами x и $x + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$).

При возрастании функции $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha > 0$, и угол наклона

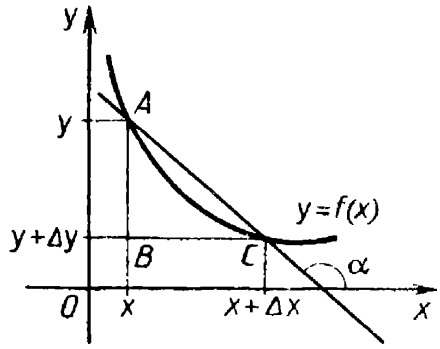


Рис. 48

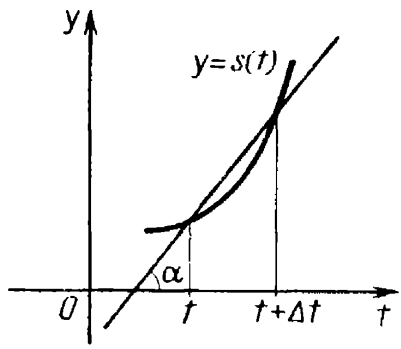


Рис. 49

секущей поэтому острый. Наоборот, если секущие, проводимые через любые две точки графика функции, составляют острый угол с осью абсцисс, то функция возрастает. Аналогично рассматривается и связь убывания функции с положением секущей относительно графика функции.

Вопрос о геометрическом смысле отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, естественно, связан с физическим смыслом этого отношения. Чтобы установить эту связь, рассматриваются физические ситуации, в которых указывается формула зависимости пути от времени $s=vt$ и требуется выяснить физический и геометрический смысл зависимости по ее графику: $s=vt$ (v — скорость); $s=v_0t+\frac{at^2}{2}$ (v_0 — начальная скорость, a — ускорение); $s=\frac{gt^2}{2}$ (g — ускорение свободного падения).

Обобщая решение этих задач, можно сказать, что отношение приращения пути Δs к приращению времени Δt есть средняя скорость движения на промежутке времени Δt (в первом случае, где $s=vt$, это скорость равномерного движения). Как и в предыдущих случаях, можно сделать вывод о геометрическом смысле отношения $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; это тангенс угла наклона секущей (рис. 49).

Отправляясь от разобранных примеров, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можно интерпретировать как среднюю скорость изменения любой функции на промежутке с концами x и $x+\Delta x$.

3) Перейдем к пропедевтике определения касательной, причем нас главным образом будет интересовать касательная к графикам функций. До сих пор термин «касательная» использовался только по отношению к окружности, легко усваивается смысл этого термина и по отношению к любой выпуклой кривой. Например, даже без специальной подготовки учащиеся называют касательной к параболе $y=x^2$ в начале координат ось абсцисс (а не ось ординат, хотя она пересекает параболу т о ж е т о л ь к о в о д н о й т о ч к е). Общий смысл слова «касается» позволяет проводить касательные и в более сложных случаях, например к синусоиде в точках

с абсциссами $\frac{\pi}{2}(2k-1)$ и даже тогда, когда касательная к кривой в одной ее точке пересекает эту кривую в другой точке. Только случай, когда касательная пересекает кривую в точке касания, вызывает недоумение учащихся на первых этапах изучения этого понятия. В число примеров, которые обсуждаются с учащимися в связи с подготовкой к изучению касательной, необходимо включать и простые, согласующиеся с неразвитой еще интуицией, и сложные, направленные на выделение существенных признаков понятия и отказ от несущественных.

Приведенные на рисунке 50 примеры показывают, что число общих точек с кривой несущественно. Расположена ли кривая по одну сторону от прямой в точке касания или по разные, тоже несущественно. Например, на рисунке 50 *е* график расположен по одну сторону от оси x и от каждой прямой AB, CD, но ни одна из них не является касательной к графику $y=x$ в начале координат. Особое внимание обратим на случай ж): здесь, отчасти в противоречие с интуицией, говорят, что кривая не имеет касательной в точке M_0, хотя можно было бы думать, что касательных две: одна к одной части кривой и другая к другой. Возможности рассмотрения таких односторонних касательных в связи с определением производ-

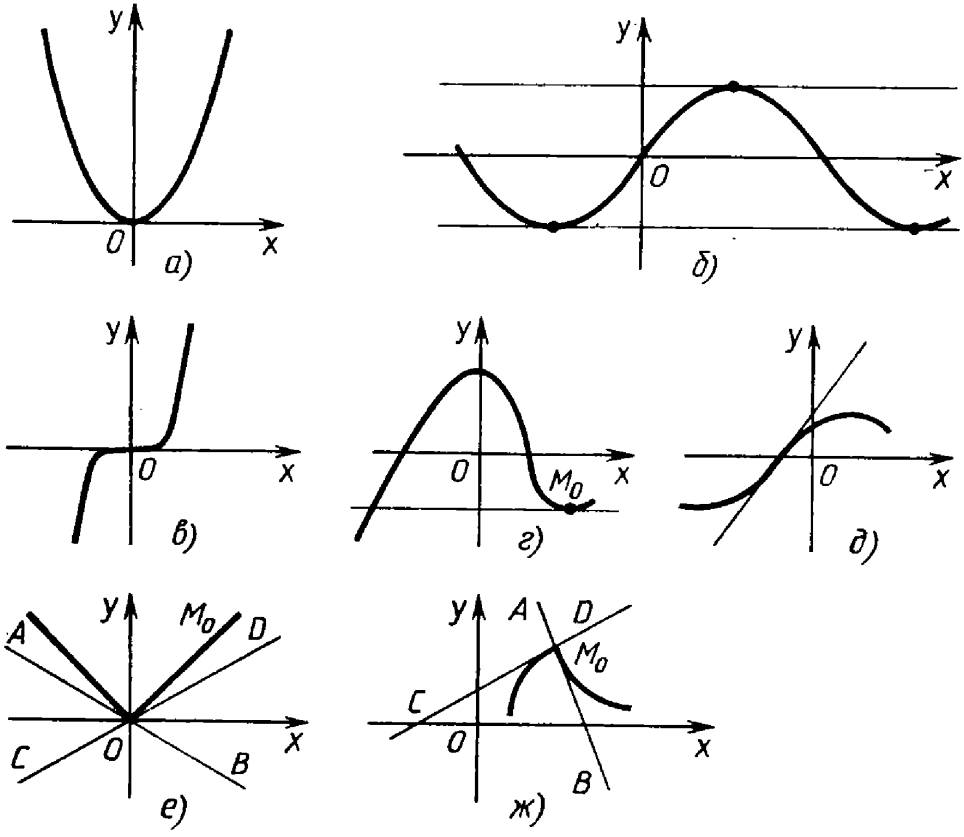


Рис. 50

ной обсуждаются в § 30. Серия чертежей, нужных для работы над понятием касательной, может демонстрироваться на плакатах и кодопозитивах.

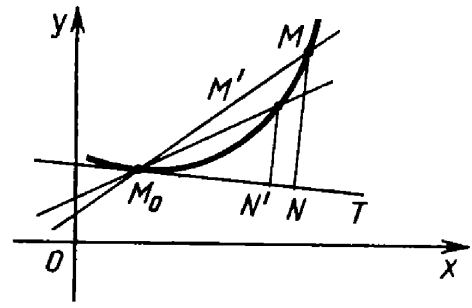


Рис. 51

Существенным для касательной является следующее свойство: среди всех прямых, проведенных через одну и ту же точку на кривой, касательная теснее всех других «примыкает» к этой кривой вблизи данной точки. Уточним это свойство. Будем рассматривать график функции $y=f(x)$ и прямые, имеющие с графиком общую точку M_0 с абсциссой x_0. Условие примыкания касательной к графику можно, используя понятие предела, описать так (рис. 51): отношение длины отрезка MN, где $MN \perp M_0T$, к длине отрезка секущей M_0M стремится к нулю, когда M неограниченно приближается к M_0 (т. е. M может попасть внутрь круга с центром в точке M_0 и радиусом, меньшим любого положительного числа). Иначе говоря, $\sin\varphi \to 0$, где φ — величина угла между секущей M_0M и касательной M_0T. Точно так же можно рассуждать о самом угле, а не о его синусе: обратить внимание на то, что угол между прямой, которую мы назовем касательной, и секущей M_0M стремится к нулю, когда M неограниченно приближается к M_0 по кривой. Здесь уместно применить известное наглядное пособие: подвижная секущая, наложенная на плакат с графиком.

В результате такой подготовки мы приходим к определению касательной как предельного положения секущих. Вернувшись к примерам на рисунке 50, видим, что в случае ж) ни одна из прямых M_0B, M_0C не является предельным положением секущих M_0M: точка M может приближаться к M_0 по кривой с любой стороны; в одном случае к нулю стремится угол между секущей и прямой M_0B, а в другом — угол между секущей и прямой M_0C. Общего предельного положения секущих нет. Аналогично обстоит дело с точкой O в случае е). Для окружности элементарно-геометрическое определение касательной совпадает с определением касательной как предельного положения секущей.

Вопросы, которые мы отнесли к пропедевтике понятия производной, могут изучаться рассредоточенно по мере введения в изложение программных вопросов. Например, понятия приращения аргумента и функции могут быть введены в VIII классе при изучении квадратичной функции, степенной функции с натуральным показателем. Знакомство с понятием касательной на интуитивной основе можно связать с изучением графиков этих же функций (проведение касательных к графикам в некоторых точках). Можно пользоваться этими понятиями при исследовании функций на возрастание и убывание, при построении графиков и графической иллюстрации физических задач.

Непосредственно перед введением определения производной этот материал можно повторить на небольшом числе характерных примеров. Вместе с тем возможен и такой вариант изложения, когда все эти вопросы излагаются концентрированно в том месте курса, где они становятся необходимыми.

3. Задачи, подводящие к определению производной; определение производной. В число задач, которые рассматриваются перед введением производной, можно было бы включить те задачи, которые лежат у истоков этого понятия: проведение касательной к кривой и вычисление скорости в данный момент времени. Первая из этих задач дается учащимся довольно трудно, поэтому мы отложим ее изучение до момента, когда можно будет воспользоваться при ее решении уже введенным понятием производной. Вторая задача более доступна, она и будет использована для подведения к определению производной.

Система задач, выступающая в роли мотивировки введения производной, должна удовлетворять определенным требованиям: задачи должны давать достаточно материала для обобщения; сюжеты их должны быть разнообразными и построенными на известном материале; количество задач должно быть ограничено, поскольку отыскание предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, лежащее в основе решения, довольно громоздко и однообразно.

Приведем систему таких задач. Основная их часть относится к рассмотрению прямолинейного движения (вычисление скорости и ускорения, аргументом служит время). В одной из задач вычисляется теплоемкость тела (аргумент — температура). Наконец, последняя, обобщающая задача — вычисление скорости изменения функции. При решении всех задач, по существу, находится производная в точке и обращается внимание на то, что можно рассматривать функцию, значениями которой являются получаемые числа.

З а д а ч а 1. Зная, что зависимость пути от времени при свободном падении тела выражается формулой $s=\frac{gt^2}{2}$, найти скорость в момент времени t_0.

Р е ш е н и е. Найдем сначала среднюю скорость, соответствующую промежутку времени Δt: $v_{ср}=gt_0+g\frac{\Delta t}{2}$; эта формула получена на этапе пропедевтики (см. п. 2). Чем меньше Δt, тем, очевидно, ближе средняя скорость, соответствующая этому промежутку, к скорости в момент времени t_0, поэтому естественно по определению принять за значение скорости в момент времени t_0 предел отношения средней скорости при $\Delta t \to 0$. При фиксированном t_0 средняя скорость является функцией Δt, т. е. можно ставить вопрос об отыскании предела этой функции при $\Delta t \to 0$. Обозначим искомую скорость $v(t_0)$. Принимая по определению $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср}=\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$, получаем:

$$v_0(t)=\lim_{\Delta t \to 0}\left(gt_0+\frac{g\Delta t}{2}\right).$$

Воспользуемся теоремами о пределах, учитывая, что g и t_0 являются постоянными: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(gt_0+\frac{g\Delta t}{2}\right)=gt_0$. Итак, $v(t_0)=gt_0$.

Если t изменяется, то каждому значению t соответствует свое значение скорости $v(t)$ (если предел существует), т. е. формулой $v(t)=gt$ задается функция с аргументом t.

Задача 2. Зависимость пути от времени выражается формулой $s=f(t)$, где s — путь, t — время. Найти скорость в момент t_0.

Задача 3. Скорость движения задана формулой $v=\varphi(t)$, где t — время, v — скорость. Найти ускорение в момент времени t_0.

Задача 4. Количество тепла, получаемого телом при нагревании от 0 °С до T °С, выражается формулой $Q=\Phi(T)$, где T — температура. Найти теплоемкость тела при заданной температуре T_0.

Задача 5. Дать определение скорости изменения функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Решение всех задач аналогично решению задачи 1. Начиная с задачи 2, полезно решения их записывать в таблицу, в последнем столбце которой можно записать и словесную формулировку того, что делается на каждом отдельном этапе вычислений:

$s=f(t)$ Найти $v(t_0)$		$y=f(x)$ Определить скорость изменения функции в точке x_0
1. Δt; $f(t_0+\Delta t)$.		1. Придаем аргументу произвольное приращение Δx и находим значение функции в точке $x_0+\Delta x$.
2. $\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$.		2. Находим соответствующее приращение функции: $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.
3. $v_{ср}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$.		3. Находим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
4. $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=$ $=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$.		4. Находим предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x\to 0$: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Последняя задача решается в общем виде, т. е. для произвольной функции $y=f(x)$, поэтому в последнем столбце окажутся записанными все этапы вычисления производной, так что остается только сформулировать определение.

Сначала, как уже говорилось, дается определение производной в точке, вводится обозначение $f'(x_0)$; выясняется, что если предел существует для каждого значения x из некоторого промежутка, то можно рассматривать функцию $f'(x)$, определенную на этом промежутке; вводятся удобные в ряде случаев обозначения y', y'_x. Функцию, имеющую производную в точке x_0, назовем дифференцируемой в точке x_0.

Далее отмечаем, что в прикладных задачах, в частности рассмотренных выше, полезно указывать переменную, являющуюся аргументом дифференцируемой функции, и говорить не просто «производная от $f(x)$», а «производная от $f(x)$ по x». С учетом этого уточнения определения, выясненные в процессе решения задач 1—5, принимают вид: скорость прямолинейного движения есть производная от пути по времени; ускорение прямолинейного движения есть производная от скорости по времени и т. д.

Уместно здесь же привести пример функции, не имеющей производной в некоторой точке, например $y=|x|$ при $x=0$.

Заметим, что если включить в число задач, предшествующих введению понятия производной, задачу о вычислении углового коэффициента касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0, то в последнем столбце таблицы появятся те же записи, но с иным описанием (тангенс угла наклона секущей, тангенс угла наклона касательной и др.).

После введения понятия производной начинается этап ее применения и изучения ее свойств. Здесь учащиеся сталкиваются с определением некоторых физических величин (скорости радиоактивного распада, скорости истечения жидкости из сосуда и др.) и с рассмотрением формул дифференцирования. Результаты, полученные при решении разобранных здесь задач, целесообразно вновь вывести из общих правил.

§ 30. О введении понятий дифференциала и производной

В этом параграфе будет рассмотрена методика изучения понятия дифференциала. Кроме того, учитывая огромную важность понятия производной, здесь приводится ряд подходов к ее введению в дополнение к рассмотренному в § 2. Различные идеи и представления, используемые в качестве ведущих при различных подходах, должны учитываться учителем в работе над этими понятиями.

Введение понятия производной функции необходимо связать с общей и основной проблемой дифференциального исчисления — проблемой исследования процесса изменения функции. При этом играет существенную роль учет психологических особенностей восприятия нового материала. А. Я. Хинчин говорил: «Весь стиль, вся эффективность, практическая действенность понятия, как правило, существенно зависят от того, в какой обстановке, в каком окружении оно впервые вошло в наше сознание» [165].

1. Понятие правосторонней и левосторонней касательной к плоской кривой. Подход к понятию производной, который излагается в этом пункте, основан на понятиях правой и левой касательных к плоским (т. е. лежащим в одной плоскости) кривым. Поскольку изложенные ранее в § 2 методические приемы, в частности пропедевтика введения производной, могут быть использованы и при излагаемом подходе, опишем только основные моменты в изучении.

Пусть дана функция $y=f(x)$ и точка $A(x_0, y_0)$ на ее графике (рис. 52). Возьмем на кривой справа от A точку $B_2(x_2, y_2)$ и слева от A точку $B_1(x_1, y_1)$ и проведем секущие через точки B_1, B_2 и точку A. При этом прямая AB_2 называется правосторонней (или правой) секущей, а прямая AB_1 — левосторонней (левой) секущей.

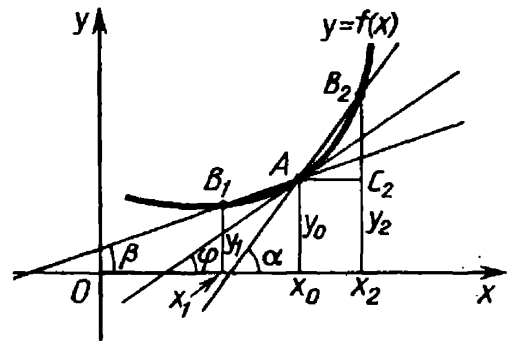


Рис. 52

Рассуждения, приводящие к выделению понятия правой касательной к кривой (графику функции $y=f(x)$) в точке A могут быть такими:

Рассмотрим правую секущую AB_2. Ее угловой коэффициент найдем из ΔAB_2C_2: $k_{\text{сек. пр}}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Пусть теперь $\Delta x\to 0$. При этом абсцисса точки B_2 приближается к абсциссе точки A справа, точка B_2 стремится к точке A, оставаясь на графике функции, а секущая AB_2 поворачивается около точки A. Если существует прямая AT, являющаяся предельным положением секущей AB_2 при приближении точки B_2 к A (по кривой), то эта прямая называется правосторонней касательной к графику функции в точке A.

Под «предельным положением секущей» понимается такое положение AT секущей AB_2, которое она примет, если угол B_2AT будет стремиться к нулю при стремлении точки B_2 к точке A вдоль графика функции. Иначе говоря, если величина угла B_2AT, рассматриваемая как функция абсциссы точки B_2, стремится к нулю при $\Delta x=x_2-x_0\to 0$, то положение AT и принимается за предельное положение секущей AB_2.

Таким образом, предельное положение правой секущей, когда ее «переменная» точка пересечения с графиком функции приближается к точке A, называется правой касательной в точке A. Из определения следует, что угловой коэффициент правой касательной $k_{\text{кас. пр}}$ равен:

$$k_{\text{кас. пр}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ при } \Delta x>0.$$

Аналогичные рассуждения проводятся для определения левой касательной. После этого может быть введено основное понятие.

Определение. Если в точке кривой правая и левая касательные существуют и совпадают, то эта прямая называется касательной.

В случае, когда касательная существует, имеем:

$$k_{\text{кас. лев}}=k_{\text{кас. пр}}=k_{\text{кас.}}$$

Следовательно, для вычисления углового коэффициента касательной к кривой нужно найти угловые коэффициенты правой и

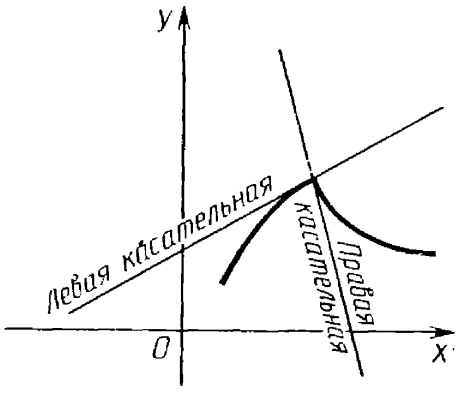


Рис. 53

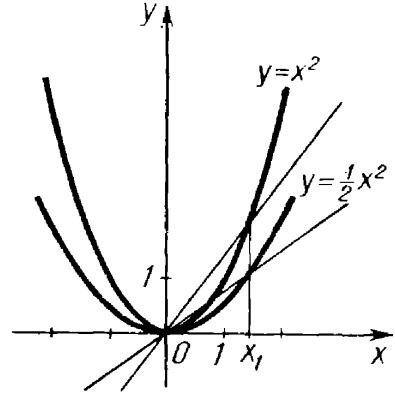


Рис. 54

левой касательных; если они равны, то угловым коэффициентом касательной будет их общее значение. Если в какой-нибудь точке угловые коэффициенты правой и левой касательных не совпадают, то кривая имеет в этой точке «излом» (рис. 53). Будем *наклоном графика* в данной точке называть угол наклона касательной, проведенной к графику в этой точке.

2. Понятие средней скорости изменения функции. Введение понятия производной производится в излагаемом подходе с использованием понятий средней и мгновенной скорости изменения функции; в дальнейшем мы приведем еще один подход, основанный на идее линейной аппроксимации (п. 6). К моменту введения производной учащиеся знакомы с понятиями возрастающей и убывающей функции и понимают смысл предложения «Одна функция возрастает быстрее другой» (или медленнее другой) — они сравнивают наклон графиков функций к оси абсцисс.

Чтобы выделить понятие средней скорости изменения функции, рассмотрим конкретные примеры. Пусть $f(x)=x^2$; $\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2$ (рис. 54). Пусть аргумент меняется в промежутке $0\leqslant x\leqslant x_1$. Используя определение возрастающей функции, можно сделать вывод о том, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[0; x_1]$ монотонно возрастают. Подсчитаем теперь средние скорости изменения (возрастания) данных функций:

$$\text{у первой функции } v_{ср}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{x_1^2}{x_1}=x_1,\ x_1>0,$$

$$\text{у второй функции } v_{ср}=\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}=\frac{1}{2}x_1.$$

Видим, что средняя скорость изменения первой функции на отрезке $[0; x_1]$ в два раза больше средней скорости изменения второй функции на этом же отрезке. Аналогичные рассуждения можно провести и при определении средних скоростей изменения на нескольких примерах.

Полученные результаты подтверждают наблюдения над расположением графиков этих функций: график первой функции на чертеже расположен «круче». Как видно из чертежа, средние скорости

изменения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[0; x_1]$ численно равны тангенсам углов наклона соответствующих секущих. Общий вывод: средняя скорость изменения функции $y=f(x)$ на отрезке $[x, x+\Delta x]$ численно равна тангенсу угла наклона секущей к графику этой функции, проходящей через точки графика с абсциссами x и $x+\Delta x$.

Рассуждения о средней скорости изменения функции желательно вести на одном из интервалов монотонности функции; в противном случае могут получиться результаты, которые на первых порах овладения этим понятием будет трудно осмыслить. Например, пусть требуется найти среднюю скорость изменения функции $f(x)=x^2$ на отрезке $[-2; 2]$. Проводя выкладки, приходим к результату $v_{ср}=0$ (рис. 55).

Находя средние скорости изменения различных функций, учащиеся приходят к выводам: 1) У одной и той же функции на различных отрезках средние скорости изменения различны. 2) Имеются функции, у которых средние скорости одинаковы на любом интервале. 3) Средняя скорость недостаточна для количественной оценки процесса изменения функции.

3. Производная функция. Теперь задача заключается в том, чтобы найти способ количественной оценки скорости изменения функции в каждой точке. Если рассмотреть график функции с различным характером изменения на отдельных интервалах, то учащиеся понимают, что в основе суждений о скорости изменения функции лежит представление о наклоне графика функции к оси абсцисс. Поставленная задача сводится, таким образом, к задаче количественной оценки наклона графика функции к оси абсцисс.

Пусть дана непрерывная функция $y=f(x)$. Поставим своей целью дать количественную оценку скорости, с которой изменялась функция при переходе аргумента через некоторое значение x (рис. 56).

Выделим на кривой $y=f(x)$ достаточно малую дугу KL, и пусть абсцисса точки L будет $x+\Delta x$. Проведем секущую KL. Величина

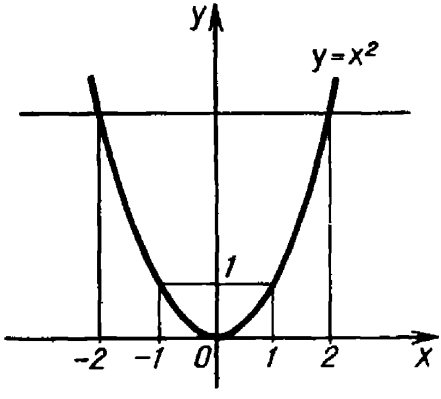


Рис. 55

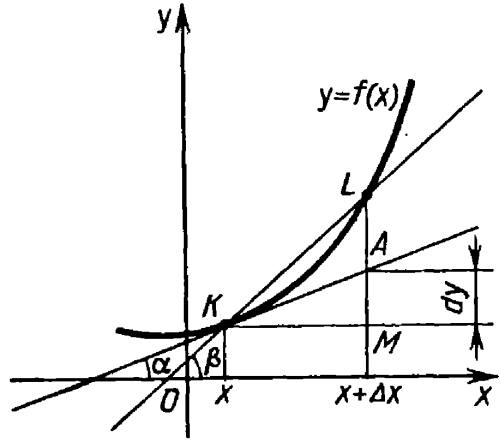


Рис. 56

угла наклона этой секущей к оси x будет приближенно характеризовать наклон дуги KL к оси x на отрезке Δx. Из треугольника KLM находим $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\beta$.

Поскольку значение аргумента изменилось на Δx и при этом значение функции изменилось на Δy, естественно отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ назвать средней скоростью изменения функции на отрезке Δx. Таким образом, $v_{ср}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\beta$, т. е. средняя скорость изменения функции на отрезке Δx численно равна $\operatorname{tg}\beta$, где β — угол наклона секущей KL.

Заметим, что характеристика наклона дуги KL будет тем точнее, чем меньше сама дуга, а это будет в том случае, когда $\Delta x\to 0$. При этом секущая будет поворачиваться вокруг точки K и стремиться занять положение касательной. Поскольку $\Delta x\to 0$, каждый раз, находя отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, будем получать средние скорости изменения функции на все меньших интервалах изменения аргумента, т. е. в пределе при $\Delta x\to 0$ получим значение мгновенной скорости изменения функции в точке x. Таким образом, поставленная задача об определении количественной характеристики скорости изменения функции в точке решена: $v_{мгн}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha$. После этого дается определение производной.

При таком подходе учащиеся приходят к понятию производной с одновременным осмысливанием ее геометрического и механического смысла.

Необходимо, чтобы учащиеся для рассматриваемых функций могли сконструировать правило (алгоритм) нахождения их производных в точке x, которое состоит в следующем:

Пусть дана непрерывная функция $y=f(x)$.

1. Фиксируем некоторое значение аргумента x и придаем ему приращение Δx.

2. Находим значение функции в точке $(x+\Delta x)$ и приращение $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$.

3. Находим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, а затем предел этого отношения:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Важно выработать у учащихся представление о том, что не всякая функция, даже непрерывная, имеет производную в каждой точке области определения. Для этого следует рассмотреть примеры, подтверждающие этот факт. Пусть, например, $f(x)=|x^2-2x-3|$ (рис. 57).

Имеем:

а) если $-1<x<3$, то $f(x)=-x^2+2x+3$ и $f'(x)=-2x+2$;

б) если $x<-1$ или $x>3$, то $f(x)=x^2-2x-3$ и $f'(x)=2x-2$;

в) «особыми» точками являются точки $x=-1$ и $x=3$, в которых график функции имеет «излом». Найдем углы наклона в этих точках правых и левых касательных, или, как говорят, найдем левостороннюю и правостороннюю производные.

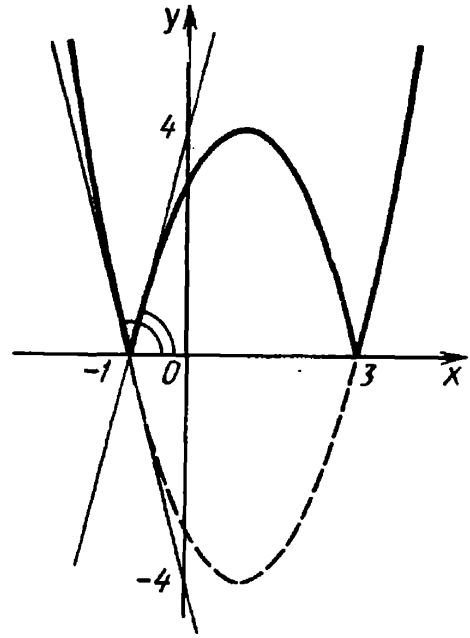


Рис. 57

Рассмотрим достаточно малую окрестность точки $x=-1$.

Слева от нее (т. е. $\Delta x<0$), учитывая, что $f(-1)=0$, получим:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{\Delta f(-1)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{f(-1+\Delta x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{-4\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=-4.$$

Справа от нее, т. е. при $x>-1$ $(\Delta x>0)$, получим:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \frac{\Delta f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \frac{f(-1+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \frac{4\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}=4.$$

Видно, что угловой коэффициент левой касательной равен 4, а правой касательной равен (-4), т. е. они не совпадают.

Точно так же можно доказать, что у данной функции не существует производной в точке $x=3$.

После рассмотрения подобных упражнений можно сформулировать определение дифференцируемости функции в точке. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если она непрерывна в этой точке; существуют правые и левые производные в точке x_0; левая и правая производные в точке x_0 равны между собой.

Для элементарных функций, изучающихся в школе, все три названных условия всегда выполняются, поэтому ограничиваются нахождением правой или левой производной и на основании этого делают заключение о дифференцируемости функции в точке. Заметим во избежание недоразумений, что функция $y=|x|$ (использованная при построении рассмотренного выше примера с несовпадающими левой и правой производными) неэлементарна.

4. Примеры прикладных задач, приводящих к понятию производной. Теперь, когда учащиеся имеют представление о производной в ее наиболее обобщенном виде, необходимо рассмотреть ряд частных задач из различных областей науки.

Задача 1. Скорость свободного падения тела.

Задача 2. Скорость химической реакции. Пусть $P(t)$ — количество вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени t. За промежуток времени от t до $t+\Delta t$ вступит в реакцию еще некоторое количество вещества $\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t)$. Следовательно, отношение $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость химической реакции за промежуток времени Δt. Для характеристики скорости химической реакции в момент t следует рассмотреть предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t}$.

Задача 3. Мгновенная сила тока. Пусть $Q = Q(t)$ — количество электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за время t. Пусть Δt — некоторое «приращение» времени, тогда ему соответствует приращение $\Delta Q = Q(t+\Delta t) - Q(t)$. Естественно отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ назвать средней силой тока за промежуток Δt, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ — мгновенной силой тока в момент t, т. е.

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}.$$

Задача 4. Удельная теплоемкость вещества данного тела. Пусть W — количество теплоты в калориях, которое нужно сообщить телу, чтобы нагреть его до температуры θ. Для увеличения температуры тела на $\Delta\theta$ придется затратить некоторое количество теплоты ΔW. Тогда $\lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta\theta}$ дает удельную теплоемкость вещества данного тела при данной температуре.

Задача 5. Линейная плотность тела. Стержень — это тело, имеющее форму цилиндра, причем площадь сечения которого мала по сравнению с его высотой; говоря о стержне, будем использовать термин «длина» вместо «высота». Пусть имеется неоднородный стержень, масса которого от начала стержня на отрезке длины l равна m. Тогда отношение $\frac{\Delta m}{\Delta l}$ называется средней (линейной) плотностью стержня на участке Δl, а $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}$, т. е. предел средней линейной плотности участка стержня с концами l, $l+\Delta l$ при условии, что длина участка стремится к нулю, называется линейной плотностью стержня в этой точке.

5. Дифференциал и его применения к приближенным вычислениям. Понятие дифференциала является одним из фундаментальных понятий математического анализа. Ознакомление учащихся с этим понятием позволит им глубже понять многие разделы курса начал анализа, например применение производной к приближенным вычислениям (где фактически используется формула $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$, т. е. дифференциал функции), неопределенный интеграл (до сознания учащихся достаточно просто донести мысль

о том, что под знаком интеграла находится дифференциал функции, которую требуется найти), определенный интеграл (выражение $f(x)\cdot\Delta x$ позволяет учащимся наглядно представить его геометрический смысл, т. е. создать образное представление об определенном интеграле как площади). Следует учесть также, что понятие дифференциала сыграло в истории анализа очень важную роль; в настоящее время оно часто используется в приложениях математики.

Дифференциал функции может быть введен на основе определения производной. Действительно, если $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$, или $\Delta y=y'\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Приращение функции составлено из двух частей: $y'\cdot\Delta x$ и $\alpha\cdot\Delta x$. Линейная относительно приращения независимой переменной, главная часть приращения функции называется дифференциалом функции и обозначается знаком d: $dy=y'\cdot\Delta x$.

Существуют и другие достаточно простые способы введения этого важного понятия. Рассмотрим один из них, наиболее близкий к истории его возникновения.

Пусть поставлена задача найти приращение данной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Если непосредственное определение приращения затруднительно, то отрезок $[a; b]$ разбивают на неограниченное количество малых отрезков $[x; x+\Delta x]$ и приближенно считают, что на каждом из них «прирост» функции происходит по закону прямой пропорциональности. Это означает, что, например, малый элемент кривой линии рассматривают как отрезок прямой (секущей), неравномерное движение точки в течение малого промежутка времени считают равномерным и т. п. Другими словами, предполагают, что на малом отрезке $[x, x+\Delta x]$ имеет место приближенное равенство $\Delta y\approx k\cdot\Delta x$, где коэффициент пропорциональности не зависит от Δx, но, вообще говоря, зависит от x. Если при надлежащем подборе коэффициента k окажется, что погрешность $\Delta y-k\cdot\Delta x$ будет бесконечно малой величиной высшего порядка относительно Δx, т. е. отношение

$$\frac{\Delta y-k\Delta x}{\Delta x}=\alpha \qquad (1)$$

будет стремиться к нулю при $\Delta x\to 0$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-k\cdot\Delta x}{\Delta x}=0$, то величина $dy=k\cdot\Delta x$ называется дифференциалом функции $y=f(x)$. Из соотношения (1) имеем $\Delta y=k\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Определение. Дифференциалом функции называется величина, пропорциональная приращению независимой переменной и отличающаяся от приращения функции на бесконечно малую величину высшего порядка по сравнению с приращением независимой переменной.

Уточним смысл коэффициента k в последней формуле. Выразим k из нее и в полученном равенстве перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$: $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}-\alpha$, отсюда $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$. Таким образом, дифференциал

функции равен произведению производной этой функции на приращение независимой переменной, т. е. $dy=y'\cdot\Delta x$.

Теперь естественно ввести понятие дифференциала независимой переменной. Заменяя в последнем равенстве y на $f(x)$, получим $df(x)=f'(x)\cdot\Delta x$; пусть $f(x)=x$, тогда $x'=1$, и поэтому $dx=1\cdot\Delta x$, или $dx=\Delta x$. Таким образом, дифференциал независимой переменной равен приращению этой независимой переменной.

Следовательно, $dy=y'dx$, или $y'=\frac{dy}{dx}$. Выражение $\frac{dy}{dx}$, как следует из связи дифференциала и производной, можно рассматривать как дробь с числителем dy и знаменателем dx.

Исходя из наглядных представлений, можно на рисунке (см. рис. 56) показать геометрический смысл дифференциала как приращения ординаты касательной, установить из треугольника AMK его аналитическое выражение и здесь же показать различие Δy и dy, т. е. погрешность, которая допускается при замене приращения функции ее дифференциалом.

При решении многих задач приращение функции Δy заменяется дифференциалом для достаточно малых Δx, т. е. считают $\Delta y\approx dy$. При этом допускается некоторая ошибка. Абсолютную и относительную погрешность этой ошибки в каждом конкретном случае можно подсчитать и выяснить, удовлетворяет ли она требованиям задачи. Следует рассмотреть достаточное количество упражнений, подтверждающих удобство пользования дифференциалом.

Пример 1. Найти приближенное и точное значение приращения функции $y=2x^3+5$, которое она получает при изменении аргумента $x=2$ на $\Delta x=0{,}001$. Подсчитать абсолютную и относительную погрешность приближения.

Решение. $dy=6x^2\cdot\Delta x=6\cdot 2^2\cdot 0{,}001=0{,}024$.

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^3+5-2x^3-5=6x^2\Delta x+6x\cdot(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3=0{,}024012002.$$

$$\Delta y-dy=0{,}000012;\ \frac{\Delta y-dy}{dy}=0{,}0005=0{,}05\%.$$

Удобство пользования дифференциалом состоит еще и в том, что для дифференцируемой функции всегда можно найти приближенное значение ее приращения в общем виде; как видно из приведенного примера, при малых Δx это приближение оказывается достаточно высокого качества.

Пример 2. Найти, на сколько увеличится при нагревании объем шара радиуса R, если его радиус увеличился на величину dR.

Решение. Так как $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, то $dV=4\pi R^2dR$.

В качестве основного факта, связанного с рассмотрением понятия дифференциала, следует отметить, что учащиеся должны понимать, что замена приращения функции на отрезке $[x, x+\Delta x]$ дифференциалом геометрически означает тот факт, что на достаточно малом отрезке Δx участок кривой (график функции) заменяется отрезком касательной, т. е., по существу, в достаточно малой окрестности точки x вместо данной функции рассматривается линей-

ная функция, у которой график — касательная к графику данной функции $f(x)$ в точке с абсциссой, равной x.

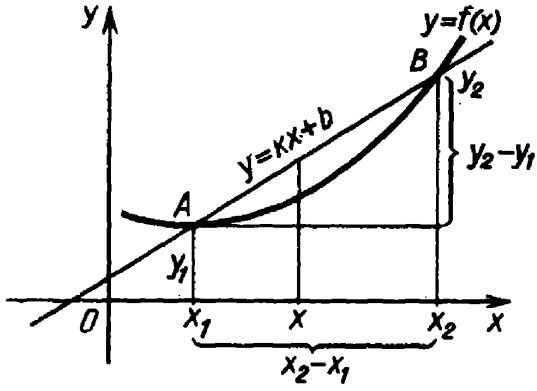


Рис. 58

6. Линейная аппроксимация как один из путей введения понятия производной. Будущий учитель математики должен знать еще об одном способе введения понятия производной, основанном на идее линейной аппроксимации функции в окрестности данной точки. Эта концепция восходит к Даламберу и Эйлеру. По выражению К. Маркса своим рациональным дифференциальным исчислением «Даламбер сорвал с дифференциального исчисления покров тайны и тем самым сделал огромный шаг вперед» [1, с. 175]. «Переходу к пределу»[1] в отношении $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ у Даламбера предшествовало разложение Δy в степенной ряд по степеням Δx, в котором производная получалась как коэффициент при Δx. Рассмотрение такого способа введения можно построить по следующему плану: линейная интерполяция; представление данной алгебраической функции линейной вблизи нуля; представление данной функции линейной вблизи данного значения аргумента; производная и дифференциал; получение производных элементарных функций, дифференцирование произведения и частного двух функций; дальнейшее продолжение идеи линеаризации (формула Тейлора).

Рассмотрим возможную реализацию этого плана.

Вывод формулы линейной интерполяции связан с возникающей иногда необходимостью нахождения значений функции в точке, если известны ее значения в точках, близких к данной; при этом по значениям непрерывной функции $y=f(x)$ на концах отрезка $[x_1, x_2]$ находят ее приближенное значение в некоторой промежуточной точке, заменяя данную функцию линейной, график которой проходит через точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$. Графическая иллюстрация этого факта представлена на рисунке 58: вместо графика функции $y=f(x)$, проходящего через точки A и B, рассматривается секущая.

Угловой коэффициент искомой линейной функции равен $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; приращение линейной функции на отрезке Δx пропорционально приращению аргумента, т. е. $\Delta y=k\cdot\Delta x$, или $\Delta y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\Delta x$. Таким образом, значение функции $f(x)$ в точке x приближенно равно: $y=f(x)\approx y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$.

[1] Современное определение предела на языке потенциальных бесконечно малых было дано О. Коши в XIX в.

На идее линейной интерполяции построены четырехзначные математические таблицы. Полезно поэтому рассмотреть примеры, когда по двум табличным значениям некоторой функции надо вычислить ее промежуточное значение по формуле, сравнив полученный результат с табличным.

На практике часто бывает удобно также заменять исследуемую функцию $y=f(x)$ на линейную вблизи некоторой точки $x=x_0$, т. е. в окрестности $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$. Геометрическая задача сводится к тому, чтобы в точке с абсциссой $x=x_0$ провести касательную к графику данной функции и в δ-окрестности рассматривать не значения самой функции, а значения построенной линейной функции. При изучении производной в IX классе по действующей программе решается аналогичная задача: «Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=x_0$». Однако учащимся, как правило, недостаточно разъясняется цель, ради которой подобная задача ставится. Эту цель целесообразно довести до сознания учащихся. Более того, уже в восьмилетней школе можно решать подобные задачи, например типа: «Заменить функцию $y=2-x+3x^2$ вблизи нуля (или данного значения аргумента x_0) линейной функцией».

Так как с понятием предела функции учащиеся еще не знакомы, то в первом случае замена может осуществляться путем отбрасывания членов выше первой степени: $y\approx 2-x$. Во втором случае в рассмотрение вводится малая величина Δx, и после замены x на $x_0+\Delta x$, выполнения действий и отбрасывания членов, содержащих степени Δx выше первой, получается линейная относительно Δx функция, которой и заменяют данную вблизи точки x_0. Эти результаты совпадают с теми, которые в дальнейшем получаются с использованием производной.

Пусть теперь учащиеся уже знакомы с понятием предела и дана целая функция $y=f(x)$, которую нужно заменить линейной в окрестности точки x_0. После введения в рассмотрение малой величины $\Delta x=x-x_0$, соответствующей замены и выполнения алгебраических операций получаем $f(x_0+\Delta x)=b+k\cdot\Delta x+\gamma$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\gamma}{\Delta x}=0$. Задача сводится теперь к нахождению коэффициентов k и b. Предполагая, что написанная формула справедлива при $\Delta x=0$[1], получаем $b=f(x_0)$, и так как $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+k\cdot\Delta x+\gamma$, то $\Delta y=k\cdot\Delta x+\gamma$. Отсюда $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и формула принимает вид:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x+\gamma. \qquad (1)$$

Как видно, производная получилась как коэффициент при Δx, а дифференциал $dy=k\cdot\Delta x$ ($dy=f'(x)\cdot\Delta x$) — как главная, линейная относительно Δx часть приращения функции. Используя формулу (1), можно получить производные некоторых

[1] Это предположение равносильно требованию непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=x_0$.

элементарных функций, а также производные произведения и частного двух функций.

Пример 3. Покажем, что $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$ при натуральном n. Для этого нам потребуется формула $(1+x)^n=1+nx+\gamma$, где $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\gamma}{x}=0$. Она может быть доказана методом математической индукции. Имеем:

$$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^n=x_0^n\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^n.$$

Воспользовавшись приведенной формулой для $(1+x)^n$, представим $f(x_0+\Delta x)$ в виде:

$$f(x_0+\Delta x)=x_0^n\left(1+n\cdot\frac{\Delta x}{x_0}+\gamma\right)=x_0^n+nx_0^{n-1}\cdot\Delta x+\gamma_1,$$

где $\gamma_1=x_0^n\cdot\gamma$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\gamma_1}{\Delta x}=0$. Поскольку производная есть коэффициент при Δx, получаем $f'(x_0)=n\cdot x_0^{n-1}$, т. е. $(x^n)'=nx^{n-1}$.

Пример 4. Выведем производную произведения двух функций. Пусть даны две функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$, дифференцируемые в точке x_0. Чтобы найти выражение для производной произведения, перемножим почленно равенства, выражающие дифференцируемость данных функций при $x=x_0$: $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x+\gamma_1$,

$$g(x_0+\Delta x)=g(x_0)+g'(x_0)\,\Delta x+\gamma_2.$$

Перемножая и группируя члены, получим:

$$f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)=f(x_0)\cdot g(x_0)+(f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0))\cdot\Delta x+\gamma,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\gamma}{\Delta x}=0$. Коэффициент при Δx — производная произведения функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0. Поэтому

$$(f(x)\,g(x))'=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x).$$

Если замена функции линейной в окрестности некоторой точки не является достаточной, ставится задача: заменить данную функцию в окрестности точки x_0 не линейной, а квадратичной, возможно точнее приближающей данную функцию. В этом случае из слагаемого γ в формуле $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x+\gamma$ выделяется член, пропорциональный $(\Delta x)^2$, так что $\gamma=A(\Delta x)^2+\gamma_1$, где A — коэффициент, не зависящий от Δx, а γ_1 обладает свойством $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\gamma_1}{(\Delta x)^2}=0$, т. е. в γ_1 вошли все члены, содержащие Δx в степени выше второй (γ_1 является бесконечно малой более высокого порядка, чем $(\Delta x)^2$). Поэтому теперь формула для представления $f(x)$ примет вид: $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x+A(\Delta x)^2+\gamma_1$.

Несложное, но требующее не входящих в программу общеобразовательной школы сведений рассуждение показывает, что $A=f''(x_0)/(1\cdot 2)$. Проведем эти выкладки. Выразим A из предыдущей формулы:

$$A=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\,\Delta x-\gamma_1}{(\Delta x)^2}.$$

При $\Delta x \to 0$ будем иметь:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\,\Delta x}{(\Delta x)^2} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\gamma}{(\Delta x)^2},$$

или

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\,\Delta x}{(\Delta x)^2}.$$

Продифференцируем по Δx числитель и знаменатель (т. е. воспользуемся без доказательства правилом Лопиталя), получим:

$$A = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2}$$

Таким образом, искомое приближение имеет вид:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + \frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2} \cdot (\Delta x)^2 + \gamma_1.$$

Эта формула позволяет рассмотрение фуикции $f(x)$ в точке x_0 заменить рассмотрением квадратичной функции. Дальнейшее исследование позволит еще более уточнить приближение для функции — в качестве приближающей функции выступает уже многочлен не второй, а третьей степени. Продолжая аналогичные рассуждения, индуктивно можно получить формулу Тейлора, позволяющую аппроксимировать фуикцию многочленами и записывать разложения функций в степенные ряды.

Предлагаемый подход к введению понятия производной на основе идеи линейной аппроксимации может быть использован как при проведении уроков, в особениости в математических классах, так и во внеклассной работе. К его достоинствам можно отнести и тот факт, что он способствует формированию диалектико-материалистического мировоззрения учащихся.

7. Производная сложиой фуикции. Используем развитые в предыдущих пунктах представления для вывода формулы производной сложной функции. Рассмотрим две функции: $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$. Пусть функция $\varphi(x)$ имеет производную в точке $x \in (a; b)$, а функция $f(u)$ определена на интервале, содержащем множество значений функции $\varphi(x)$, и имеет производную в точке $u = \varphi(x)$. Тогда имеет место равенство

$$y'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Для доказательства запишем равенство для приращения функции y, вытекающее из ее дифференцируемости:

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u) = f'(u) \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta u \to 0$. Разделим левую и правую части этого равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Второе слагаемое в этом равенстве, очевидно, равно нулю, а первое имеет искомый вид $f'(u) \cdot \varphi'(x)$. Формула доказана.

§ 31. Методика изучения применения производной к исследованию функций

1. Методические трудности данной темы. Применение производной к исследованию функций, построению графиков, решению задач на нахождение наибольших и наименьших значений — важнейший раздел темы «Производная и ее применения». Материал этой темы используется при изучении многих классов функций: тригонометрических, показательной, логарифмической и др. Он имеет также очень большое прикладное значение и играет большую роль в установлении межпредметных связей (в особенности с курсом физики).

Заметим, что изучение применения производной к исследованию функций вызывает бо́льшие методические трудности, чем введение производной. Они возникают в связи с тем, что здесь сложнее логическая структура материала; в конечном счете основной факт для построения всей необходимой части теории — теорема о том, что непрерывная на отрезке функция принимает на нем наибольшее и наименьшее значения,— не входит в рамки школьного курса математики в силу большой своей сложности.

Возникает методическая задача отбора необходимого минимума учебного материала, нахождения вариантов доказательств теорем, которые были бы доступны для учащихся, или сообщения идеи доказательства, мотивировок теорем, выбора подкрепляющих примеров и задач. Сообщаемые учащимся сведения не должны быть в процессе продолжения образования отброшены. Эта необходимость сочетания доступности и краткости изложения с отсутствием вульгаризации его и создает значительные методические трудности. Отсюда большое разнообразие подходов к изложению материала.

2. Различные варианты изложения темы. Рассмотрим некоторые особенности изложения данной темы в различных учебных пособиях и учебниках. Остановимся сначала на исследовании функции на возрастание и убывание.

В ряде пособий признаки возрастания и убывания функций даются без доказательства. Интересный прием для иллюстрации содержания как необходимых, так и достаточных условий возрастания и убывания функций используется в [118]: рассматривается координата точки, движущейся по оси в положительном направлении (функция возрастает) и в отрицательном направлении (функция убывает); скорость истолковывается как производная от координаты по времени; рассматривается связь между знаком производной (скорости) и изменением координаты точки.

В ряде пособий доказательство заменяется геометрической иллюстрацией, использующей связь между углом наклона касательной и значением производной.

В основном, однако, заметно стремление найти приемы изложения, которые сводили бы недосказанные факты к минимуму. Из этих приемов отметим те, которые основаны на использовании

теоремы Лагранжа, принимаемой без доказательства (в ее геометрической интерпретации). Напомним формулировку теоремы Лагранжа: если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках отрезка, то в интервале $(a; b)$ найдется точка c такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Именно в этой (негеометрической) формулировке теорему удобно применять для доказательства признаков возрастания и убывания функции. На геометрический язык теорема Лагранжа переводится так: если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$, то на соответствующей дуге кривой $y=f(x)$ найдется точка, в которой касательная к кривой будет параллельна секущей, проведенной через концы дуги.

В пособиях, предназначенных для учителей и учащихся, иногда доказывают эту теорему. Но чаще она не доказывается, а поясняется из наглядно-геометрических соображений; например, в учебнике [24] принят именно такой подход, причем за счет более сильного условия формулировка становится менее громоздкой по сравнению с приведенной выше. Вот эта формулировка: «Пусть функция f дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка. Тогда между любыми двумя точками a и b этого промежутка найдется такая точка c, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$». Также с термином «промежуток» формулируются и признаки возрастания и убывания функции: «Если функция имеет положительную производную в каждой точке промежутка I, то f возрастает на этом промежутке» и аналогично для убывания. Доказательство дается на основании теоремы Лагранжа.

Остановимся теперь на исследовании функций на максимум и минимум. Во всех пособиях, которые упоминались ранее, понятия максимума и минимума вводятся, но по-разному; в одних пособиях фигурирует строгое неравенство, в других — нестрогое. Сравним определения в учебных пособиях [24] и [25], ограничиваясь определением точки максимума.

Определение. Точка x_0 из области определения функции f называется точкой максимума этой функции, если найдется такая δ-окрестность $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ [25].

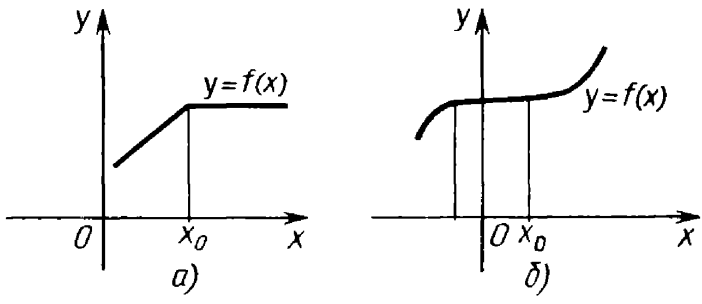


Рис. 59

Определение. Точка x_0 называется точкой максимума f, если найдется такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x_0) \geqslant f(x)$ [24].

Как видим, различие проявляется в случаях, вроде изображенных на рисунке 59; следует учесть также, что точка x_0 на рисунке 59 б является одновременно и точкой минимума, и точкой максимума в смысле второго определения. По этой причине первое определение геометрически представляется более наглядным.

Точки минимума и максимума объединяются общим понятием точек **экстремума.**

Изложение вопросов, связанных с исследованием функции на экстремум, обычно начинается с доказательства теоремы Ферма. Чаще ее формулируют для случая, когда производная в точке экстремума существует, реже — когда это ограничение снимается. Доказательство этой теоремы, по существу, проводится единым способом во всех пособиях. Однако если в них содержатся определения возрастания и убывания функций в точке (например, в [25]), то на них производится ссылка; в противном случае соответствующие рассуждения фактически просто развертываются в доказательстве теоремы Ферма (например, в [24]).

Теорема Ферма дает необходимое условие существования экстремума функции; полезно разобрать с учащимися контрпример ($y = x^3$ на любом промежутке, содержащем 0). Достаточное условие представляет собой тот или иной вариант использования изменения знака производной при переходе через данную точку.

Заслуживает внимания различение максимума и минимума функции с помощью второй производной.

3. Методика изучения исследования функций на возрастание (убывание) с помощью производной. Прежде всего определим, какие теоремы будем формулировать и какие способы доказательства применять.

Наиболее рациональным представляется сформулировать теорему Лагранжа, начав с ее геометрической интерпретации.

В формулировку теоремы Ферма включим предположение о дифференцируемости в экстремальной точке: «Если точка x_0 — точка экстремума функции f и в ней существует производная, то она равна 0». Необходимо отметить, что функция может иметь экстремум и в точках, где производная не существует.

Достаточное условие существования экстремума формулируется с требованием непрерывности функции в точке x_0, но при переходе к рассмотрению примеров будет отмечено, что в точках, где производная равна нулю, функция непрерывна, т. е. теорема применима. После этого будут рассмотрены примеры, иллюстрирующие применение теоремы.

Изучение темы «Применение производной к исследованию функций» требует знания некоторых определений и теорем, которые изучались ранее. Эти сведения надо повторить до изучения темы: понятия возрастания и убывания функции на множестве, определение производной, ее геометрический смысл, в связи с этим —

понятия касательной, углового коэффициента прямой, условие параллельности прямых. Кроме того, ученики должны иметь представление о непрерывных функциях: при определении знака производной удобно пользоваться тем, что непрерывная на интервале $(a; b)$ функция, не принимающая нулевых значений в этом интервале, сохраняет на нем знак. В ходе решения задач ученикам понадобится находить производные функций, пользоваться известными графиками для построения графиков других функций. Повторить надо и метод интервалов. Наконец, для усвоения понятия экстремума функции и доказательства соответствующих теорем надо вспомнить определение предела функции. Поскольку все время будет идти речь о необходимых и достаточных условиях, и эти понятия должны быть усвоены учащимися.

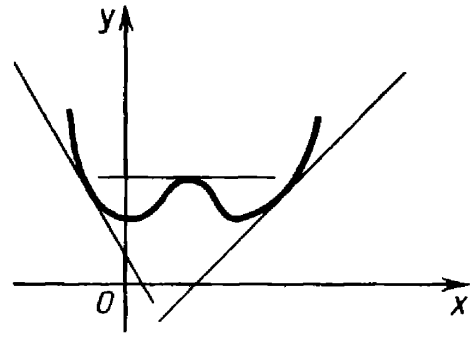


Рис. 60

Конечно, важно, чтобы повторение было естественно связано с изучаемым на каждом уроке материалом. Например, перед изучением теоремы Лагранжа можно повторить определения производной и касательной, вспомнить, какова связь между этими понятиями. Затем предложить учащимся провести на глаз касательные к заранее заготовленным графикам и показать в каждом случае на чертеже угол, тангенс которого выражает значение производной в соответствующей точке (и указать в какой). Целесообразно так подобрать эти углы, чтобы легко было вычислить значение производной (взять углы 45°, 120° и т. п., см. рис. 60). Затем предложить по готовому чертежу записать и, если можно, вы-

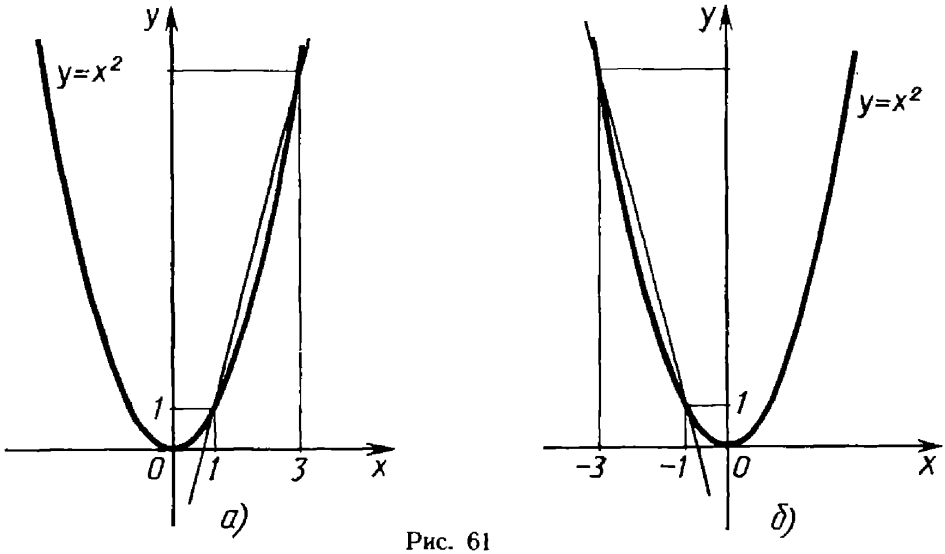


Рис. 61

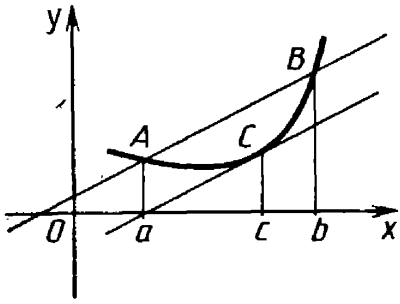


Рис. 62

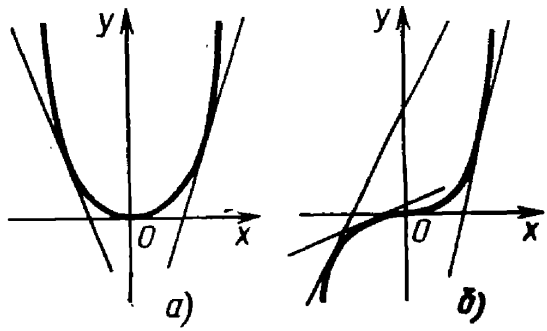


Рис. 63

числить угловой коэффициент секущей (рис. 61). После этого повторить связь между угловыми коэффициентами параллельных прямых и предложить задачу, непосредственно связанную с геометрической интерпретацией теоремы Лагранжа:

На рисунке 62 через точку C проведена касательная, параллельная секущей AB. а) Найти угловой коэффициент касательной. б) Найти значение производной функции $f'(x)$ в точке C. в) Сравнить их.

В результате решения задачи появится запись:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (1)$$

Затем можно рассмотреть серию чертежей, на которых учащимся будет предложено на дуге найти точку, касательная в которой параллельна хорде. После этого может быть сформулирована в геометрической форме теорема Лагранжа, записана в виде (1), после чего можно получить равенство $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, более удобное для доказательства признаков возрастания и убывания функции, чем и (1), и геометрическая интерпретация.

Прежде чем формулировать достаточные условия возрастания и убывания функции, надо повторить определения возрастающей (убывающей) на множестве функции, примеры функций, возрастающих (убывающих) на всей области определения, функций, область определения которых можно разбить на промежутки монотонности.

Полезно проследить, как располагаются касательные к графикам, проведенные в различных точках этих графиков, каков угол наклона этих касательных (выбирать промежутки возрастания, убывания, рис. 63). Затем можно предложить обратную задачу: построить несколько прямых, являющихся касательными к графику, и предложить «восстановить» график. После этого можно установить связь между углом наклона касательных и видом графика, а затем вспомнить, как связаны тангенс угла наклона касательной и производная, и высказать гипотезу, которая потом формулируется как достаточное условие возрастания (убывания) функции. После такой подготовительной работы доказываются соответствующие две теоремы.

Достаточный признак возрастания функции: пусть $f'(x)$ существует на отрезке $[a; b]$ и положительна в каждой точке интервала $(a; b)$. Тогда $f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 — точки отрезка $[a; b]$, $x_2 > x_1$. К отрезку $[x_1; x_2]$ можно применить теорему Лагранжа, и поэтому найдется точка c, такая, что $x_1 < c < x_2$ и $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Поскольку $x_2 - x_1 > 0$ и $f'(c) > 0$ по условию, то из предыдущего равенства получаем $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$ — функция возрастает на отрезке $[a; b]$. Теорема доказана.

Вслед за доказательством теорем можно привести примеры исследования функций на возрастание и убывание с использованием доказанных теорем, затем совместить эту задачу с построением графиков.

В процессе работы над теоремой можно поставить вопрос, является ли условие $f'(x) > 0$ необходимым условием возрастания (для того же класса функций, что и в достаточном условии) и на примере показать, что это не так.

Построение графиков можно начать с известных ученикам примеров, в частности с многочленов второй степени, во-первых, чтобы сравнить с уже известным способом решения; во-вторых, чтобы на этих простых в смысле выкладок примерах показать связь графиков функции и ее производной. Постепенно задания усложняются (от $y = x^2$, $y = x^2 + 3$, $y = (x-3)^2$ к $y = x^2 - 5x + 6$, $y = 3x^2 - 6x + 3$, $y = x^3$, $y = x^3 - 3x$ и т. п.). При решении каждой задачи можно сначала построить график производной, а потом решать неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ по построенному графику. График производной лучше изображать схематически, показывая лишь точки пересечения с осью x и положение в верхней либо нижней полуплоскости. После этого строится график функции $y = f(x)$ и сравниваются графики производной и данной функций. Например, схематический рисунок может быть таким, как рисунок 64. В этой работе поможет использование накладывающихся друг на друга кодопозитивов.

Такая работа оправдывает себя впоследствии при построении графиков функций более сложного вида: в ряде случаев, когда график функции знаком учащимся, можно знак производной определять по графику. Строя графики, следует находить и значения функции на концах промежутка возрастания и убывания. Это позволит уточнить положение графика и послужит подготовкой к введению понятий максимума и минимума.

После того как на простейших примерах ученики усвоили прием исследования функции на возрастание и убывание, можно перейти к решению более сложных задач, в частности к построению графиков многочленов третьей степени. В этом случае, начав с примеров, а затем используя теорию квадратных неравенств, можно

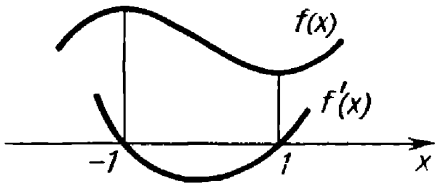


Рис. 64

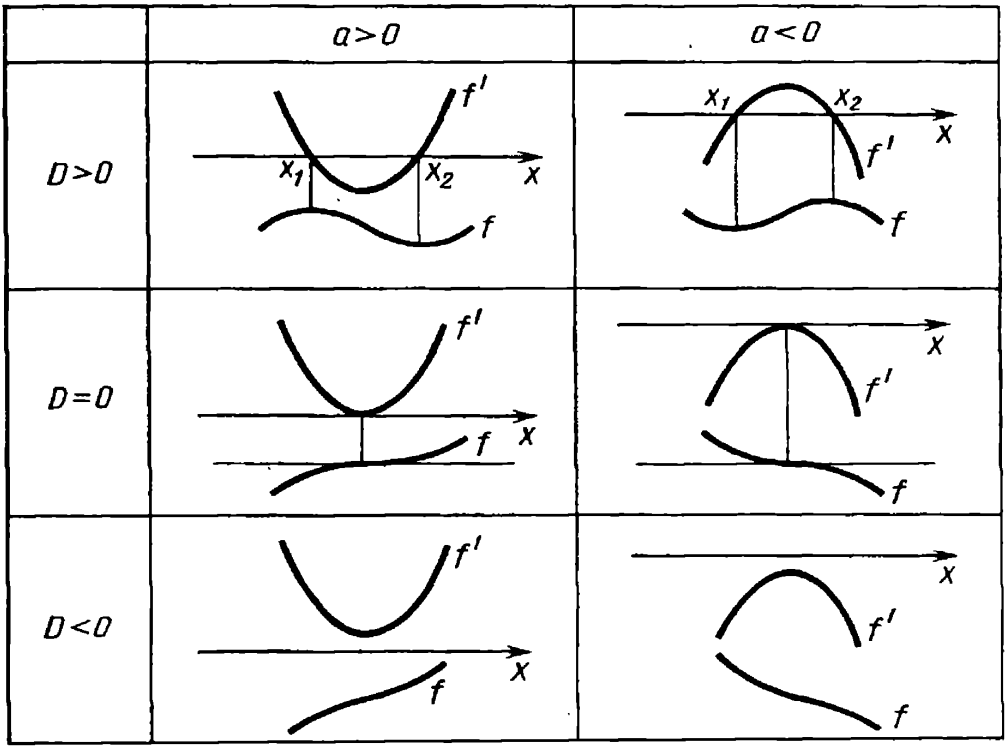


Рис. 65

провести полную классификацию видов таких графиков. Действительно рассмотрим функцию

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ a\neq 0.$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx\ +c.$$

График $f'(x)$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх, если $3a>0$ (т. е. $a>0$), и вниз, если $3a<0$ ($a<0$); число точек пересечения с осью x зависит от дискриминанта, который в данном случае вычисляется по формуле $D=4b^2-15ac$. Каждый из возникающих случаев соответствует возможному виду графика многочлена третьей степени; все они приведены на рисунке 65. Желая привести пример того или иного рода, учитель может составить многочлен второй степени, а потом интегрированием получить многочлен третьей степени.

Дальнейшее усложнение задачи — построить графики многочленов четвертой степени.

4. Работа над понятиями максимума и минимума функции; применение производной к исследованию функций на максимум и минимум. Для построения графиков нам не понадобилось вводить понятия максимума и минимума: все данные о графике функции, которые мы могли бы получить, введя это понятие, мы получили и без этого. Последующее изучение темы «Критические точки функции, ее максимумы и минимумы» служит введению обобщающих

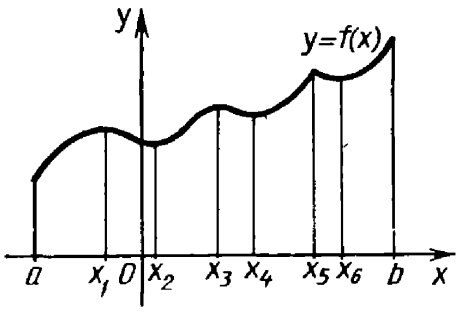


Рис. 66

понятий, используемых далее при рассмотрении различных приложений математики к практическим задачам.

Будем пользоваться таким определением точки максимума: «Точка x_0 из области определения функции f называется точкой максимума этой функции, если найдется такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$». Определение точки минимума дается аналогично. Под окрестностью данной точки будем понимать интервал, содержащий эту точку.

Для введения понятия максимума и минимума можно использовать и графики функций, которые учащиеся строили, исследуя функции на возрастание и убывание, и графики, специально подобранные для иллюстрации мысли о том, что некоторые максимумы могут быть меньше минимумов этой же функции, что функция может иметь экстремум в точке, где производная не существует и т. п.

Рассмотрим график функции $y=f(x)$ на промежутке (a, b) (рис. 66). Для точки x_3 можно найти такую ее окрестность, что для всех значений x из этой окрестности, кроме x_3, значение функции меньше, чем в x_3, т. е. $f(x_3) > f(x)$. Аналогично для точек x_1, x_5. Точки x_1, x_3, x_5 — точки максимума функции f. Таким же образом проводится работа с точками минимума x_2, x_4, x_6.

Все эти вопросы удобно рассматривать, используя кодоскоп.

Сделаем некоторые замечания. 1) Окрестность, о которой говорится в определении, не единственная; это можно показать на чертеже. Важно, что она в каждом из указанных случаев существует. 2) Понятия максимума и минимума локальны. Значения функции в точках максимума больше, чем значения функции в точках некоторой окрестности. Это не означает, что значения функции в точках максимума вообще больше всех значений функции (см. рис. 66). Более того, значения функции в некоторых точках максимума меньше, чем в некоторых точках минимума. Целесообразно применить сравнение графика с горным хребтом: точки графика, соответствующие точкам максимума функции, сопоставляются с вершинами хребта, точки, соответствующие точкам минимума,— со впадинами. Вершина выше ближайших точек, но необязательно выше всех точек хребта, в частности может быть ниже впадины и т. п. 3) Если функция определена на отрезке, то концы отрезка не могут быть точками максимума и минимума, так как для этих точек нельзя подобрать содержащего их интервала, целиком входящего в область определения рассматриваемой функции. 4) Употребляются выражения: «Функция имеет в точке x_0 максимум», «Функция имеет в точке x_0 минимум».

После рассмотрения точек максимума и минимума вводится термин «точка экстремума».

Для закрепления введенных понятий можно вернуться к рассмотрению графиков функций, построенных при исследовании функций на возрастание и убывание. В каждом случае выясняется, есть ли у этих функций точки максимума и минимума (по графику); каковы они.

После этого можно перейти к рассмотрению вопроса о необходимых условиях существования экстремума. Вернувшись к тому графику, на котором вводились понятия максимума и минимума (рис. 66), проведем, где это возможно, касательные к графику в точках, соответствующих точкам максимума и минимума. Увидим, что касательные параллельны оси x. Найдутся также точки, в которых касательная не существует. Может быть высказана гипотеза, что в точках экстремума производная либо не существует, либо равна нулю. Для случая, когда производная существует, формулируется теорема Ферма. Прежде чем доказывать ее, необходимо повторить определение производной в точке, причем записать его в данном случае удобнее в форме

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Кроме этого, учащимся понадобится знание определения предела функции в точке x_0, умение пользоваться этим определением при условии, что $\varepsilon=-a$, $\varepsilon=a$, определение точки максимума и точки минимума, умение определять знак дроби по знакам числителя и знаменателя.

Сделаем некоторые замечания по работе над доказательством в том виде, как оно приведено в [24, с. 83].

1) Следует в начале доказательства четко выделить два случая, которые должны быть рассмотрены: а) x_0 — точка минимума; б) x_0 — точка максимума. Внутри каждого случая выделяются случаи, когда $f'(x_0)=a>0$, $a=0$, $a<0$. Учащиеся должны понимать, что для полноты доказательства необходимо рассмотреть все эти случаи, поскольку вывод $a=0$ делается из того, что неравенства $a>0$ и $a<0$ приводятся к противоречию.

2) Не сразу ясно, почему, применяя определение предела в точке x_0, в качестве ε берут $-a$ (или a); при разборе доказательства учитель может это пояснить.

3) Нуждается в разъяснении конкретный способ приведения к противоречию, используемый в доказательстве. В теореме Ферма требуется доказать, что в точке, где функция принимает экстремальное значение, производная равна 0. Метод доказательства состоит в приведении к противоречию следующих фактов: x_0 — точка экстремума, $f'(x_0)\neq 0$. Проведем рассуждения, например, с точкой минимума.

Найдем такую окрестность точки x_0, назовем ее I, что **для всех** $x>x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$. Значит, для них не может выполняться неравенство $f(x_0)<f(x)$.

А это означает, что, какую бы окрестность точки x_0 ни взять, в ней найдутся точки, отличные от x_0, в которых $f(x)<f(x_0)$ (это точки из I), т. е. точка x_0 не может быть точкой минимума. Пришли к противоречию с тем, что x_0 — точка минимума.

После доказательства теоремы Ферма важно подчеркнуть, что теорема дает лишь **необходимое** условие экстремума: если функция имеет в точке x_0 экстремум и существует производная в этой точке, то она равна нулю. Но теорема Ферма не является достаточным условием существования экстремума: из того, что производная в точке x_0 равна нулю, не следует, что в ней функция имеет экстремум, примеры можно взять из числа рассмотренных при исследовании функций на возрастание и убывание.

При изучении вопроса о максимуме и минимуме функций можно внести понятие критических точек; критическими точками можно назвать внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует.

Теперь, после рассмотрения необходимых условий существования экстремума, можно выполнить ряд упражнений, чтобы подчеркнуть роль этих условий в исследовании функций на максимум и минимум: предложить о нескольких функциях решить вопрос, могут ли они иметь экстремум в названных точках.

Примеры.

1. $f(x)=x^2$ в точках $x=0$, $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$.
2. $f(x)=x^3$ в точках $x=0$, $x=2$, $x=-1$.
3. $f(x)=|x|$ в точке $x=0$.
4. $f(x)=x^3-3x+1$ в точках $x=-1$, $x=1$, $x=-2$, $x=2$.
5. $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x+1$ в точке $x=2$.

Выполнение такого рода упражнений позволит подвести учащихся к мысли, что точки минимума и максимума функций надо искать только среди критических точек. Таким образом, применение необходимого условия существования экстремума облегчает поиск экстремума, сокращая число исследуемых точек. Одновременно при выполнении таких упражнений ставится задача сформулировать и доказать достаточные условия существования максимума и минимума функции.

Подготовительная работа к формулировке этих условий, по существу, проводится уже при исследовании функций на возрастание и убывание, при построении их графиков. Теперь можно вернуться к рассмотренным там примерам, заново рассмотреть график, на котором вводилось понятие максимума и минимума (рис. 66). Внимание учеников обращают на то, что если производная в точке, где она равна нулю, меняет знак с «плюса» на «минус», то функция имеет максимум в этой точке. Аналогичная картина в случае, если производная в точке не существует, но функция непрерывна в этой точке. Оба случая объединяются одной формулировкой: «Функция непрерывна в точке x_0» (вспоминаем, что из существования производной следует непрерывность).

После этой подготовительной работы можно сформулировать теорему: «Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x)>0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x)<0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f».

Аналогичная теорема формулируется для точки минимума.

Заметим, что в учебной литературе можно встретить другие формулировки этих признаков. Например, в книге [27] дается признак существования максимума в такой форме: «Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=c$, причем существует такая окрестность $(c-\delta; c+\delta)$ этой точки, что в промежутке $(c-\delta; c)$ выполняется неравенство $f'(x)>0$, а в промежутке $(c; c+\delta)$ — неравенство $f'(x)<0$. Тогда c — точка максимума для $f(x)$».

Приведенная ранее формулировка удобнее тем, что при исследовании функций находятся промежутки знакопостоянства производной именно в таком виде, в каком они записаны в условии теоремы: $(a; x_0)$, (x_0, a). Доказательство приведено в [26, с. 317]. Выясним только, как должно быть изменено доказательство в связи с тем, что из определения точки максимума исключено условие $f(x)=f(x_0)$.

На промежутке $(a; x_0)$ $f'(x)>0$, т. е. $f(x)$ возрастает на интервале $(a; x_0)$. По условию $f(x)$ непрерывна в точке x_0, значит, точка x_0 может быть присоединена к промежутку возрастания функции. Итак, $f(x)$ возрастает на $(a; x_0)$, т. е. при $x\in(a; x_0)$ верно неравенство $f(x)<f(x_0)$.

Аналогично получим, что если $x\in(x_0; b)$, то $f(x)<f(x_0)$.

Присоединяя x_0 к промежутку возрастания функции, получим, что интервал $(a; b)$ есть объединение множеств $(a; x_0)$, $\{x_0\}$, $(x_0; b)$. Отсюда видно, что для всех его точек, кроме x_0, выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$, т. е. x_0 — точка максимума.

Полезно все эти рассуждения проиллюстрировать на чертеже (рис. 67).

Снова возвращаясь к примерам, в которых проводилось исследование функций на возрастание и убывание, покажем, что в точках, в которых происходит смена знака производной, имеется экстремум; определим вид экстремума.

После этого можно предложить более разнообразные примеры исследования функций на максимум и минимум, а затем применить эти сведения при решении задач на отыскание наибольших и наименьших значений.

В заключение сделаем еще одно замечание методического характера. Запоминанию признаков возрастания и убывания функции, достаточных условий существования максимума и минимума способствует такое мнемоническое правило. С положительной производной связываем «положительный процесс» (возрастание функ-

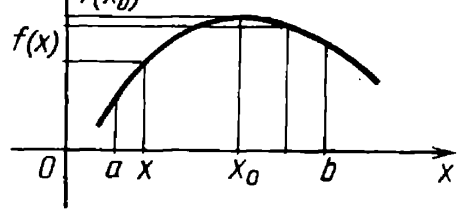


Рис. 67

ции), с отрицательной производной — «отрицательный процесс» (убывание функции). Если производная меняет знак с «плюса» на «минус» (была положительной, стала отрицательной), то «положительный процесс» сменяется «отрицательным», т. е. возрастание сменяется убыванием; таким образом, функция имеет максимум. Аналогично для минимума.

§ 32. Применение производной к решению задач на наибольшие и наименьшие значения

Одним из важных приложений производной является использование ее при решении задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений. Такие задачи возникают там, где необходимо выяснить, как с помощью имеющихся средств достичь наилучшего результата, как получить нужный результат с наименьшей затратой средств, материалов, времени, труда и т. п. Умение решать такие задачи приобретает особую значимость в связи с решением проблемы повышения эффективности и качества во всех сферах народного хозяйства.

На использовании производной основан достаточно универсальный метод решения таких задач. Программа по математике предусматривает знакомство старшеклассников с этим методом и формирование у них умений применять его к решению задач.

Задачи этого типа имеют четкую прикладную направленность если не по фабуле, то в любом случае по подходу к решению — в них все фазы построения и использования математической модели — формализация, решение формализованной задачи, интерпретация — получают соответствующую реализацию: составление функции, описывающей условие задачи, в результате чего осуществляется переход от содержательной задачи к математической задаче нахождения наибольшего или наименьшего значения функции на некотором промежутке; решение этой математической задачи с использованием производной; придание полученному результату соответствующего содержательного смысла.

В письменный экзамен по математике за курс средней школы ежегодно (с 1977 г.) включается задача такого характера; это достаточно красноречиво свидетельствует о том, что формирование умений решать такие задачи является в настоящее время одной из важных целей изучения математики в средней школе.

Какую же работу следует проводить учителю в плане обучения старшеклассников указанному методу решения задач? Прежде всего следует познакомить их с тем, как с помощью производной можно находить наибольшее и наименьшее значения функции на различных промежутках.

Заметим, что использование производной позволяет найти такие значения либо сделать вывод об их отсутствии для любой непрерывной на рассматриваемом промежутке функции, имеющей на этом промежутке лишь конечное число точек, в которых производная

либо не существует, либо равна нулю (т. е. конечное число критических точек). Такое исследование для любых промежутков можно осуществить на основе предварительного исследования функции на монотонность и экстремумы на соответствующем промежутке, которое проводится с помощью производной. Без предварительного исследования функции на монотонность и экстремумы нельзя обойтись в тех случаях, когда отыскивается наибольшее или наименьшее значение функции на бесконечном промежутке; в других случаях (отрезок, интервал, полуинтервал) можно обойтись и без него, если пользоваться правилом нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, что нередко приводит к более простому решению.

Работа может быть начата с постановки задачи нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке и обоснования соответствующего правила.

Подчеркнем, что только для функции, непрерывной на отрезке и отличной от постоянной, гарантировано (теоремой Вейерштрасса) существование наибольшего и существование наименьшего среди всех ее значений, принимаемых на этом отрезке. Для других видов промежутков такой гарантии нет.

Опираясь на знания учащихся, а также на наглядные представления, развиваемые с помощью рассмотрения нескольких графиков функций, можно подвести учащихся к установлению и обоснованию правила для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Остановимся на описании подхода, при котором это правило формулируется для функций, непрерывных на отрезке и имеющих на нем лишь конечное число критических точек [24]. При другом подходе это правило формулируется для более узкого класса функций — для функций, непрерывных на отрезке и дифференцируемых внутри него [23].

Если класс не отличается достаточно хорошей математической подготовкой, то сначала следует обратить внимание на тот факт, что функция, монотонная на отрезке, принимает наибольшее и наименьшее значения на его концах. Для этого можно использовать графики монотонных функций.

Далее перед учащимися целесообразно поставить задачу отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, заданной графиком на рисунке 68. Эта функция не является монотонной на отрезке $[a; b]$, но легко заметить, что рассматриваемый отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция f монотонна. Из этого следует, что наибольшее и наименьшее зна-

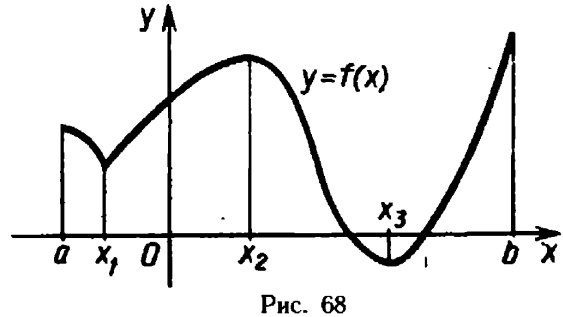


Рис. 68

чения функции f на отрезке $[a; b]$ содержатся среди ее значений на концах указанных отрезков, т. е. в данном случае среди чисел: $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(b)$. Поскольку $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ являются экстремумами функции f, то отыскание ее наибольшего и наименьшего значений на отрезке $[a; b]$ можно свести к отысканию наибольшего и наименьшего значений среди принимаемых этой функцией на концах отрезка $[a; b]$ и в точках экстремума.

Подчеркнув, что учащимся уже известно, как с помощью производной могут быть найдены точки экстремума функции, и то, что все эти точки содержатся среди критических точек функции, учитель должен указать, что при отыскании наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке часто бывает более целесообразным (по затрачиваемому времени) не выяснять, какие из критических точек функции являются точками экстремума, а рассмотреть значения, принимаемые функцией на концах этого отрезка и в критических точках, лежащих внутри него, и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

После формулировки соответствующего правила следует выделить основные этапы решения математической задачи нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f на отрезке $[a; b]$:

1) Найти производную данной функции.

2) Найти критические точки, т. е. точки, в которых производная равна нулю либо не существует.

3) Выбрать из полученных критических точек те, которые заключены между числами a и b, и внести их наряду с a и b в верхнюю строку следующей таблицы:

x	a	x_1		b
$f(x)$				

4) Заполнить нижнюю строку таблицы и выбрать из чисел этой строки наибольшее число и наименьшее число.

Найденные таким образом числа и будут являться наибольшим и наименьшим значениями функции f на отрезке $[a; b]$.

Для закрепления правила целесообразно выполнить несколько упражнений, например такие:

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x)=3x^2-x^3-3$ на отрезке: а) $[-1; 1]$; б) $[0; 3]$; в) $[3; 4]$;

2) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на отрезке $\left[-2; -\frac{1}{3}\right]$;

3) $f(x)=x-\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 4]$;

4) $f(x)=\sin x+\cos x$ на отрезке: а) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$;

5) $f(x)=x-\sin 2x$ на отрезке: а) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $[-\pi; 0]$.

Следует отметить, что в рамках школьного курса математики круг непрерывных функций, не имеющих производной в отдельных внутренних точках области определения, не широк. Указать формулу, которая задавала бы такую функцию, можно, например, включая выражение $|x|$. Учащимся в этой связи можно предложить найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x-5|x+2|$ на отрезке $[-3; 1]$; более сильным ученикам — $f(x)=\sqrt{|x|}\cdot(3-x)$ на отрезке $[-0{,}25; 2]$.

Иногда с той же целью включают в рассмотрение функцию, содержащую $\sqrt[3]{x^2}$, например функцию $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-2)$, которая непрерывна на всей числовой прямой, имеет две критические точки 0 и $\frac{4}{5}$, причем в точке 0 производная этой функции не существует. Как показывает опыт, нахождение производной функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ представляет для учащихся значительную трудность; многие неправомерно заменяют эту функцию функцией $y=x^{\frac{2}{3}}$, которая в соответствии с определением, принятым в школьном курсе математики, определена лишь на множестве неотрицательных чисел, а не на всей числовой прямой, как рассматриваемая функция. Производную функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ можно найти либо воспользовавшись определением производной, либо применив правило дифференцирования сложной функции.

После усвоения учащимися правила нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке можно перейти к решению текстовых задач, опирающихся на использование этого правила.

Заметим, что многие практические задачи приводят к необходимости отыскания наибольшего или наименьшего значения функции не на отрезке, а на интервале или полуинтервале. Фактически к отысканию наибольшего или наименьшего значения функции на отрезке могут привести лишь те задачи, в условии которых содержатся дополнительные ограничения.

Поясним сказанное примером.

З а д а ч а 1. Из квадратного листа жести со стороной 6 дм требуется изготовить открытый сверху резервуар для хранения жидкости, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Для этого вырезают по углам листа равные квадраты и загибают образовавшиеся края. Какой наибольшей вместимости можно изготовить резервуар?

Если обозначить через x высоту резервуара, выраженную в дециметрах, то решение задачи можно свести к нахождению наибольшего значения функции $V(x)=4x(3-x)^2$ на интервале $(0; 3)$.

Включение дополнительных ограничений в условие задачи, например требования, чтобы высота резервуара была не менее 5 см и не более 20 см, приводит к отысканию наибольшего значения той же функции на отрезке $[0{,}5; 2]$.

С такой (дополненной) задачи и следует начать рассмотрение, а затем включить в рассмотрение задачи, приводящие к нахождению

наибольшего или наименьшего значения функции на интервале и полуинтервале. В ходе решения таких задач учащимся следует пояснить, что если функция непрерывна на концах соответствующего отрезка, то по известному правилу можно найти наибольшее и наименьшее значения функции на этом отрезке, и потом сделать вывод для решаемой задачи. Для абсолютного большинства таких задач искомое наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри рассматриваемого отрезка, а следовательно, и внутри соответствующего интервала или полуинтервала.

При решении текстовых задач наиболее трудным для учащихся является этап формализации, т. е. переход от содержательной задачи к математической задаче нахождения наибольшего или наименьшего значения функции на промежутке. Здесь, исходя из условия задачи, производится: 1) выбор аргумента, т. е. выбор и фиксация одной из переменных величин как независимой переменной; 2) выражение величины, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь в задаче, как некоторой функции выбранного аргумента; 3) нахождение промежутка изменения аргумента.

На первых порах не следует включать в рассмотрение текстовые задачи, приводящие к составлению функции, содержащей параметры (это встречается во многих примерах, разобранных в учебниках [23], [24], [27]), так как могут возникнуть дополнительные трудности, ведь учащиеся ранее не сталкивались с отысканием наибольшего и наименьшего значений функций, содержащих параметры, на отрезке, координаты концов которого также содержат параметры.

Вызывают у учащихся затруднения и те задачи, при решении которых приходится вводить несколько переменных величин. Следует пояснить, что в этих случаях конечная цель та же самая — выразить величину, о наибольшем или наименьшем значении которой говорится, как функцию только одной из введенных переменных. Приведем пример решения задачи такого типа.

З а д а ч а 2. Из куска проволоки длиной 30 см изготовлен прямоугольный треугольник, имеющий наибольшую площадь. Какова эта площадь?

Р е ш е н и е. I. Выразим площадь прямоугольного треугольника как функцию одного из его острых углов, который обозначим через α. Очевидно, что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Учитывая, что $a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$ (где a и b — катеты, а c — гипотенуза этого треугольника) и что $a+b+c=30$, получим $c\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha+1)=30$, откуда $c=\frac{30}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}$, и тогда

$$a=\frac{30\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1},\quad b=\frac{30\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}.\quad S(\alpha)=\frac{450\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha+1)^2}.$$

Задача сведена к нахождению наибольшего значения функции $S(\alpha)$ на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$:

II. Найдем наибольшее значение функции $S(\alpha)$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Можно найти наибольшее значение функции $S(\alpha)$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$S'(\alpha)=450\cdot\frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha+1)-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha+1)^3}=$$
$$=450\cdot\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha+1)^2}.$$

В рассматриваемый интервал попадает лишь одна критическая точка $\frac{\pi}{4}$. Имеем: $S(0)=0$; $S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{225}{(1+\sqrt{2})^2}=225\cdot(\sqrt{2}-1)^2\approx 40$; $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Наибольшее значение функции $S(\alpha)$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ достигается в его внутренней точке $\frac{\pi}{4}$, следовательно, оно будет являться и наибольшим значением функции $S(\alpha)$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

III. Следовательно, наибольшую площадь имеет прямоугольный треугольник с острым углом $\frac{\pi}{4}$, т. е. равнобедренный прямоугольный треугольник, эта площадь равна $225\cdot(\sqrt{2}-1)^2\approx 40$ (см^2).

Учащихся целесообразно познакомить с одним из приемов, позволяющим упростить выкладки при решении ряда задач. Речь идет о задачах, связанных с вычислениями, в которых используется теорема Пифагора, а тогда в результирующих выражениях появляются квадратные корни. Нахождение производных от выражений, содержащих квадратные корни, технически сложнее, чем нахождение производных от многочленов. Чтобы свести вычисление к этому последнему случаю, можно воспользоваться утверждением: «Если функция $f(x)$ неотрицательна на некотором промежутке, то функции $f(x)$ и $f^2(x)$ принимают наибольшее (наименьшее) значение на этом промежутке в одной и той же точке», т. е. отыскание точек, в которых функция $y=\sqrt{g(x)}$ достигает наибольшего (наименьшего) значения, может быть сведено к отысканию аналогичных точек для функции $y=g(x)$.

Задачи, сводящиеся к нахождению наибольшего или наименьшего значений функции на бесконечном промежутке, не могут быть решены с помощью правила, справедливого для отрезка. В этом случае поиск может опираться на результаты исследования функции на монотонность и экстремумы на соответствующем промежутке, из которых и могут быть сделаны выводы. Если ориентировать учащихся на такой путь, то следует дать им образец записи решения.

Во многих случаях такое решение, вернее обоснование, можно упростить, если опираться на утверждение: «Для функции, непрерывной на промежутке и имеющей на нем единственный экстремум, в случае максимума это и будет ее наибольшее значение, а в

случае минимума — наименьшее». Доказательство этой теоремы вполне посильно для учащихся.

Иногда опора на этот факт дает более простое решение и в случае исследования функции на наибольшее или наименьшее значение на отрезке; так бывает в тех ситуациях, когда трудно сравнить значения функции на концах отрезка и в критических точках.

В учебниках отсутствуют текстовые задачи, в которых искомое наибольшее (наименьшее) значение достигалось бы на конце рассматриваемого промежутка; как правило, внутри промежутка имеется лишь одна критическая точка, в ней и достигается искомое значение. Для формирования у учащихся правильного представления о диапазоне возможных случаев необходимо включать в рассмотрение соответствующие задачи. Приведем примеры таких задач.

З а д а ч а 3. Имеется 40 м проволочной сетки. Требуется оградить три стороны прямоугольного участка земли, примыкающего четвертой стороной к стене здания. Каковы должны быть размеры участка, чтобы его площадь была наибольшей, если длина стены здания равна: а) 30 м; б) 10 м?

Если обозначить через x м длину стороны участка, прилегающей к стене здания, то задача сведется к отысканию наибольшего значения функции $S(x)=x\cdot\frac{40-x}{2}$ в промежутке: а) $(0; 30]$; б) $(0; 10]$. В первом случае функция достигает наибольшего значения в критической точке $x=20$, во втором — на конце промежутка, при $x=10$.

З а д а ч а 4. Через диагональ основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, пересекающая оба основания. Высота призмы равна 4 см, а длина диагонали основания в k раз больше этой высоты. Найти наибольшее значение площади сечения при условии: а) $k=3$; б) $k=4{,}5$.

Если обозначить $B_1K=x$ см (рис. 69), то задача сведется к отысканию наибольшего значения функции

$$S(x)=(2k+x)\cdot\sqrt{(2k-x)^2+16}$$

на отрезке $[0; 2k]$. Учитывая, что эта функция положительна на рассматриваемом отрезке, отыскание ее критических точек можно свести к отысканию критических точек функции $y=S^2(x)$. В результате получаем, что в заданном промежутке содержатся две критические точки, причем при $k=3$ наибольшее значение достигается на конце отрезка, в точке $x=6$ (т. е. наибольшую площадь имеет диагональное сечение), а при $k=4{,}5$ — в критической точке $x=1$

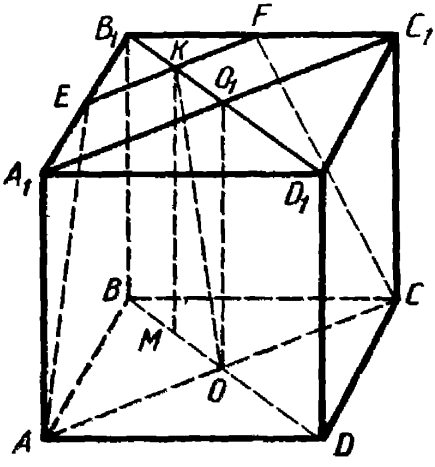


Рис. 69

Задачи на наибольшие и наименьшие значения могут решаться не только при изучении соответствующей темы курса алгебры и начал анализа, но и при изучении последующих тем этого курса и курса геометрии. При итоговом повторении курса также имеется возможность решать такие задачи, предполагающие широкое использование внутрипредметных и межпредметных связей. Некоторые задачи наряду с применением производной могут быть решены и элементарными методами. Рассмотрение различных способов решения одной и той же практической задачи поможет учащимся осознать возможность использования в одних и тех же условиях различных математических средств и методов, позволит сравнивать их, выявлять сильные и слабые стороны, что будет способствовать воспитанию правильного понимания роли математики в жизни и практике, готовить к активному участию в практической деятельности.

§ 33. Методика изучения элементов интегрального исчисления

1. Элементы интегрального исчисления в учебной и методической литературе. В учебной и методической литературе встречается разный порядок изложения вопросов интегрального исчисления.

Иногда введение и изучение определенного интеграла не связываются с использованием производной. Чаще до введения определенного интеграла понятие производной уже дано. Тогда авторы по-разному выбирают порядок изучения определенного интеграла и первообразной: либо раньше дается определение определенного интеграла, а первообразная появляется, когда учащиеся в достаточной мере могут оценить преимущества, даваемые формулой Ньютона — Лейбница, либо сначала вводится понятие первообразной, а потом определенный интеграл, причем определения его могут быть разными (интеграл рассматривается как приращение первообразной или как предел интегральных сумм), но в вычислении определенного интеграла основную роль играет применение первообразной. Последний подход преобладает в пробных учебниках и учебных пособиях для средней школы.

В учебном пособии [26] порядок тот же. Такой порядок более всего соответствует школьной программе: изучение понятия первообразной функции естественным образом связывается с теми вопросами дифференциального исчисления, которые входят в школьную программу, а возможность применения первообразной к вычислению площадей и объемов дает богатый материал для решения задач.

Эти же задачи можно решать, опираясь и на определение интеграла как предела интегральных сумм. Это понятие гораздо сложнее, чем понятие первообразной; авторы большинства пособий для средней школы дают его нестрого, но и при этом определение выглядит громоздко, строгое же определение недоступно для большинства учеников. Вместе с тем идея метода очень наглядна,

определение допускает наглядную геометрическую интерпретацию, оно более близко по духу к тем курсам, где интеграл находит практическое применение.

Начнем с определения первообразной. Сравним два определения.

1) Функция F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$ (см. [24]).

2) Функция $F(x)$, называется первообразной в промежутке от функции $f(x)$, если в этом промежутке функция $F(x)$ непрерывна, а в каждой внутренней точке промежутка справедливо равенство $F'(x)=f(x)$ (см. [101]).

Первое определение короче за счет того, что формулируется более сильное требование: на концах промежутка требуется дифференцируемость, а не непрерывность, как во втором определении. Первое определение мы примем для дальнейшего изложения.

Иногда авторы пособий отказываются от указания промежутка, в котором рассматривается первообразная. Вряд ли это стоит делать: правда, большей частью ученики будут встречаться со случаями, когда функция и ее первообразная определены на множестве действительных чисел, но встречаются и другие случаи. Например, при доказательстве теоремы о производной площади криволинейной трапеции соответствующая функция рассматривается на отрезке.

Имеется несколько вариантов определения понятия определенного интеграла. Часть авторов определяет его как приращение первообразной: «Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции: $F(b)-F(a)$» [26]. Другая группа авторов определяет это понятие как предел интегральных сумм.

Обычный недочет изложения этих разделов в пособиях для средних учебных заведений (имеются в виду и учебники для техникумов) — то, что интеграл определяют как предел, не давая определения предела для этого случая. Еще более распространенная ошибка (в том смысле, что она встречается даже в учебниках для высшей школы) заключается в том, что, применяя определение при доказательстве свойств интеграла, пользуются теоремами, доказанными для других видов предела, не приводя их доказательств для данного случая (теорема о пределе суммы, о вынесении постоянного множителя за знак предела и т. п.). Надо сказать, что принятые в учебниках для средних учебных заведений определения интеграла не всегда дают возможность доказать обычные, часто применяемые свойства интеграла. Например, при том определении, которое принято в [24], нельзя доказать свойство аддитивности.

Все это, очевидно, неизбежные издержки попыток дать более доступное для учащихся изложение этого трудного материала, но все же, хотя бы в работе с сильными учащимися, надо стараться избегать таких ошибок.

Напомним определение определенного интеграла, принятое в вузовских учебниках. Пусть функция $f(x)$ задана в некотором сегменте $[a; b]$. Разобьем его произвольным образом на части,

вставив между a и b точки деления: $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots<x_n=b$. Наибольшую из разностей $\Delta x_i=x_{i-1}-x_i$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ обозначим $\max \Delta x_i$. В каждом из частичных промежутков $[x_i; x_{i+1}]$ выберем произвольную точку c_i: $x_i \leqslant c_i \leqslant x_{i+1}$. Составим сумму

$$S=f(c_0)(x_1-x_0)+f(c_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(c_i)(x_{i+1}-x_i)+\ldots+$$
$$+f(c_{n-1})(x_n-x_{n-1})=f(c_0)\Delta x_0+f(c_1)\Delta x_1+\ldots+f(c_i)\Delta x_i+\ldots+$$
$$+f(c_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Установим понятие предела (конечного) этой суммы при $\max \Delta x_i \to 0$.

Число I называется пределом суммы S при $\max \Delta x_i \to 0$, если для любого положительного числа ε найдется такое число δ, что как только $\max \Delta x_i < \delta$, так выполняется неравенство $|I-S|<\varepsilon$ при любом выборе точек c_i.

Если существует конечный предел I суммы S при $\max \Delta x_i \to 0$, то он называется определенным интегралом функции $f(x)$ в промежутке от a до b. Обозначение: $I=\int_a^b f(x)\,dx$.

2. Понятие первообразной функции. Введение определения. Неопределенный интеграл. Для введения понятия первообразной функции можно обратиться к таблице, в которой записаны функции и их производные, и поставить задачу воспользоваться ею для отыскания функции, производная которой равна данной (взятой из столбца производных).

1. $y=C$ (C — постоянная), $y'=0$.
2. $y=x$, $y'=1$.
3. $y=x^2$, $y'=2x$.
4. $y=x^3$, $y'=3x^2$.
5. $y=x^{-2}$, $y'=-2x^{-3}$.
6. $y=x^{-3}$, $y'=-3x^{-4}$.
7. $y=x^k$ (k — целое число), $y'=kx^{k-1}$.
8. $y=\sin x$, $y'=\cos x$.
9. $y=\cos x$, $y'=-\sin x$.

Дальнейшее развитие этой задачи: найти функции, производные которых равны x^2, x^3, x^{-2}, x^{-3}.

Нетрудно заметить, что поставленная задача решается неоднозначно: для каждой функции найдется бесконечное множество функций, производная которых равна данной функции; эти функции отличаются только постоянной. Например, $2x$ является и производной функции $y=x^2$, и производной функции $y=x^2+0{,}5$, и вообще производной любой функции $y=x^2+C$, где C — постоянная.

После такого рода упражнений вводится определение первообразной функции, или просто первообразной: «Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ в данном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$».

В большинстве приведенных примеров промежутком, в котором функции определены, является вся числовая прямая, найденные первообразные для них тоже определены на всей числовой прямой;

в примерах 5, 6 и примере 7 (при $k<0$) найденные функции являются первообразными для данных в каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.

Использованную нами таблицу можно теперь переписать так, чтобы по ней удобно было находить первообразные данных функций.

1. $f(x)=0$, $F(x)=C$ (C — постоянная).
2. $f(x)=1$, $F(x)=x+C$.
3. $f(x)=2x$, $F(x)=x^2+C$.
4. $f(x)=3x^2$, $F(x)=x^3+C$.
5. $f(x)=-2x^{-3}$, $x\neq 0$ $F(x)=x^{-2}+C$.

На первых порах необходима проверка правильности решения задачи дифференцированием для закрепления понятия первообразной и для ликвидации возможных ошибок: первое время ученики путают формулы дифференцирования и интегрирования.

Далее доказываются т е о р е м ы. 1) Если $F(x)$ — одна из первообразных для данной функции $f(x)$ в некотором промежутке (конечном или бесконечном), то любая функция $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$ в этом промежутке. 2) Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то любая другая первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$, где C — какая-то постоянная.

Таким образом, выражение $F(x)+C$ обозначает множество всех первообразных данной функции.

После доказательства этих теорем могут быть решены задачи, подобные приведенным в таблице, и некоторые задачи физического содержания, например: «Скорость тела как функция времени задана формулой $v=at$ (a — ускорение). Найти путь как функцию времени движения».

Такого рода задачи могут и предшествовать введению понятия первообразной, демонстрируя необходимость этого понятия для решения прикладных задач. Надо только иметь в виду, что при этом физическое содержание задач должно быть достаточно прозрачным, чтобы не заслонять математическую сущность вопроса.

Введение понятия неопределенного интеграла и символа $\int f(x)\,dx$ для его обозначения не является строго необходимым в том небольшом курсе математического анализа, который возможен в школе, тем более что запись $\int f(x)\,dx$ вызывает трудности в объяснении происхождения символа (вспомним, что ученики могут быть не знакомы с понятием дифференциала, см. § 30). Вместе с тем введение такой символики позволяет в более наглядной форме записывать формулы интегрирования. Заметим еще, что возникающая здесь определенная трудность, связанная с пониманием того, что при проверке интегрирования дифференцированием мы имеем дело не с одной функцией, а с бесконечным множеством их, записанным в форме $\int f(x)\,dx$, сохраняется отчасти и в случае, когда понятие неопределенного интеграла не вводится. Еще один аргумент в пользу введения символа $\int f(x)\,dx$ — общепринятость его: ученики должны быть подготовлены к чтению литературы, а там они с таким обозначением встретятся. Символ $\int f(x)\,dx$ и термин «неопределенный интеграл» можно ввести после доказательства приведенных выше теорем 1 и 2. При этом разъясняется, почему употребляется слово «неопределенный», показывается связь между интегрированием и дифференцированием.

3. Применение интеграла к вычислению площадей. Вывод формулы площади криволинейной трапеции. Займемся теперь применением первообразной к вычислению площадей плоских фигур. Поставим задачу найти способ для вычисления площади криволинейной трапеции (задачу ставим в предположении, что площадь существует).

Предварительно у учеников должно быть создано правильное представление о криволинейной трапеции как о фигуре, ограниченной графиком непрерывной функции, осью x и прямыми, параллельными оси y (рис. 70). В число примеров надо обязательно включать такие, где длины перпендикуляров к оси x равны нулю, а также случаи, где график функции является прямой или отрезком.

Теорема. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, неотрицательная на отрезке $[a; b]$, S — площадь соответствующей криволинейной трапеции. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то $S=F(b)-F(a)$ (см. рис. 70).

Рассмотрим функцию $S(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$. Если $x=a$, то $S(a)=0$. Если $a<x\leqslant b$, то $S(x)$ — площадь части криволинейной трапеции, расположенной левее прямой, проходящей через точку $(x; 0)$. При этом $S=S(b)$. Докажем, что $S'(x)=f(x)$. Приведем одно из доказательств этого утверждения, по аналогии с которым будет позже доказано утверждение $V'(x)=S(x)$, где $S(x)$ — площадь сечения для объема тела.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Каждому значению x из этого отрезка соответствует площадь $S(x)$ криволинейной трапеции; при этом $S(a)=0$, $S(b)$ — площадь криволинейной трапеции, соответствующей отрезку $[a; b]$. Докажем сначала, что $S'(x)=f(x)$ для всех x на интервале $(a; b)$. Пусть $x_0\in(a; b)$. Рассмотрим значение $x_0+\Delta x$ из этого интервала. Приращение функции выразится разностью $\Delta S(x_0)=S(x_0+\Delta x)-S(x_0)$, которая равна площади криволинейной трапеции $ABCD$ с основанием, равным Δx, если $\Delta x>0$, и площади этой криволинейной трапеции, взятой со знаком «минус», если $\Delta x<0$.

Таким образом, можно записать, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$ выразится как $|\Delta S(x_0)|$ (рис. 71, 72).

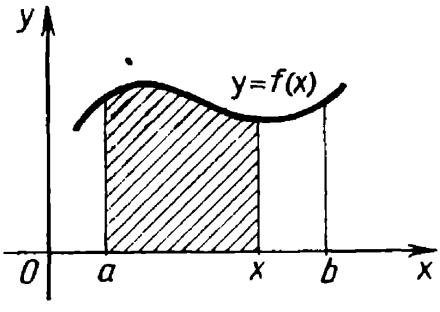


Рис. 70

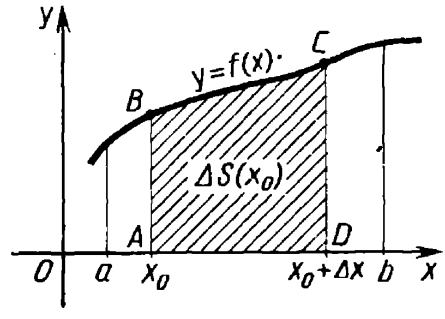


Рис. 71

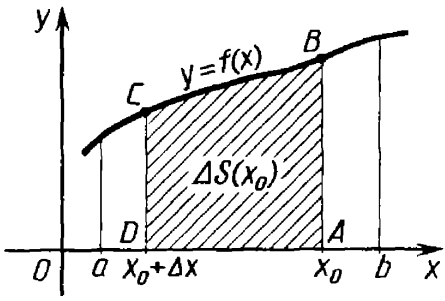


Рис. 72

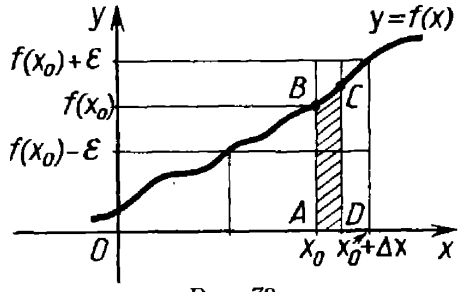


Рис. 73

Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то выполняется условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Это означает, что для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

или

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon. \qquad (1)$$

Если $\Delta x<\delta$, то для всех x, таких, что $x_0<x<x_0+\Delta x$ при $\Delta x>0$ (или $x_0+\Delta x<x<x_0$ при $\Delta x<0$), неравенство (1) выполняется. Поэтому (рис. 73) криволинейная трапеция с основанием, равным $|\Delta x|$, содержит в себе прямоугольник с тем же основанием и высотой $f(x_0)-\varepsilon$ и в то же время содержится внутри прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(x_0)+\varepsilon$. Значит,

$$(f(x_0)-\varepsilon)\cdot|\Delta x|<|\Delta S(x_0)|<(f(x_0)+\varepsilon)\cdot|\Delta x|.$$

Поэтому для всех $|\Delta x|<\delta$ выполняется условие

$$f(x_0)-\varepsilon<\left|\frac{\Delta S(x_0)}{\Delta x}\right|<f(x_0)+\varepsilon. \qquad (2)$$

Так как $S(x)$ — возрастающая функция (площадь криволинейной трапеции увеличивается с увеличением x), то

$\left|\frac{\Delta S(x_0)}{\Delta x}\right|=\frac{\Delta S(x_0)}{\Delta x}$, и неравенства (2) можно записать в виде

$f(x_0)-\varepsilon<\frac{\Delta S(x_0)}{\Delta x}<f(x_0)+\varepsilon$, или $\left|\frac{\Delta S(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

Но это означает, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x_0)}{\Delta x}=f(x_0)$.

Так как x_0 — произвольная точка интервала $(a;\ b)$, то утверждение $S'(x)=f(x)$ доказано для всех точек этого интервала.

Для точек a и b доказательство аналогично, но придется рассматривать соответственно $\Delta x>0$ и $\Delta x<0$ (т. е. правую и левую производные, см. § 30). Таким образом, доказано, что для любого x из интервала $[a;\ b]$ выполняется равенство $S'(x)=f(x)$, т. е. $S(x)$ является первообразной для функций $f(x)$ на $[a;\ b]$.

Существуют и другие доказательства, в частности такие, где рассматривается только случай, когда функция возрастает (или убывает), а для вычисления площади криволинейной трапеции

делят отрезок $[a; b]$ на промежутки монотонности функции $f(x)$.

Приведенный здесь способ носит более общий характер и удобен тем, что легко переносится на вычисление объема.

Учитывая относительную сложность доказательства, можно рекомендовать его для сильных учеников.

Выведем теперь формулу для площади криволинейной трапеции. Как одна из первообразных функции $f(x)$ функция $S(x)$ выражается через любую другую первообразную этой функции $F(x)$ по формуле

$$S(x)=F(x)+C.$$

Найдем постоянную C, используя то, что $S(a)=0$. Имеем $S(a)=F(a)+C$, т. е. $C=-F(a)$. Значит, $S(x)=F(x)-F(a)$.

Отсюда $S(b)=F(b)-F(a)$. Как выяснено ранее, $S(b)$ — это площадь данной криволинейной трапеции. Получили формулу

$$S=F(b)-F(a), \text{ где } F'(x)=f(x).$$

Примеры. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями, уравнения которых заданы:

1) $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$;

2) $y=x^2-4x+5$, $y=0$, $x=1$, $x=3$;

3) $y=2x$, $x=4$, $y=0$, $x=6$.

Во всех этих примерах значения a и b даны в условии задачи, поэтому площадь вычисляется путем прямого применения формулы.

Имея в распоряжении знак неопределенного интеграла, можно было бы несколько короче записать решение задач. Например, вместо записи «Одна из первообразных функций $y=x^2-4x+5$ есть $\frac{x^3}{3}-2x^2+5x$» появится запись:

$$\int (x^2-4x+5)\,dx=\frac{x^3}{3}-2x^2+5x+C.$$

4. Понятие определенного интеграла. Последовательность упражнений на вычисление площадей. Решая задачи на вычисление площади криволинейной трапеции, нетрудно убедиться, что площадь полностью определяется функцией $y=f(x)$ и концами промежутка a и b. Действительно, всякая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от любой другой ее первообразной $F(x)$ на постоянную, поэтому $\Phi(x)=F(x)+C$, т. е.

$$\Phi(b)-\Phi(a)=(F(b)+C)-(F(a)+C)=F(b)-F(a).$$

Таким образом, любые две первообразные для функции $f(x)$ имеют на отрезке $[a; b]$ одно и то же приращение.

Приращение первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ будем называть **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначать

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

По определению $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, где $F'(x)=f(x)$.

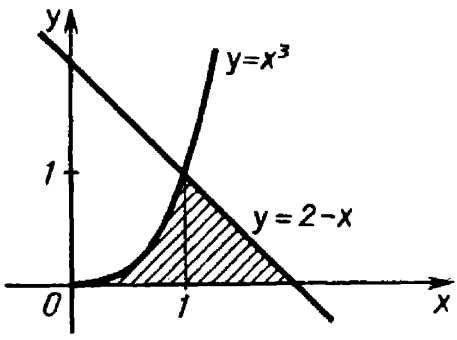


Рис. 74

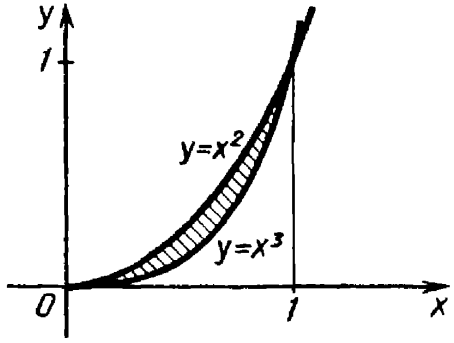


Рис. 75

Если понятие неопределенного интеграла не вводилось, то можно не употреблять термин «определенный интеграл», а говорить просто «интеграл».

Надо сказать, что и без так введенного понятия определенного интеграла можно решать задачи на вычисление площадей, вывести нужные в школьном курсе формулы для вычисления объемов: для этого достаточно понятия первообразной. Но символом определенного интеграла пользоваться удобно (сокращаются записи), он общепринят, с ним ученики в дальнейшем могут встретиться при чтении математической литературы.

В случае его присутствия в школьном курсе формулы для вычисления будут выглядеть так: $S=\int_a^b f(x)\,dx$, а вычисления приобретут вид:

$$S=\int_1^3 (x^2-4x+5)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right)\Big|_1^3=2\frac{2}{3}.$$

Таким образом, сначала мы предлагаем пользоваться для решения задач на вычисление площадей формулой, выражающей площадь как разность значений первообразной. Только тогда, когда на примерах ученики усвоят формулу, предлагаем перейти к использованию символа определенного интеграла. При доказательстве теоремы, что площадь криволинейной трапеции не зависит от того, какой из первообразных данной функции воспользовались для вычисления площади, полезно проделать в решенных перед этим задачах вычисления, используя различные первообразные для одной и той же функции.

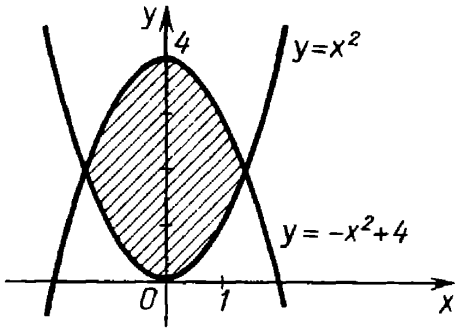


Рис. 76

В более сложных задачах, которые далее приводятся, будем использовать символ $\int_a^b f(x)\,dx$. Усложнение упражнений идет в следующих направлениях:

1) Функция $f(x)$ задается, а пределы интегрирования надо найти из условия задачи (например, вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой и осью абсцисс, если парабола пересекает ось абсцисс).

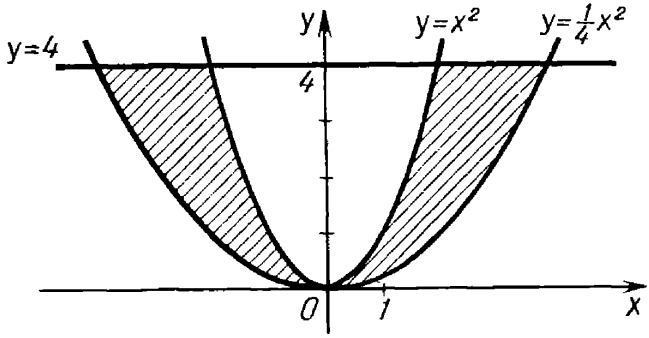


Рис. 77

2) Задаются две функции, графики которых имеют точку пересечения, и пределы интегрирования. Криволинейную трапецию приходится разбивать на части.

3) Как и в предыдущем случае, задаются две функции, но пределы интегрирования приходится находить в процессе решения задачи.

Пример. Заданы функции $y=x^3$, $y=2-x$ (рис. 74). Требуется найти площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и осью абсцисс.

4) Случай, когда площадь фигуры вычисляется как разность площадей двух криволинейных трапеций (рис. 75).

5) Сочетание предыдущих случаев (рис. 76).

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугами парабол $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$ и прямой $y=4$ (рис. 77).

В последней задаче полезно использовать симметрию фигуры относительно оси y.

6) Задачи, в которых данную фигуру можно расположить относительно осей координат так, чтобы можно было при вычислении площади использовать формулу для площади криволинейной трапеции.

Пример. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием 10 см и стрелкой 6 см, если его основанием служит хорда, перпендикулярная оси параболы.

Один из способов расположения сегмента изображен на рисунке 78.

7) Случай, когда функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ удовлетворяет условию $f(x)\leqslant 0$.

Многие из этих задач можно разбирать с учащимися на готовых чертежах с помощью кодоскопа.

Здесь либо в каждой конкретной задаче используется симметрия относительно оси x (чтобы можно было воспользоваться прежней формулой для вычисления площади), либо выводится специальная формула для случая $f(x)\leqslant 0$, $S=-\int_a^b f(x)\,dx$, которая затем используется в конкретных задачах.

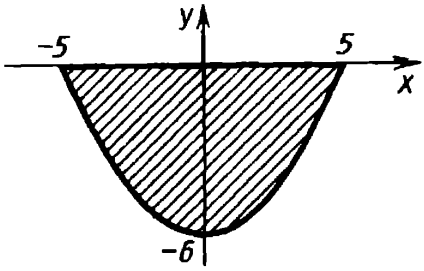


Рис. 78

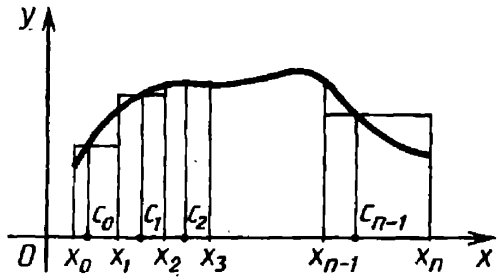


Рис. 79

Очень важно соблюдать постепенность в наращивании трудности решаемых задач; тогда ученики сравнительно легко переходят от одной задачи к другой, более трудной, сами догадываются о дополнительных построениях и т. д.

Мы видели, что для решения большого числа задач, которые здесь рассмотрены, оказалось достаточно понятия определенного интеграла как приращения первообразной. Вместе с тем возможно и введение понятия определенного интеграла как предела интегральных сумм (ранее были высказаны доводы в пользу этого). При этом можно исходить из задачи вычисления площади криволинейной трапеции, как это и делается в большинстве учебных пособий. Желательно при этом отрезок оси абсцисс разбивать на части неравной длины, чтобы показать более общий прием рассуждений. Построения ясны из рисунка 79.

Вычислим площадь криволинейной трапеции как предел площадей ступенчатых фигур, составленных из построенных прямоугольников, при условии, что число прямоугольников стремится к бесконечности, а основания прямоугольника стремятся к нулю.

Таким образом, площадь вычисляется как предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} (f(c_0)(x_1 - x_0) + f(c_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_{n-1})(x_n - x_{n-1})).$$

Заметим, что здесь мы сталкиваемся с существенно новым видом предела, который ученикам неизвестен. Сумма, стоящая под знаком предела, не является функцией $\max \Delta x_i$: при одном и том же значении $\max \Delta x_i$ можно по-разному разбивать отрезок AB на части, длины которых не превосходят $\max \Delta x_i$, а когда разбиение произведено, можно по-разному выбирать числа c_i. Поэтому появляется необходимость дать определение предела сумм указанного вида (см. п. 1).

Важно обратить внимание учащихся на то, что аналогично тому, как это имеет место в определении предела $f(x)$ при $x \to a$, выбирается произвольно положительное число ε и для каждого такого ε находится зависящее от него число δ (положительное), удовлетворяющее указанным в определении условиям. Смысл условия в том, что разность между суммой S_n и числом I может быть сделана как угодно малой, стоит только выбрать достаточно малыми Δx_i.

После этого дается определение интеграла и вводится обозначение

$I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $I=\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0}(f(x_0)(x_1-x_0)+\ldots+f(c_{n-1})(x_n-x_{n-1}))$.

Можно доказать, что для всякой непрерывной на $[a; b]$ функции интеграл существует; учащимся этот факт сообщается без доказательства. Без доказательства сообщается также, что определенный интеграл выражает площадь криволинейной трапеции; существование площади считается интуитивно ясным. Итак,

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Далее из того, что эта же площадь выражается как $F(b)-F(a)$, где $F'(x)=f(x)$, получаем формулу Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Как видим, определение определенного интеграла громоздко, требует большой работы для усвоения его содержания. В силу этого можно считать необязательным даже для сильных учащихся то, что формулируется на языке ε — δ; ученики должны понять процесс составления интегральной суммы и научиться формулировать определение, пользуясь словами «как угодно малая», «достаточно малая». В работе с основной массой учащихся можно ограничиться уровнем строгости, предлагаемым в школьном учебном пособии.

5. Применение определенного интеграла к вычислению объемов. Задачи на вычисление объемов обычно более громоздки, чем задачи на вычисление площадей, но в основе их решения лежит та же идея, поэтому ученики усваивают их тем легче, чем основательнее они изучали раздел «Площади».

Подобно тому как в предыдущем разделе мы не касались вопроса об определении площади и ее существовании, здесь будем исходить из того, что объем рассматриваемого тела существует и мы ищем способ его вычисления. Не будем также излагать те разделы темы «Объемы тел», которые предшествуют применению интеграла. В нашем варианте изложения понадобится знание формулы для объема прямого цилиндра с произвольным основанием (имеющим площадь). Эту формулу $V=SH$, где S — площадь основания, H — высота, V — объем, можно дать без доказательства, ссылаясь на то, что ее частные случаи для прямого параллелепипеда, прямой призмы с произвольным основанием, прямого кругового цилиндра ранее получены.

Поставим задачу вычислить объем тела, у которого известна площадь любого сечения, перпендикулярного некоторой оси x. Пусть тело располагается при этом между плоскостями, перпендикулярными оси и проведенными через точки a и b на ней. Обозначим площадь сечения S и будем рассматривать только случай, когда функция $S(x)$ (площадь сечения, проведенного через точку x) непрерывна на $[a; b]$. Наряду с этой функцией будем рассматривать функцию $V=V(x)$, где $V(x)$ — объем части тела, отсекаемой плоскостью, проведенной через точку x на оси x.

Пусть сечения тела таковы, что из любых двух сечений тела плоскостью, перпендикулярной оси x, одно проектируется внутрь другого или с ним совпадает.

Докажем, что при этих условиях

$$V'(x)=S(x) \text{ при } x\in[a; b].$$

Ход рассуждений будет точно таким же, как при выводе формулы площади криволинейной трапеции.

Найдем производную функции $V(x)$ в точке x_0 ($x\in(a; b)$). Функция $S(x)$ непрерывна, поэтому, каково бы ни было положительное число ε, найдется такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется условие

$$|S(x)-S(x_0)|<\varepsilon.$$

Если выбрать Δx так, что $|\Delta x|<\delta$, то для всех x, таких, что $x_0<x<x_0+\Delta x$ при $\Delta x>0$ или $x_0+\Delta x<x<x_0$ при $\Delta x<0$ выполняется неравенство $|S(x)-S(x_0)|<\varepsilon$, или $S(x_0)-\varepsilon<S(x)<S(x_0)+\varepsilon$.

Поэтому слой тела, отсекаемый плоскостями, проведенными через точки x_0 и $x_0+\Delta x$, заключен внутри прямого цилиндра с площадью основания $S(x_0)+\varepsilon$ и высотой $|\Delta x|$ и содержит в себе цилиндр с площадью основания $S(x_0)+\varepsilon$ и высотой $|\Delta x|$. Значит, приращение объема $\Delta V(x_0)$ по модулю заключено между объемами этих цилиндров:

$$(S(x_0)-\varepsilon)\cdot|\Delta x|<|\Delta V(x_0)|<(S(x_0)+\varepsilon)\cdot|\Delta x|.$$

Отсюда, так как $V(x)$ — возрастающая функция, т. е. $\Delta V(x_0)$ и Δx имеют одинаковые знаки, можно записать

$$S(x_0)-\varepsilon<\frac{\Delta V(x_0)}{\Delta x}<S(x_0)+\varepsilon,$$

что означает

или

$$\left|\frac{\Delta V(x_0)}{\Delta x}-S(x_0)\right|<\varepsilon,$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V(x_0)}{\Delta x}=S(x_0)$, т. е. $V'(x_0)=S(x_0)$.

Итак, для всех точек интервала $(a; b)$ $V'(x)=S(x)$; $S(x)$ — непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция, т. е. $V(x)$ — первообразная функция для $S(x)$ на отрезке $[a; b]$ (можно воспользоваться правой и левой производной соответственно в точках a и b).

После этого можно провести те же рассуждения, что и при выводе формулы для площади криволинейной трапеции, а именно $V(x)$ выразить через любую первообразную функции $S(x)$ как

$$V(x)=F(x)+C,$$

найти C и т. д.

Получим формулу

$$V=\int_a^b S(x)\,dx=F(b)-F(a), \text{ где } F'(x)=S(x).$$

Формулу можно применить для вычисления объемов большинства тел, которые изучаются в курсе геометрии (пирамида, конус, шар), и для решения задач на вычисление объемов тел, полученных вращением вокруг оси x графика функции $y=f(x)$. Выбор задач ограничивается только запасом формул интегрирования, который имеется в распоряжении учащихся.

Глава 10. ПРИКЛАДНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

§ 34. Некоторые особенности прикладной математики

Существуют две противоположные точки зрения на правомерность употребления термина «прикладная математика», первая из них отстаивает тезис о единстве математической науки.

Последовательными сторонниками такого взгляда являются, в частности, крупнейшие французские математики, объединившиеся в группу Н. Бурбаки, и их последователи.

Тем не менее факты свидетельствуют о том, что широкое распространение получил не только сам термин «прикладная математика» в обыденном понимании, под аналогичным названием написано много учебной и научной литературы, в которой дается методологическое обоснование прикладной математики, рассматриваются особенности применяемых в ней методов.

Очевидно, сущность прикладной математики, как и любой другой науки, может быть отчетливо осознана, если обратиться к истории развития математики.

Один из путей ее развития можно условно назвать *внешним*, т. е. связанным с необходимостью решать задачи, лежащие вне математики. В этом смысле причиной развития математики являлись задачи практики (счет предметов, измерения площадей и объемов, задачи экономики, техники и т. д.).

Второй путь — *внутренний*, вытекающий из необходимости систематизации найденных математических фактов, обобщения их в теорию, развития этой теории по ее внутренним законам. Именно этот источник и привел в свое время к выделению математики как науки.

Эти источники не следует абсолютизировать, так как их иногда бывает трудно разграничить. Тем не менее можно сказать, что два названных выше пути развития математики естественно назвать **прикладным** и **теоретическим** (чистым). Эти направления тесно связаны друг с другом, поэтому к любой уже созданной математической сущности часто бывает бессмысленным ставить вопрос о том, какому именно направлению, теоретическому или прикладному, она принадлежит.

Можно сказать, что прикладная математика — это наука о решении математических задач, возникающих вне математики. В связи с этим задачи, решаемые прикладной математикой, называются прикладными задачами. Особенностью прикладных задач яв-

ляется то, что при их решении наряду с индуктивными рассуждениями и дедуктивной логикой входят также и правдоподобные рассуждения [138], т. е. утверждения, справедливые в типичных случаях; доводы, основанные на аналогии, численном или физическом эксперименте, т. е. такие, которые неприемлемы в чистой математике или служащие в ней способом «наведения» на доказательство.

Приведем некоторые из них: рассуждения по аналогии; применение понятий вне рамок их первоначального определения; применение актуальной (практической) бесконечности, т. е. трактовка бесконечно малых и бесконечно больших величин — как постоянных, но имеющих другой «порядок», чем остальные величины; использование результатов приближенного решения при отсутствии удовлетворительной оценки ошибки.

При решении любой прикладной задачи можно выделить три этапа: первый этап — создание математической модели, т. е. перевод фактического материала с содержательного на язык математических формул (уравнения, неравенства и т. д.), второй этап — решение собственно математической задачи внутри построенной модели и, наконец, третий этап — перенос полученных результатов в практику (этап интерпретации).

Вполне понятно, что первому этапу свойственны правдоподобные рассуждения, связанные с выбором арсенала математических средств и установления соответствия (адекватности) математического аппарата рассматриваемому реальному явлению. Уже это обстоятельство делает решение прикладной задачи правдоподобным. Но, кроме того, правдоподобные рассуждения используются и при решении задачи внутри математической модели.

Соответственно этому можно говорить о *внешней* и *внутренней* правдоподобности. Внешняя правдоподобность характеризует соответствие математической модели реальному явлению, а внутренняя правдоподобность — соответствие полученных решений составленным уравнениям, неравенствам и т. п.

Между внешней и внутренней правдоподобностью могут быть два главных соотношения, а именно:

в первом случае стремятся к высокой внешней правдоподобности и, как следствие этого, получают громоздкую математическую модель, т. е. довольно сложные уравнения; при их решении вынуждены применять приближенные способы, которые существенно понижают уровень правдоподобности результата;

во втором случае строится сравнительно простая математическая модель, которой отвечает сравнительно невысокий уровень внешней правдоподобности, и за счет высокой точности решения полученных уравнений (неравенств) повышают правдоподобность результата решения всей задачи.

При решении прикладных задач большую роль играет эксперимент. Он используется часто при построении математической модели и служит подтверждением доброкачественности выбранной математической теории.

Теперь сформулируем несколько особенностей прикладной математики:

а) *Существование математического объекта*

В прикладной математике он существует как математическая модель реального объекта, которая сконструирована самими исследователями.

В чистой математике он существует как идея, не противоречащая принятой системе аксиом.

б) *Отношение к числу*

Прикладная математика относится к числу как к порядковому индексу или количественной мере реальной дискретной совокупности (натуральное число) или непрерывной протяженности (вещественное число).

Чистая математика относится к числу как к логическому объекту.

в) *Трактовка функции*

В прикладной математике допускается различная трактовка функции, кроме трактовки на языке соответствий между элементами множеств, ибо подобное определение является аморфным, расплывчатым и часто неприемлемым для приложения.

Приведем пример: «На автомобильном заводе в Тольятти ежедневно записывается число машин, выпущенных с первого числа текущего месяца, а в реке Москве в те же самые дни измеряется и записывается уровень воды. Получаются два ряда величин, между которыми по вполне определенному закону установлено однозначное соответствие, откуда следует, что уровень воды в реке Москве есть функция выпуска автомобилей в Тольятти».

С точки зрения чистой математики данный пример иллюстрирует понятие функции, а с точки зрения прикладного математика (естествоиспытателя, инженера), имеющего дело с причинными связями, этот пример воспринимается как нелепость.

С точки зрения чистой математики трактовка функции на языке соответствия между элементами двух множеств является наиболее приемлемой для логического построения курса математики. Другое дело, что эту концепцию трудно внедрить в курс математики средней школы.

г) *Проблема бесконечности*

Как известно, чистая математика отвергает концепцию актуального бесконечно малого. Этому во многом способствовало введение О. Коши строгого определения предела на языке потенциального бесконечно малого. С тех пор доказательства на языке «$\varepsilon - \delta$» нашли широкое применение в чистой математике и считаются достаточно строгими.

В то же время все дифференциальные законы прикладных дисциплин выводятся и трактуются на уровне актуальных бесконечно малых. Действительно, строгий предельный переход при исследовании реальных процессов невозможен уже из-за квантовых и молекулярных свойств, в силу которых рассматривать физические величины, уменьшенные сверх некоторых разумных границ, вообще лишено смысла.

В связи с этим физики, например, вводят «физически» или «практически» бесконечно малые величины, не давая этому понятию определения на языке чистой математики. Если, например, имеем формулу, выражающую плотность в точке неоднородного стержня $\rho(A)=\lim\limits_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta v}$, то совершенно ясно, что реально Δv не должно безгранично уменьшаться: его размеры должны быть существенно больше межмолекулярных расстояний. Тем не менее отсюда приходят к формулам $\rho=\frac{dm}{dv}$ и $dm=\rho dv$.

Аналогично дифференциальные соотношения используются при исследовании зависимостей между дискретными экономическими категориями.

Очевидно, объяснением этих явлений может служить положение о том, что поскольку упомянутые дифференциальные соотношения справедливы (как это доказано в чистой математике) для бесконечных непрерывных процессов, то они могут использоваться как частные случаи на ограниченных множествах.

Точно так же чистая математика допускает (и доказывает) существование бесконечных десятичных дробей. Тем не менее они лежат за пределами прикладной математики ввиду невозможности их практического использования.

§ 35. Функции прикладной направленности школьного курса математики

Известно, что эффективным обучением следует считать обучение, которое в единстве с воспитанием и наряду с изложением знаний обеспечивает активизацию мыслительной деятельности всех учащихся и сознательное овладение системой научных знаний, побуждает у них потребность в знаниях и вызывает интерес к предмету, соответствует развитию способностей каждого учащегося, прививает навыки и умения применять полученные знания на практике и самостоятельно приобретать их. Эффективному обучению во многом способствует решение задач с практическим содержанием. Потребность в использовании практических материалов при обучении школьников математике диктуется тем, что возникновение, формирование и развитие математических понятий имеют своим источником ощущения и восприятия, а также и тем, что в познавательной деятельности учащегося имеет место тесная связь логических процессов мышления и чувственных восприятий. Поэтому обращение к примерам из жизни, окружающей обстановки облегчает учителю возможность организовать учебную деятельность учащихся.

Все это способствует более глубокому усвоению теоретических положений, формированию умения применять математические знания на практике, позволяет в ряде случаев ознакомить школьников с процессом производства, с которым они на данном отрезке времени не могут встретиться непосредственно, т. е. осуществлению политехнического обучения, а также формированию диалектико-материалистического мировоззрения.

Для развития прикладных математических навыков при подборе упражнений, по нашему мнению, необходимое внимание надо, в частности, уделять: навыкам целеустремленного составления и анализа математических моделей реальных задач и развитию соответствующей интуиции на доступном учащимся уровне; навыкам отбора данных, нужных для решения задачи, прикидке их необходимой точности; выбору заранее не заданного метода исследования; задачам, требующим для своего решения предварительного вывода аналитических зависимостей; задачам, требующим для своего решения знаний из различных разделов курса; доведению решения задач до практически приемлемого результата; применению справочников и таблиц; прикидкам, оценкам порядков величин; действиям с различными величинами; методам контроля правильности решения.

Учитель имеет возможность пользоваться задачниками по математике,* выпущенными для школьников и для учащихся средних профессионально-технических училищ (в последних практические задачи подобраны по группам родственных специальностей).

Материал для составления прикладных задач можно заимствовать из различных отраслей народного хозяйства в результате знакомства с современной технической литературой, различными справочниками, а также при изучении народнохозяйственных планов нашей страны.

При составлении следует применять различные формулировки условий задач, в том числе формулировки, в которых существенно выделена описательная часть, формулировки-рассказы, задачи-расчеты и др., избегая однообразия, шаблона.

С целью обеспечения лаконичности и наглядности формулировок часто следует переносить некоторые элементы из словесной формулировки в чертеж, схему, диаграмму и т. п. и, показывая учащимся «чертеж-условие», добиваться самостоятельного решения.

Следует иметь в виду, что задачи с практическим содержанием не могут составить единой самостоятельной дидактической системы задач, обеспечивающей необходимое закрепление всего теоретического материала, изучаемого на уроках математики.

Условно прикладная направленность школьного курса математики может быть представлена по функциям, которые она выполняет (см. передний форзац).

Как видно, мировоззренческие и социально-педагогические функции тесно взаимосвязаны и реализуются через составляющие компоненты (очевидно, на схеме представлен их неполный перечень).

§ 36. Алгоритмическая линия курсов школьной алгебры и начал анализа

Значительную роль в усилении прикладной направленности школьного курса математики играет использование современных средств вычислительной техники. Теоретическое осмысливание такого использования связано с выделением понятий алгоритма, программы и представлений о методах решения задач с помощью ЭВМ.

Соответствующая область методики уже выделилась в самостоятельное направление исследований, однако выделение понятия алгоритма в курсе школьной математики существенно усиливает прикладную направленность курса.

1. Компоненты понятия алгоритма и их использование в обучении алгебре. Создание теории алгоритмов сопровождалось исключительно внимательным исследованием природы алгоритмов и их роли в математике. В ходе исследований были выделены несколько компонентов понятия алгоритма и созданы в итоге два понятия — содержательное и формальное.

С точки зрения методики существенным является то, что, используя выделенные компоненты, можно разработать алгоритмическую линию школьного курса алгебры. Материалом для организации пропедевтики понятия алгоритма при этом служат несколько операционных блоков. В качестве примера рассмотрим, как может быть организовано изучение метода подстановки для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Пример 1. *Способ подстановки и его использование при решении систем линейных уравнений.* Обозначим алгоритм, реализующий способ подстановки для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, через A. Наша цель — распределить описание A по компонентам понятия алгоритма и указать возможности выделения компонентов при изучении способа подстановки. Особенностью алгоритма как процедуры переработки является четкое описание формы представления входных данных (аргументов) и результатов. Для алгоритма A это описание таково: в качестве данных используется система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x+a_2y=a_3, \\ b_1x+b_2y=b_3, \text{ где } a_1\neq 0. \end{cases}$$

В качестве результата предусмотрено получение пары чисел $(x_0; y_0)$ или же одного из следующих текстов: «Система не имеет решений», «Система имеет бесконечное множество решений». Предполагается, что числа, используемые в качестве коэффициентов уравнений и получаемые в результате решения, записаны в одном из принятых в курсе алгебры виде.

Алгоритм A подразделяется на конечное число элементарных процедур (операторов). Каждый оператор считается при описании данного алгоритма нерасчлененной операцией. Приведем список операторов:

A_1. Выразить из первого уравнения неизвестное x через y: $x=f(y)$.

A_2. Подставить найденное выражение для неизвестного x во второе уравнение и привести полученное уравнение к виду линейного уравнения с одним неизвестным: $ay=b$.

A_3. Решить линейное уравнение $ay=b$.

A_4. Подставить найденное число y_0 в формулу $x=f(y)$.

Действия по алгоритму A производятся в несколько тактов. Каждый такт — выполнение одного из операторов на заданных

к началу выполнения такта числах. Порядок выполнения тактов полностью определен уравнением и логическими условиями, определяющими выбор оператора для следующего такта в зависимости от результатов, полученных на предыдущих тактах.

Алгоритм A может быть представлен так (рис. 80).

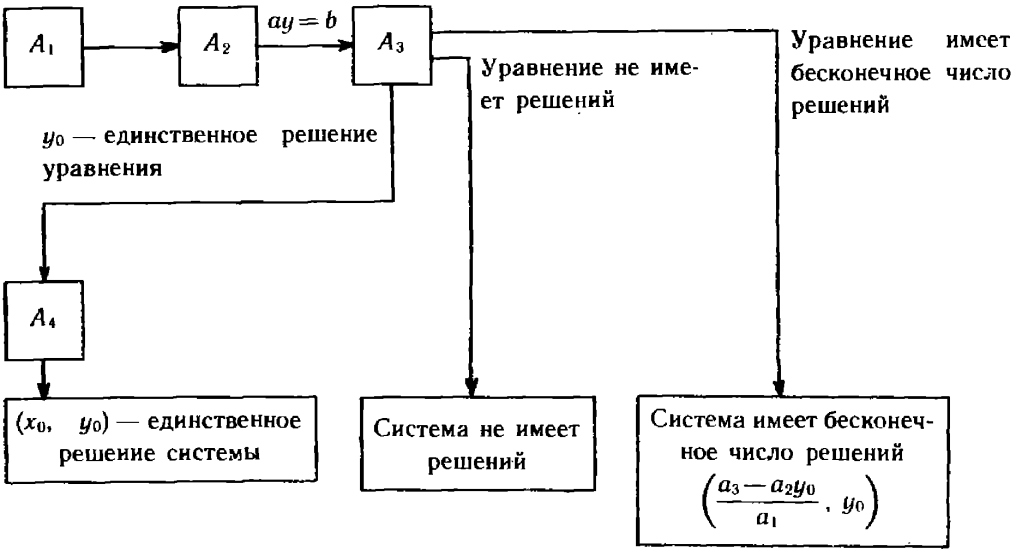


Рис. 80

За конечное число тактов работы любая система уравнений из заданного класса получает ответ. Это требование, очевидно, предусматривает, что каждый из операторов A_1, ..., A_4 в свою очередь ему удовлетворяет.

Выведем из приведенного описания алгоритма A некоторые приемы изучения описанного этим алгоритмом способа.

Дискретность. Операторы, используемые в данном алгоритме, должны быть актуализированы в начале изучения способа подстановки.

Детерминированность. В процессе изучения нужно уточнить роль каждого оператора в структуре алгоритма, т. е. логику его построения. В частности, на примерах нужно рассмотреть различные пути прохождения схемы алгоритма; как легко видеть, это приводит к трем различным типам заданий.

Результативность. Эта характеристика проявляется при анализе влияния исходных данных на ответ. Для этого могут быть использованы различные варианты заданий типа исследования системы уравнений в зависимости от параметров.

Массовость может быть выделена на нескольких примерах, в которых коэффициенты уравнений принадлежат различным числовым областям. При этом внимание учеников обращается на однотипность шагов (тактов алгоритма) в процессе решения.

Использовать в обучении приведенную методику выявления компонентов алгоритма A можно в одном из двух аспектов: с акцен-

том на изучение данной, конкретной процедуры или же для постепенного формирования представлений об общих чертах всех операционных блоков.

Рассмотрим некоторые ограничения, накладываемые на алгоритмическую линию курса школьной алгебры ее невыявленностью и неспецифичностью материала. В качестве отправной точки возьмем пример 1 и покажем, что реализация изложенного в нем подхода к развертыванию этой линии должна натолкнуться на определенные трудности. Главная из них та, что процесс решения системы линейных уравнений обладает определенной вариативностью, не предусмотренной описанием алгоритма.

Пример 2. *Частные случаи решения линейных систем.* Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2y=5, \\ 3x+y=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x+2y=3, \\ 7x+4y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3{,}5x+y=1, \\ 2x-2y=12. \end{cases}$

Начинать решение системы в) удобнее не при помощи алгоритма A, а методом, положенным в его основу; следует из первого уравнения выразить y через x, а не наоборот, как этого требует оператор A_1. Система а) не принадлежит области определения алгоритма A, хотя и здесь метод подстановки применим. Систему б) удобнее решать способом сложения уравнений.

Отметим, что причина, по которой в алгоритм A были введены ограничения на коэффициенты системы, состоит в желании упростить его структуру, пожертвовав некоторыми малосущественными частными случаями (пример 2а)). В принципе возможно учесть эти случаи, усложнив данный алгоритм. Можно также соединить его с алгоритмом, реализующим способ сложения (по типу решения линейных систем методом Гаусса). Однако сделать это в начальном курсе алгебры последовательно «алгоритмическим» способом, по-видимому, затруднительно.

Из изложенного делаем следующий вывод: алгоритмы конкретных процедур целесообразно использовать в курсе алгебры не изолированно, а в составе операционных блоков. В примере 1 это блок решения систем линейных уравнений (без ограничения на метод решения). Разумеется, подавляющее количество процедур, входящих в такой блок, имеет алгоритмическую природу, но не все они в обучении могут получить алгоритмическое развертывание, т. е. могут быть соотнесены с алгоритмической линией курса алгебры в плане выявления компонентов понятия алгоритма.

Например, в линии уравнений и неравенств посредством алгоритмов могут быть описаны общие черты по решению уравнений нескольких классов, приведенных к стандартному виду (линейных систем, квадратных уравнений и др.).

Вновь вернемся к примеру 1 и заметим, что использованный в алгоритме A метод подстановки обладает самостоятельным содержанием. Область его приложения гораздо шире линейных систем с двумя переменными. Этот метод, как и метод сложения уравнений, необходимо выделить из состава любых алгоритмов, использующих соответствующие операторы. Выделение метода под-

становки может быть осуществлено при анализе структуры алгоритма A, например, следующим образом: отметить, что роль оператора A_2 состоит в уменьшении числа неизвестных в полученном уравнении по сравнению с данной системой; выполнить задания, в которых A_2 используется вне алгоритма A, и разобрать решения; зафиксировать метод подстановки в качестве самостоятельной процедуры; доказать утверждение: уравнение, полученное из системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом подстановки, есть логическое следствие данной системы уравнений.

По мере формирования навыка применения алгоритма деятельность по его исполнению становится свернутой. Это означает, что ученики приобретают способность представлять данный алгоритм как выполненный потенциально, реально его не выполняя. Исключительное значение свертки в алгоритмической линии состоит в том, что свернутый алгоритм может быть использован как оператор в некотором другом алгоритме. Например, оператор A_3 — свернутый алгоритм решения линейного уравнения с одним неизвестным.

В итоге мы приходим к выводу: алгоритмическая линия может быь реализована посредством неявного формирования понятий алгоритма на материале традиционных процедур алгоритмического типа школьного курса алгебры. Реализация алгоритмической линии может состоять в формировании на этом материале компонентов понятия алгоритма при помощи специальных приемов рассмотрения операционных блоков. К числу таких примеров относятся: включение алгоритма в состав операционных блоков; применение переноса для выделения из состава алгоритма основного метода, имеющего более широкую область применимости; последовательная свертка алгоритмов, обеспечивающая их использование как операторов в более сложных алгоритмах.

2. Использование алгоритмов для решения задач. Дальнейшее развертывание содержания понятия алгоритма связано с созданием представлений как о теоретической структуре понятия, так и о стиле его использования при решении задач.

Использование алгоритма при решении задач связано, прежде всего, с идеей развертывания или детализации отдельных его операционных блоков, что позволяет потенциальную выполнимость алгоритма превратить в реальную. Дело в том, что каждый алгоритм создается с ориентацией на конкретного исполнителя. Таким исполнителем может быть человек или автомат.

Операционные блоки алгоритма распадаются на отдельные указания исполнителю выполнить определенные законченные действия. Обычно такие указания называют командами. Для того чтобы исполнитель мог решить задачу по заданному алгоритму, необходимо, чтобы он мог выполнить каждую команду алгоритма. Совокупность таких команд, которые могут быть выполнены исполнителем, называют системой команд исполнителя.

Например, классический алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел может быть сформулирован в виде такой последовательности команд:

1. Рассмотреть два числа. Если они равны, то взять первое число в качестве ответа и закончить исполнение алгоритма. В противном случае перейти к пункту 2.

2. Определить большее из двух чисел.

3. Заменить большее число на разность большего и меньшего чисел.

4. Перейти к пункту 1.

От исполнителя такого алгоритма требуется только умение сравнивать натуральные числа на равенство, определять большее из двух чисел и производить вычитание из большего числа меньшего. Если такие команды входят в систему команд исполнителя, то он сможет найти наибольший общий делитель двух натуральных чисел, пользуясь приведенным алгоритмом.

Однако может оказаться, что какая-то команда не входит в систему команд исполнителя, например команда «определить большее из двух чисел». Такая команда должна быть детализирована так, чтобы стать понятной исполнителю и реально выполнимой. Это может быть сделано, например, так:

Вычесть из первого числа второе. Если разность положительна, то считать большим первое число. В противном случае считать большим второе число.

Если и команда вычитания не входит в систему команд исполнителя, то и эта команда должна быть детализирована дальше, т. е. развернута в систему указаний, описывающих, как выполнить вычитание.

Таким образом, возможность детализации команд алгоритма позволяет в конечном итоге представить алгоритм в виде, доступном конкретному исполнителю, т. е. записать алгоритм с использованием только тех команд, которые входят в систему команд этого исполнителя, сделав такой алгоритм реально выполнимым.

Свойство алгоритма быть понятным исполнителю предполагает, что исполнитель однозначно и точно понимает каждую команду алгоритма. Это, в частности, означает, что два разных исполнителя с одинаковой системой команд в результате исполнения одного и того же алгоритма получат одинаковые результаты. Чтобы команды однозначно понимались исполнителем, необходимы специальные средства для записи алгоритма. Эти средства зависят от того, на какого исполнителя рассчитан алгоритм.

Так, для записи алгоритмов, рассчитанных на исполнителя-человека, наряду со словесной формой записи традиционно используются графические средства — схемы. Схемы выгодно отличаются от других форм записи алгоритма своей наглядностью, что делает целесообразным их использование в курсе алгебры.

При этом надо иметь в виду, что в курсе школьной информатики алгоритмы рассматриваются как жесткие структуры, построенные из определенных блоков, выбранных из конечного числа раз и навсегда зафиксированного набора блоков. Поэтому и в курсе алгебры целесообразно строить схемы таким же образом.

Среди фиксированного набора блоков встречаются блоки трех основных типов: функциональный блок, развилка и повторение. Последовательность, состоящая из следующих друг за другом блоков, образует так называемую серию, или следование. Из теории известно, что любой алгоритм может быть построен из структур только трех типов: следования, развилки и повторения. Таким образом, для построения любого алгоритма достаточно этих трех типов базовых структур.

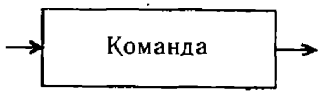


Рис. 81

Функциональный блок изображается в виде прямоугольника, внутри которого записывается команда алгоритма (рис. 81).

Следование представляет собой последовательность функциональных блоков, соединенных стрелками, указывающими порядок выполнения команд алгоритма (рис. 82).

Развилка (рис. 83) содержит условие, которое определяет, какой из двух функциональных блоков должен выполняться в зависимости от того, соблюдено или не соблюдено условие. Частным случаем развилки является *коррекция,* в которой в случае несоблюдения условия не выполняется вообще никакая команда (рис. 84).

Наконец, *повторение* также содержит условие, которое определяет, сколько раз должно быть повторено выполнение команд, содержащихся в этой структуре (рис. 85).

При построении алгоритма предполагается, что указанные типы структур могут быть вложены друг в друга, т. е. возможны сложные структуры. В частности, в качестве функционального блока можно рассматривать более сложную структуру, например развилку. В этом случае развилка рассматривается как «черный ящик», внутренняя структура которого не раскрывается. Для схем, таким

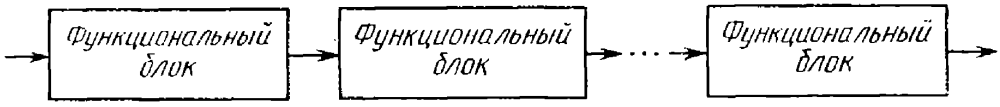


Рис. 82

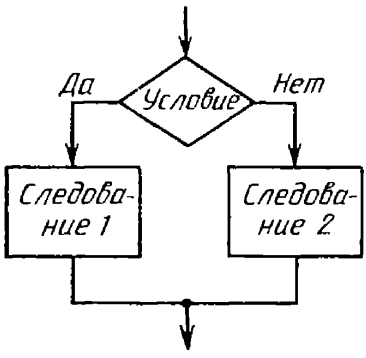


Рис. 83

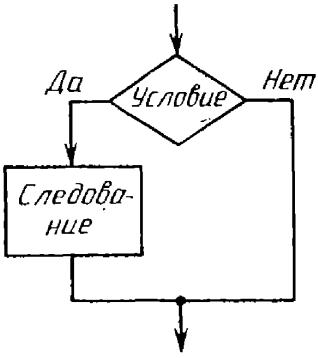


Рис. 84

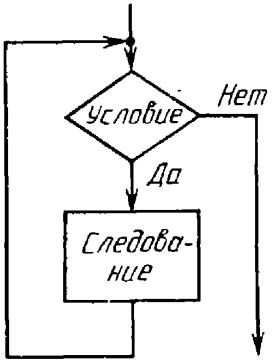


Рис. 85

образом, можно применять те же самые законы свертывания и развертывания операционных блоков алгоритма.

Применяя описанные правила построения схем, можно представить алгоритм Евклида так, как это показано на рисунке 86.

Такие схемы называют *структурированными.*

Однако схемы обладают целым рядом особенностей, которые ограничивают область их применения. К числу таких особенностей можно отнести следующие: невозможность чтения алгоритма как обычного текста; потеря наглядности при записи сложных алгоритмов, содержащих вложенные структуры (особенно при глубине вложенности больше двух); необозримость схемы при записи достаточно больших алгоритмов.

Поэтому для записи алгоритмов применяют и другие средства. Среди средств записи алгоритмов, рассчитанных на исполнителя-человека, получили распространение алгоритмические языки или псевдокоды. В таких языках также фиксируется набор основных команд, соответствующих основным базовым структурам — следованию, развилке, повторению. Фиксируются также правила записи этих команд, однако полный синтаксис языка, как правило, не зафиксирован, поэтому при записи отдельных команд допустим определенный произвол.

Так, в алгоритмическом языке, который используется для записи алгоритмов в школьном курсе информатики, не зафиксированы правила записи арифметических выражений (как это делается обычно в языках программирования) — в алгоритмическом языке эти выражения допускается записывать так, как это обычно делается в алгебре. Кроме того, в качестве команд допускается использование повелительных предложений, записанных на естественном языке. Это дает возможность сделать запись алгоритма более понятной конкретному исполнителю.

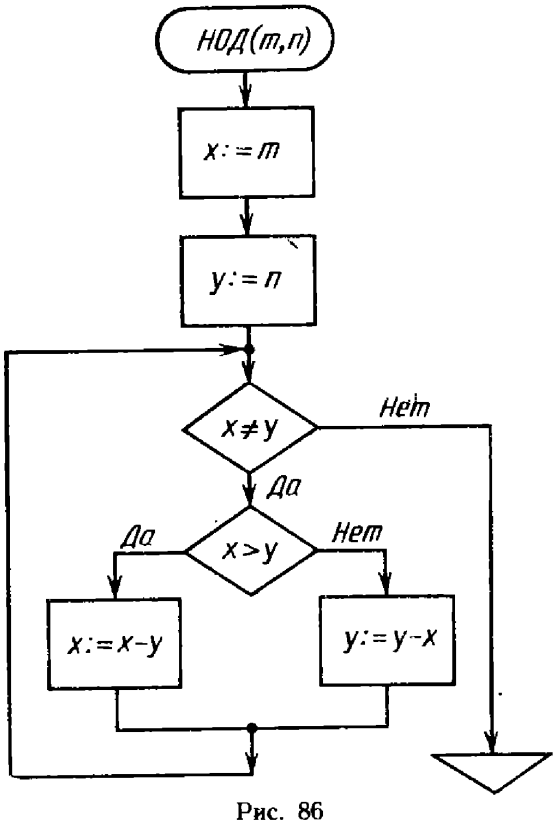


Рис. 86

Алгоритмы, записанные на алгоритмическом языке, также структурированы. Это делает алгоритм более понятным и доступным для исполнения. Кроме того, структурированный алгоритм на алгоритмическом языке можно читать как обычный текст без перерыва сверху вниз.

Приведем пример записи алгоритма Евклида на алгоритмическом языке, используемом в школьном курсе основ информатики:

```
алг  НОД (нат m, n, нат N)
     арг m, n
     рез N
нач  нат x, y
     x:=m
     y:=n
     пока x≠y
     нц
       если x>y
            то x:=x−y
            иначе y:=y−x
       все
     кц
     N:=x
кон
```

Применение алгоритмического языка для записи алгоритмов в школьном курсе алгебры оправдано не только удобством этого языка, но также и тем, что это служит пропедевтикой основных понятий информатики. Многие алгоритмы из курса алгебры вполне могут быть записаны на этом языке в форме, доступной для исполнения учащимися. Приведем в качестве еще одного примера запись алгоритма вычисления значения полинома n-й степени

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

по схеме Горнера:

$$P_n(x)=(\ldots((a_0x+a_1)x+a_2)x+\ldots+a_{n-1})x+a_n.$$

```
алг  СХЕМА ГОРНЕРА (цел n, вещ x, y, вещ таб a [∅:n])
     арг n, a, x
     рез y
нач  цел i
     i:=∅
     y:=a[∅]
     пока i≠n
     нц
       i:=i+1
       y:=y·x+a |i|
     кц
кон
```

Алгоритмический язык, как и схемы, ориентирован на человека — исполнителя алгоритма. Но в качестве исполнителя алгоритма может использоваться и автомат. В роли таких автоматов — исполнителей алгоритма выступают электронные вычислительные машины (ЭВМ), которые являются универсальными устройствами обработки информации. Чтобы автомат смог исполнить алгоритм, этот алгоритм

должен быть записан на формальном языке, каждое предложение которого должно допускать только однозначную трактовку. В таком языке уже недопустима произвольная запись арифметических выражений, а набор команд и правила их записи должны быть строго регламентированы. Другими словами, синтаксис языка должен быть строго фиксирован.

Таким образом, приходим к пониманию необходимости языка программирования для записи алгоритма, рассчитанного на ЭВМ. Алгоритм, записанный на языке программирования, называют программой для ЭВМ.

Основные понятия программирования являются предметом изучения в школьном курсе информатики и поэтому остаются за рамками школьного курса алгебры. Однако важно заметить, что основные принципы алгоритмизации и записи алгоритмов в виде схем, и особенно на алгоритмическом языке (псевдокоде), являются важной пропедевтикой этих понятий.

Таким образом, алгоритмическая линия школьного курса алгебры находит свое естественное продолжение и завершение в школьном курсе информатики.

Глава 11. МАШИННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

В рамках реализации школьной реформы и в связи с необходимостью обеспечения всеобщей компьютерной грамотности в нашей стране начата работа по использованию современных средств вычислительной техники для обеспечения учебного процесса по школьному курсу «Основы информатики и вычислительной техники», а также по курсам других школьных дисциплин, в первую очередь математики.

В этой связи должно возрасти использование калькуляторов для обеспечения вычислений в процессе обучения математике. Использование калькуляторов для вычислений началось в школе с середины 70-х годов, когда их серийный выпуск был существенно расширен, а стоимость снизилась, что сделало их доступными для школы.

Интерес к использованию калькуляторов в школьном курсе математики вполне обоснован, так как по подсчетам С. И. Шварцбурда и М. П. Ковалева «на вычисления в общем курсе математики отводится более 50% учебного времени, т. е. около 1000 часов» [169]. Высказывались опасения, что использование калькуляторов приведет к утрате навыков устных и письменных вычислений. Однако исследования по использованию калькуляторов в учебном процессе школы, начатые с середины 70-х годов, показали, что при общем снижении вычислительной нагрузки и экономии времени, использование калькуляторов не приводит к снижению навыков устных и письменных вычислений. В связи с этим Минпрос СССР разрешил в 1982 г. использование калькуляторов на уроках математики, начиная с VII класса.

В середине 70-х годов на основе микропроцессоров были разработаны принципиально новые типы ЭВМ, получившие название «персональные компьютеры». Они быстро завоевали всеобщее признание и получили широкое распространение. Сейчас началось их внедрение в учебный процесс школы прежде всего в связи с обеспечением курса информатики. Однако возможности персональных ЭВМ значительно перекрывают потребности не только курса информатики, но и курса школьной математики и других школьных дисциплин.

Чтобы повысить эффективность обучения математике, необходимо сделать внедрение калькуляторов и персональных ЭВМ в учебный процесс управляемым и подчинить его целям и задачам математического образования. Для этого необходимо, чтобы каждый учитель математики хорошо представлял возможности калькуляторов и персональных компьютеров и их место в курсе математики.

§ 37. Вычисления с использованием калькулятора

Калькуляторы разных типов значительно различаются по своим функциональным возможностям. Их принято делить на простейшие (или арифметические), инженерные и программируемые.

Арифметические калькуляторы выполняют четыре арифметических действия, действия с константой, ряд простых преобразований (извлечение квадратного корня, вычисление процентов, накопление в отдельном регистре памяти). Из-за ограниченности своих возможностей такие калькуляторы могут использоваться в начальной школе, а в старших классах их возможности оказываются явно недостаточными для обеспечения учебного процесса по математике.

Инженерные калькуляторы, помимо тех возможностей, которые имеют калькуляторы арифметического типа, обладают дополнительными возможностями вычисления значений тригонометрических, логарифмических, показательных и некоторых других элементарных функций. Благодаря этим возможностям инженерные калькуляторы вполне пригодны для использования в старших классах школы.

Наиболее широкими функциональными возможностями обладают программируемые калькуляторы. Они обладают дополнительной (программной) памятью, в которую можно вводить программы вычислений, составленные самими учащимися.

Программируемые калькуляторы могут работать и в автоматическом режиме как обычные инженерные калькуляторы, и в программном режиме, выполняя программу, заданную человеком.

Программируемые калькуляторы, как и инженерные, вполне могут использоваться в процессе изучения математики в старших классах. При этом наличие программного режима дает дополнительную возможность использования этого типа калькуляторов для пропедевтики изучения основ информатики.

Инженерные и программируемые калькуляторы имеют дополнительные различия, связанные с формой представления арифметических выражений.

Существуют калькуляторы, в которых принята обычная скобочная форма записи арифметических выражений. Для вычисления на таком калькуляторе арифметического выражения, например, такого вида:

$$a+b$$

необходимо нажать клавиши в обычном (естественном) порядке:

$$a\ \boxed{+}\ b\ \boxed{=}$$

В других калькуляторах принята бесскобочная (инверсная польская) запись арифметических выражений. Такая форма записи принята, например, в программируемых калькуляторах. Для вычисления значения того же арифметического выражения в таких калькуляторах порядок нажатия клавиш следующий:

$$a\ \boxed{\text{B}\uparrow}\ b\ \boxed{+},$$

т. е. сначала вводятся значения операндов, а затем нажимается клавиша соответствующей операции.

Конечно, для учащихся более привычной является общепринятая скобочная форма записи арифметических выражений. Поэтому при прочих равных условиях выбор следует остановить на таких моделях калькуляторов. Однако и бесскобочная форма записи арифметических выражений не вызывает принципиальных трудностей у учащихся и поэтому не может служить препятствием для выбора соответствующей модели.

Подводя итог, можно сказать, что наиболее эффективно при изучении математики в старших классах могут быть использованы программируемые калькуляторы. Для вычислений в ручном режиме при решении большинства задач школьного курса математики с успехом могут быть использованы калькуляторы инженерного типа.

Основная цель использования калькуляторов в курсе школьной математики — снижение вычислительной нагрузки и сокращение времени выполнения расчетов. Однако это не означает, что применение калькуляторов должно привести к отказу от устных и письменных вычислений. Эти вычисления являются неотъемлемой частью курса математики и необходимы для развития и сохранения определенного уровня вычислительных навыков учащихся. Поэтому при использовании калькуляторов необходимо выделение определенной доли упражнений для устных и письменных вычислений.

С помощью калькулятора следует выполнять наиболее трудоемкие вычисления, которые отнимают много времени и вызывают у учащихся снижение активности и интереса к предмету. Многие учащиеся предпочитают избегать таких вычислений, стараются дождаться готового ответа. В таких случаях применение калькуляторов делает вычисления равнодоступными для всех и повышает активность учеников при их выполнении.

Важным вопросом является методика обучения учащихся вычислениям на калькуляторе. Возможны два различных подхода к обучению работе на калькуляторе: концентрированный и рассредо-

точенный. При первом подходе выделяются специальные уроки, на которых учащимся сообщаются основные сведения о работе с калькулятором. Во втором случае освоение калькулятора производится параллельно с изучением математического материала, т. е. основные клавишные операции и различные виды вычислений на калькуляторе осваиваются в тесной связи с изучением математического материала.

Так, обучение использованию калькуляторов инженерного типа может быть разбито на следующие этапы:

1. Знакомство с общим устройством калькулятора. Ввод чисел. Очистка регистра индикации.
2. Выполнение арифметических операций, изменение знака числа. Очистка операционного регистра.
3. Режим константы. Цепочечные и константные вычисления.
4. Режим совмещенной функции. Выполнение операций с использованием регистра памяти.
5. Вычисление значений функций.

При освоении работы с калькулятором на каждом уроке должна соблюдаться строгая дозировка вычислительного материала, чтобы не утомлять учащихся и не вызывать у них снижения интереса к вычислениям.

Для освоения вычислений на калькуляторах важное значение имеет форма представления вычислений на языке калькулятора, или алгоритмическая нотация.

Рассмотрим алгоритмическую нотацию для программируемых калькуляторов. Заметим, что все программы, приводимые ниже, написаны на языке калькулятора типа МК-54 (МК-56).

Алфавит входного языка калькулятора составляют символы, которые указаны на клавиатуре. Все эти символы можно условно разбить на четыре основные группы: ввод чисел, операции, программирование, служебные.

Первая группа символов — цифры от 0 и до 9, десятичная точка, изменение знака числа (—), ввод порядка числа ВП. Вторая группа — команды двухместных арифметических операций и команды вычисления основных элементарных функций. Третья группа — команды, используемые при составлении, вводе, редактировании и отладке программ. Четвертая группа — команды стирания (сброса), обмена содержимым регистров памяти, изменения режима работы и т. п.

Предложения (последовательности операндов и команд) на языке калькулятора обычно записываются в строчку аналогично правилам записи математических операций. Порядок ввода данных и выполнения команд в программируемых калькуляторах соответствует обратной бесскобочной (инверсной польской) записи арифметических выражений. Символы команд и операндов обычно разделяются пробелами или вертикальными линиями. Числа (операнды) записываются слитно.

Все программируемые калькуляторы, помимо двух операционных регистров памяти X и Y, имеют еще два дополнительных регистра Z

и T. Все эти четыре регистра образуют блок памяти, называемый стеком. Для эффективной реализации вычислений, встречающихся в школьном курсе математики, необходимо использовать возможности стека.

При вычислении значений сложных арифметических выражений можно руководствоваться следующими правилами:

1. Записать исходное выражение в строку, расставив соответствующим образом скобки (заметим, что строчная форма записи арифметических выражений принята в большинстве языков программирования).
2. Составить схему вычислений и определить порядок действий с учетом возможностей стека.
3. Записать алгоритмическую нотацию на языке калькулятора.
4. Произвести вычисления.
5. Оценить полученный результат.

Проиллюстрируем применение этих правил на примере вычисления значения выражения

$$\frac{27{,}1 \cdot 72{,}3 - 0{,}5 \cdot 82{,}3}{32{,}4 + 16{,}7}.$$

1. Записываем выражение в строчку:

$$(27{,}1 \cdot 72{,}3 - 0{,}5 \cdot 82{,}3) : (32{,}4 + 16{,}7).$$

2. Составляем схему вычислений, расставляя номера действий (в порядке их выполнения):

$$(27{,}1 \overset{1}{\cdot} 72{,}3 \overset{3}{-} 0{,}5 \overset{2}{\cdot} 82{,}3) \overset{5}{:} (32{,}4 \overset{4}{+} 16{,}7).$$

3. Записываем алгоритмическую нотацию на языке калькулятора:

$$27.1\,|\mathrm{B}\uparrow|\,72.3\,|\times|\,0.5\,|\mathrm{B}\uparrow|\,82.3\,|\times|-|\,32.4\,|\mathrm{B}\uparrow|\,16.7\,|+|\div$$

4. Производим вычисления и получаем результат на индикаторе:

39.066802

5. Оценивая результат (например, можно сделать прикидку), получаем приближенный ответ: 40.

Заметим, что оценка результата является важным моментом при вычислениях с калькулятором. Во-первых, это приучает учащихся контролировать вычисления, а, во-вторых, неумение оценивать полученный результат часто приводит к тому, что учащиеся порой не замечают ошибок в результате даже в несколько порядков. Кроме того, неконтролируемые вычисления приучают ученика к мысли о том, что ответ, полученный с помощью калькулятора, всегда верен, хотя даже эти приборы не являются абсолютно надежными.

Для приобретения навыков работы с калькулятором целесообразно дать учащимся ряд примеров на вычисления, которые наиболее часто встречаются в школьном курсе алгебры. Полезно составить для таких вычислений алгоритмические нотации, которые будем называть библиотечными. Для общности операнды в этих нотациях

обозначены буквами, вместо которых при конкретных вычислениях должны быть подставлены реальные числа.

Ниже приводятся основные библиотечные нотации.

1.	$a \cdot b + c$	$a\|\text{B}\uparrow\|b\|\times\|c\|+$
2.	$a + b \cdot c$	$a\|\text{B}\uparrow\|b\|\text{B}\uparrow\|c\|\times\|+$
3.	$a \cdot (b + c)$	$a\|\text{B}\uparrow\|b\|\text{B}\uparrow\|c\|+\|\times$, или $c\|\text{B}\uparrow\|b\|+\|a\|\times$
4.	$a \cdot b + c \cdot d$	$a\|\text{B}\uparrow\|b\|\times\|c\|\text{B}\uparrow\|d\|\times\|+$
5.	$(a+b) \cdot (c+d)$	$a\|\text{B}\uparrow\|b\|+\|c\|B\uparrow\|d\|+\|\times$
6.	$\frac{a \cdot b}{c}$	$a\|\text{B}\uparrow\|b\|\times\|c\|\div$
7.	$\frac{a \cdot b + c \cdot d}{p \cdot k + x \cdot y}$	$a\|\text{B}\uparrow\|b\|\times\|c\|\text{B}\uparrow\|d\|\times\|+\|$ $p\|\text{B}\uparrow\|k\|\times\|x\|\text{B}\uparrow\|y\|\times\|+\|\div$
8.	$\frac{a+b}{c_n+d}$	$a\|\text{B}\uparrow\|b\|+\|c\|\text{B}\uparrow\|d\|+\|\div$
9.	$\sum_{i=1} a_i$	$a_1\|\text{B}\uparrow\|a_2\|+\|a_3\|+\|...\|a_n\|+$
10.	$\prod_{i=1}^{n} a_i$	$a_1\|\text{B}\uparrow\|a_2\|\times\|a_3\|\times\|...\|a_n\|\times$
11.	$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$	$a_1\|F^1/_x\|a_2\|F^1/_x\|+\|a_3\|F^1/_x\|+\|...$ $\|a_n\|F^1/_x\|+$
12.	$\sum_{i=1}^{n} a_i^2$	$a_1\|Fx^2\|a_2\|Fx^2\|+\|a_3\|Fx^2\|+\|...a_n\|Fx^2\|+$

Такая алгоритмическая нотация является достаточно распространенной. Ее обычно применяют и для записи программ в режиме «программирование». Покажем это на примере. Пусть необходимо вычислить значение функции $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 1/x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Схема вычислений имеет вид (рис. 87):

Запишем программу в виде принятой нами алгоритмической нотации, поставив сначала некоторые условные метки перед операциями Fx^2 и $F^1/_x$ и поставив адреса над каждой командой:

00	01	02	03	04	05	06
$Fx \geqslant 0$	$\|M_1\|$	$Fx^2\|$	БП	$\|M_2\|$	$F^1/_x\|$	С/П

Затем, зная адреса команд Fx^2 и $F^1/_x$, на втором «проходе» поставим вместо меток соответствующие адреса. В результате получим окончательный вид программы:

$$Fx \geqslant 0|05|Fx^2|\text{БП}|06|F^1/_x|\text{С/П}$$

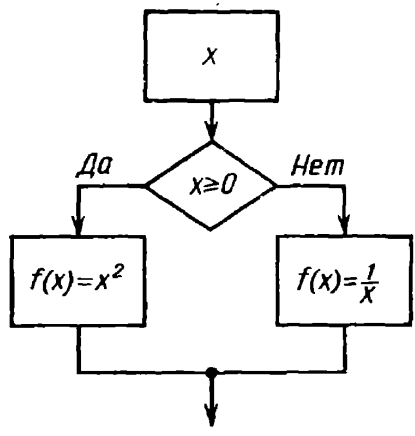


Рис. 87

Заметим, что в этом случае более удобно использовать запись программы в виде схемы, например так (рис. 88):

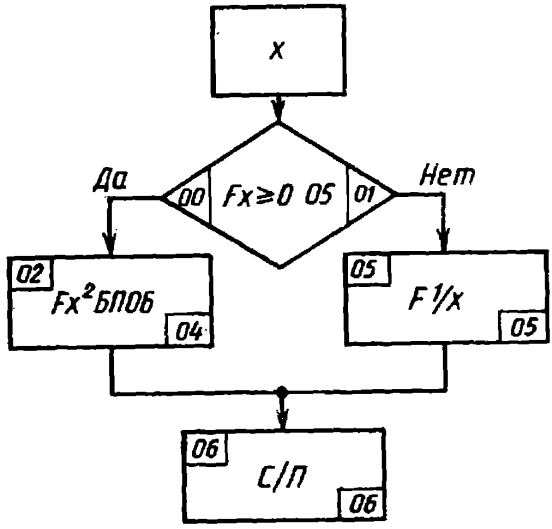


Рис. 88

Можно использовать и другие формы записи программ для калькулятора. Например, программа для вычисления $n!$ может быть оформлена так:

№ шага	1	2	3	4	5	6	7
Адрес	00	01	02	03	04	05	06
Комаида	$x \rightarrow$ ПО	1	П$\rightarrow x$О	×	FLO	02	С/П

Или так:

На индкаторе слева	Нажимаемые клавиши	На индикаторе справа
40	$x \rightarrow$ П, О	01
01	1	02
60	П$\rightarrow x$, О	03
12	×	04
5Г	F, LO	05
02	О, 2	06
50	С/П	07

С точки зрения наглядности наилучшая форма программы для калькулятора — схема, в блоках которой записаны команды на языке калькулятора и их адреса. Составление схемы полезно и в плане подготовки к изучению программирования для ЭВМ. При этом схемы и программы для калькулятора могут быть представлены в структурированном виде, что может послужить пропедевтикой структурного подхода к программированию.

Перечислим некоторые темы школьного курса математики, при изучении которых целесообразно использовать калькуляторы: вычисление действительных корней квадратного уравнения; решение системы линейных уравнений; скалярное умножение векторов на плоскости и в пространстве; вычисление угла между векторами на плоскости и в пространстве, табулирование функций и т. д.

Разумеется, указанные примеры не исчерпывают всех возможностей использования калькуляторов: они могут быть применены при изучении практически всех разделов школьного курса, где производятся численные расчеты.

Необходимо учитывать, что для эффективного использования калькуляторов числовые данные большинства вычислительных задач школьного курса математики должны быть пересмотрены. Дело в том, что такие задачи были включены в курс математики еще до появления калькуляторов в школе и, естественно, были ориентированы на ручные вычисления, когда данные подбирались так, чтобы вычисления производились в «круглых» числах. При этом учащиеся оказывались беспомощными при решении многих практических задач, в которых в качестве данных использовались приближенные числа. Использование калькуляторов позволяет ликвидировать этот пробел в знаниях учащихся. Для этого необходимо создание специальной системы упражнений и задач, ориентированных на вычисления с использованием калькуляторов и распределенных по основным темам школьного курса математики.

§ 38. Калькулятор как вычислительное средство для выполнения численных алгоритмов

Калькуляторы — это электронные приборы, предназначенные для вычислений, т. е. для выполнения последовательности действий **над числами.** Это означает, что они могут быть использованы для выполнения так называемых численных (или вычислительных) алгоритмов. Такие алгоритмы используются для решения многих прикладных математических задач, решение которых не может быть получено в явном виде, т. е. в виде формул, связывающих исходные данные и результаты. Решение таких задач ищется в числовом виде, или, как принято говорить, доводится до числа, поэтому алгоритмы их решения и принято называть численными или вычислительными.

Построение численных алгоритмов обычно производится по следующей схеме: строится бесконечный процесс, сходящийся к искомому решению. Так как алгоритм обладает свойством конечности,

то для построения алгоритма этот процесс прекращается на определенном шаге и полученное значение считается приближенным решением задачи. Так как процесс сходится, то решение может быть получено с заданной степенью точности, все зависит от выбранного метода решения и числа шагов алгоритма. Решение получается приближенным не только потому, что процесс вычислений заканчивается на некотором шаге, но и потому, что все вычисления производятся с числами, представленными в виде десятичных дробей с конечным числом знаков.

Применение вычислительных алгоритмов на практике связано с определенными трудностями, которые вызваны большим объемом вычислений. Реализовать такие алгоритмы вручную иногда просто невозможно из-за чрезвычайной трудоемкости вычислений. Калькуляторы облегчают процесс вычислений, а программируемые калькуляторы и автоматизируют этот процесс, поэтому калькулятор — важное вычислительное средство в руках исполнителя численного алгоритма.

Вопросы построения численных алгоритмов для решения задач рассматриваются в школьном курсе информатики, а в курсе математики можно использовать уже готовые алгоритмы и продемонстрировать возможность их исполнения с помощью калькулятора, причем необязательно в программном режиме. Для исполнения таких алгоритмов вполне можно использовать инженерные калькуляторы. В этом случае управление процессом исполнения алгоритма берет на себя исполнитель-человек, а калькулятор используется для выполнения вычислительных команд алгоритма.

В качестве примера применения численных алгоритмов к решению математических задач можно привести алгоритм вычисления корня уравнения $f(x)=0$ на заданном отрезке $[a, b]$ с заданной точностью ε методом половинного деления (метод вилки), который рассмотрен в учебном пособии по основам информатики для IX класса. Можно продемонстрировать применение этого алгоритма, например, к решению уравнения $2x-\cos x=0$, которое не может быть получено в явном виде.

Построение численных алгоритмов и их исполнение с помощью калькуляторов могут стать предметом самостоятельного факультативного курса по математике. В таком курсе можно рассмотреть некоторые численные методы решения уравнений и систем уравнений, алгоритмы численного интегрирования и др. Сам принцип построения численного алгоритма и его исполнения с помощью калькулятора можно продемонстрировать на примере вычисления числа π. Этот алгоритм состоит в следующем. Известно, что длина окружности $C=2\pi R=\pi d$. Если $d=1$, то $C=\pi$. Построим последовательность правильных вписанных и описанных многоугольников, начиная с правильного шестиугольника. Каждый последующий многоугольник получается путем удвоения числа сторон предыдущего многоугольника. Будем вычислять периметры вписанных (p_n) и описанных (q_n) многоугольников (n — число сторон). Тогда при $n\to\infty$ последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ будут сходиться к одному и тому же пределу — длине ок-

ружности. А так как при $d=1$ $C=\pi$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=\lim\limits_{n\to\infty} q_n=\pi$. Следовательно, вычисляя периметры p_n и q_n, можно получить значение π с заданной точностью.

В приведенной ниже таблице показаны значения p_n и q_n, вычисленные с четырьмя знаками после запятой, для разных значений n. Из этой таблицы видно, что для $n=1536$, т. е. на девятом шаге вычислений, значения p_n и q_n совпадают с точностью до четвертого десятичного знака, т. е. $|q_n-p_n|<10^{-4}$. Следовательно, применяя описанный процесс вычислений и прекращая его на девятом шаге, мы получим значение π с точностью $\varepsilon=0{,}0001$. Если необходимо получить значение π с большей точностью, необходимо продолжить вычисления. Выполнив большее число шагов, мы получим значение π с большей точностью.

Таблица вычисления значения π

№ шага	n	p_n	q_n
1	6	3,0000	3,4641
2	12	3,1058	3,3600
3	24	3,1326	3,2452
4	48	3,1394	3,1666
5	96	3,1410	3,1478
6	192	3,1414	3,1431
7	384	3,1415	3,1420
8	786	3,1416	3,1417
9	1536	3,1416	3,1416

§ 39. Вычисления с использованием персональных ЭВМ

Вопрос о применении персональных ЭВМ в курсе школьной математики еще требует специального исследования. Успешное их применение во многом зависит от создания и внедрения в учебный процесс пакетов учебных и обучающих программ по основным школьным дисциплинам, и прежде всего по математике. Поэтому сейчас можно лишь наметить основные направления применения ЭВМ в процессе обучения математике.

Прежде чем говорить о возможностях использования персональных компьютеров в курсе школьной математики, необходимо дать четкое представление о современных персональных ЭВМ и их возможностях.

Термин «персональная ЭВМ» обычно относят к машине, имеющей следующие характерные черты:

— Машина имеет сравнительно низкую стоимость, делающую ее доступной для школы.

— Машина строится на базе современной микропроцессорной технологии.

— Машина рассчитана на использование людьми, которые не имели никакого предшествующего опыта работы с вычислительной техникой.

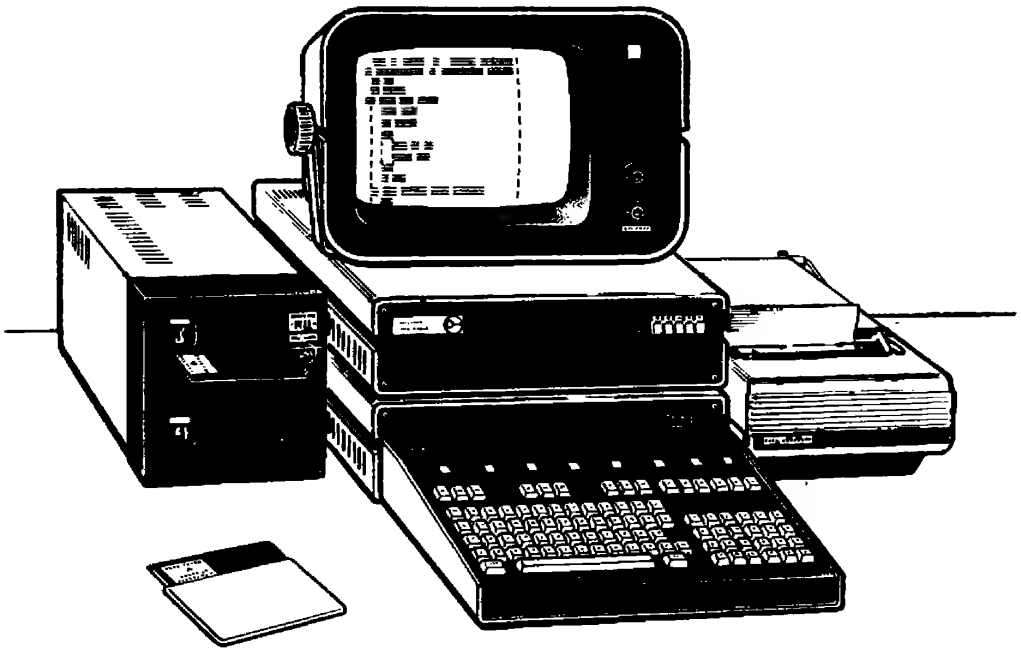


Рис. 89

— Машина обладает гибкостью, позволяющей расширить библиотеку программ для разнообразных применений.

— Программное обеспечение персональной ЭВМ обеспечивает возможность работы в режиме диалога.

— Обеспечивается возможность работы с одним из языков высокого уровня типа Бейсик, Фортран, Паскаль.

Общий вид персональной ЭВМ показан на рисунке 89.

Персональная ЭВМ состоит из тех же функциональных устройств, что и любая ЭВМ: центральный процессор, память, устройства ввода и вывода, внешняя память. В качестве центрального процессора используется микропроцессор — интегральная схема на кристалле кремния размером обычно 6×6 мм. На других таких кристаллах реализуется основная память.

Ввод информации осуществляется с клавиатуры. Кроме того, информация может поступать из периферийной памяти, в качестве которой используются накопители на гибких магнитных дисках или магнитной ленте. Результаты отображаются на экране терминала (ЭЛТ специального дисплея или обычного телевизора) или распечатываются на бумаге (принтер).

Обычно персональный компьютер имеет специальное устройство (модем, т. е. модулятор-демодулятор), служащее для обеспечения связи машины по телефонной линии с другими ЭВМ.

Важной особенностью персональной ЭВМ является то, что обеспечивается стандартное сопряжение центральных устройств машины с бытовым телевизором и кассетным магнитофоном, которые могут ис-

пользоваться соответственно в качестве устройства отображения результатов (вместо сравнительно дорогостоящего специального дисплея) и устройства накопления информации на магнитной ленте.

Помимо перечисленных устройств, допускается подключение к персональным ЭВМ накопителя на жестких магнитных дисках, обладающих большой емкостью, а также графопостроителей, предназначенных для отображения на бумаге графической информации.

Все эти устройства составляют аппаратное обеспечение персональной ЭВМ. Общая функциональная схема аппаратного обеспечения персонального компьютера приведена на рисунке 90.

Второй составной частью персональной ЭВМ является программное обеспечение, с помощью которого осуществляется связь человека с ЭВМ, обеспечивается сервис для работы на ЭВМ и функционирование аппаратуры в соответствии с программой, заданной человеком. Общая структура программного обеспечения персонального компьютера приведена на рисунке 91.

Для эффективного обучения с использованием ЭВМ необходимо обеспечить доступ учащихся в школьный или межшкольный кабинет вычислительной техники, оборудованный несколькими персональными ЭВМ, которые могут быть объединены в локальную сеть. В этом случае персональные ЭВМ могут быть разделены на две категории: ЭВМ учителя и ЭВМ ученика.

ЭВМ ученика имеет минимальный набор оборудования: процессор, память, дисплей с клавиатурой и, возможно, гибкие диски. ЭВМ учителя имеет расширенный состав оборудования. Помимо перечисленных устройств, к ней могут быть подключены накопитель на жестких магнитных дисках, принтер, графопостроитель и некоторые другие устройства.

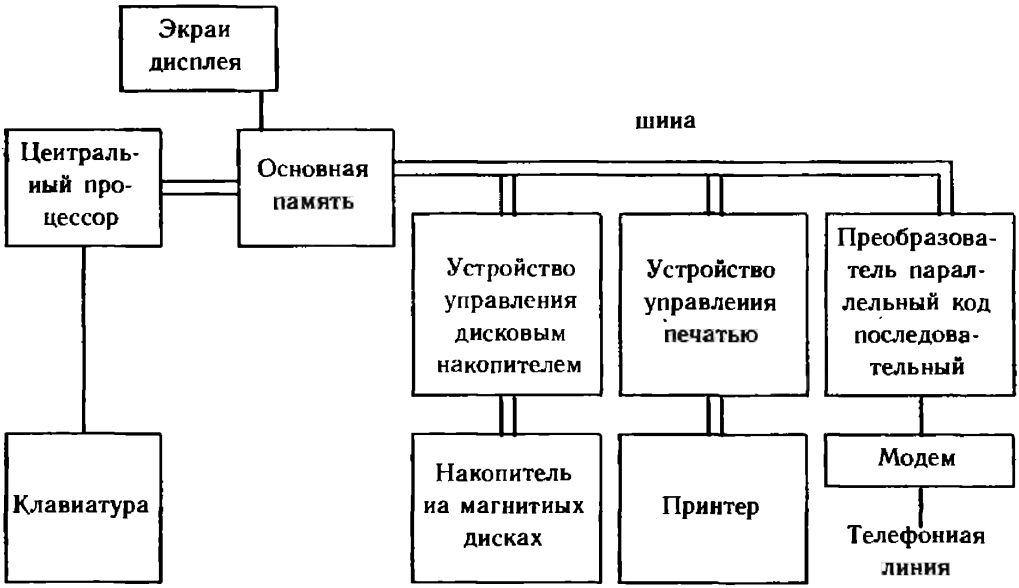


Рис. 90

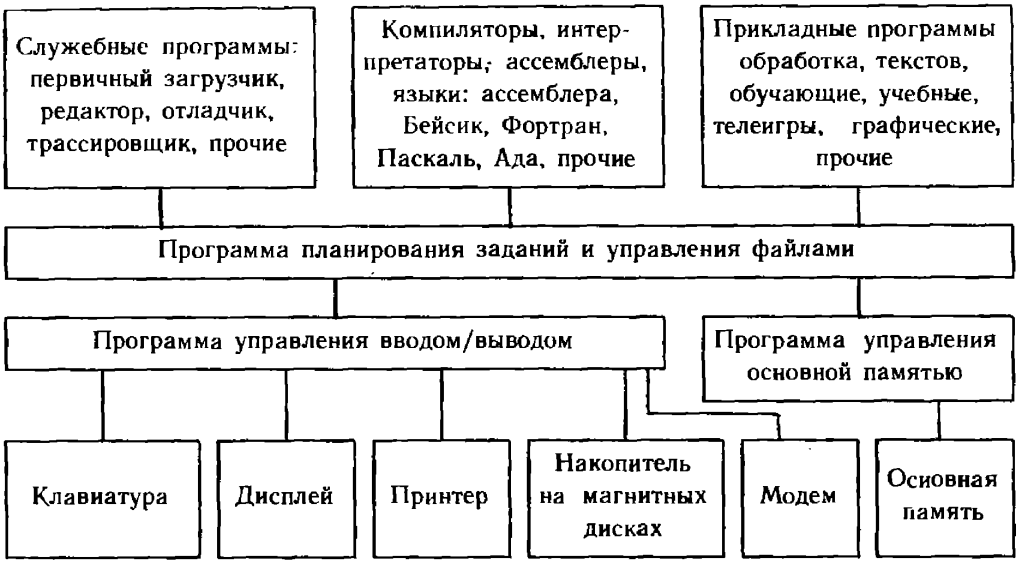


Рис. 91

Создание локальной сети персональных ЭВМ позволяет значительно эффективнее организовать обучение. Учитель, работая за своей ЭВМ, может непосредственно управлять работой каждого ученика: выдавать ему задание, корректировать его работу, принимать его результаты и фиксировать их на принтере, дисках или графопостроителе.

Выше уже говорилось, что возможности применения персональных ЭВМ на уроках математики в значительной степени определяются возможностями их программного обеспечения, прежде всего наличием соответствующих пакетов учебных и обучающих программ. Тем не менее можно сказать, что возможности персональных ЭВМ полностью перекрывают потребности в машинных вычислениях школьного курса математики.

Наметим основные области применения персональных компьютеров в процессе обучения математике. Возможности этих машин позволяют применять их для решения уравнений и систем уравнений, для вычисления значений многочленов, площадей криволинейных трапеций, генерации числовых последовательностей и иллюстрации существования их пределов, поиска некоторых математических закономерностей и т. п.

Применение ЭВМ на уроках математики позволит, например, значительно расширить класс решаемых уравнений, так как с помощью ЭВМ можно продемонстрировать основные приближенные методы решения, позволяющие получить ответ с заданной степенью точности.

Но особенно большие возможности при обучении математике открывает машинная графика. Большинство персональных ЭВМ обладает графическими возможностями, т. е. возможностями отображения графической информации (графиков, фигур, рисунков и т. п.) на экране терминала.

Графические возможности ЭВМ могут быть использованы при построении и исследовании графиков функций, графическом решении уравнений, наглядной иллюстрации приближенных методов решения уравнений (например, метода хорд и касательных), наглядной иллюстрации геометрического смысла производной и т. п.

Машинная графика может широко использоваться на уроках геометрии. Персональные ЭВМ можно применять при демонстрации различных геометрических фигур на плоскости и в пространстве. Учитель при этом не ограничен только имеющимися наглядными пособиями, а может демонстрировать на экране любые геометрические фигуры, которые необходимы по ходу урока. Машинная графика позволяет производить необходимые геометрические построения, определять оси симметрии, изучать свойства геометрических фигур относительно групп преобразований (например, сдвиг, вращение), изучать проекции и сечения геометрических фигур в пространстве и т. д.

Графические возможности ЭВМ могут быть использованы и для изучения динамики протекания различных реальных процессов, а также для изучения математических моделей таких процессов и установления адекватности этих моделей реальной действительности.

Конечно, для реализации этих возможностей понадобится развитое программное обеспечение. Уже сейчас, когда применение ЭВМ в учебном процессе школы только начинается, созданы пакеты программ, позволяющие реализовать многие из отмеченных выше возможностей. Широкое внедрение школьных компьютеров в учебный процесс будет способствовать разработке новых пакетов, что значительно расширит возможности применения ЭВМ на уроках математики.

§ 40. Особенности решения на ЭВМ прикладных задач

Решение любой задачи на ЭВМ разбивается на несколько этапов: постановка задачи, разработка алгоритма, запись алгоритма на языке программирования, реализация программы на ЭВМ, интерпретация полученных результатов.

Решение на ЭВМ прикладных задач, связанных с исследованием реальных явлений, имеет дополнительные особенности. К числу таких особенностей относится необходимость построения математической модели исследуемого явления. Построение математической модели дает возможность свести исследование реального объекта к решению чисто математической задачи, т. е. поставить задачу математически.

В некоторых случаях математическую модель удается получить достаточно просто. Например, при решении алгебраических текстовых задач на движение или работу, описывающих реальные жизненные ситуации, построение математической модели сводится к выводу достаточно простых уравнений или систем уравнений. В других случаях построение модели оказывается более сложным.

Примеры различных математических моделей можно найти в школьном курсе физики. Физика располагает развитой системой ма-

тематических моделей, описывающих реальный мир. Так, например, из курса физики известно, что движение тела, брошенного под углом α к горизонту, описывается уравнениями

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$
$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Эти уравнения и есть математическая модель реального процесса. Она была построена еще в XVII в. Г. Галилеем при следующих предположениях: не учитывается кривизна поверхности Земли — ее поверхность считается плоскостью; не учитывается движение Земли; не учитывается сопротивление воздуха; ускорение свободного падения считается постоянным.

Модель Г. Галилея достаточно точно описывает движение тел в земной атмосфере, брошенных под углом к горизонту с начальной скоростью $v_0 < 30$ м/с. Если же $v_0 > 30$ м/с, то эта математическая модель уже не будет столь удовлетворительной. Для более точного описания движения в этом случае придется учитывать сопротивление воздуха. А при сверхзвуковых скоростях движения тела придется учитывать и кривизну поверхности Земли, и ее собственное движение.

Точность соответствия математической модели реальному процессу определяется точностью результатов, которые могут быть получены с ее помощью. Эксперимент позволяет оценить эту точность, что, в свою очередь, позволяет уточнить модель, если это необходимо. Однако уточнение модели ведет к усложнению математической постановки задачи и к более сложным методам ее решения. Поэтому уточнение должно проводиться в разумных пределах, чтобы чрезмерно не усложнять подлежащую решению математическую задачу.

Приведем в этой связи еще один пример. Известно, что для многих стран очень актуальной является задача прогнозирования поведения циклонов или тайфунов — гигантских атмосферных вихрей, зарождающихся над океаном, обладающих большой энергией и вызывающих большие разрушения и человеческие жертвы. Чтобы прогнозировать движение тайфуна, необходимо построить его математическую модель. Можно описать тайфун как плоский фихрь, т. е. не учитывать его протяженность по высоте. В этом случае получается двумерная модель тайфуна. Такая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, решение которой удается получить с использованием известных численных методов.

Однако с помощью двумерной модели в целом ряде случаев не удается получить нужной с практической точки зрения точности. Для ее достижения нужно рассматривать трехмерную модель, т. е. учитывать протяженность вихря по высоте. Но в этом случае математическая модель тайфуна оказывается такой сложной, что не удается получить решение задачи за приемлемое время даже с использованием современных высокопроизводительных ЭВМ.

В ряде случаев может помочь компромиссное решение, когда тайфун рассматривается как трехмерный вихрь, состоящий из плоских вихрей, сложенных в «стопку» наподобие стопки книг. В этом

случае фактически приходится несколько раз решать только плоскую задачу. Такая постановка задачи позволяет обеспечить достаточную точность и решить задачу за приемлемое время.

Наблюдаемый в настоящее время процесс математизации наук во многом связан с созданием и исследованием математических моделей. Быстрое проникновение математики во многие области знаний определяется в том числе и тем, что одни и те же модели применимы к различным реальным явлениям. Это означает, что решение разных реальных задач может быть сведено к решению одной и той же математической задачи.

После построения математической модели при решении задачи на ЭВМ начинается поиск метода решения математической задачи. Особенностью многих математических задач, моделирующих реальные явления, является то, что их решение не удается получить в явном виде. Поэтому метод решения таких задач приходится искать в виде алгоритма. Такой подход к решению математических задач был известен еще до появления ЭВМ, но его применение было затруднено из-за необходимости выполнять трудоемкие вычисления с большой точностью. Появление ЭВМ привело к широкому применению численных методов решения самых разнообразных математических задач.

Численные методы решения задач приводят к необходимости дальнейшего уточнения постановки задачи. Например, если речь идет о решении системы линейных уравнений, то из теории известно, что такая система имеет единственное решение, если определитель системы отличен от нуля (в случае, когда число неизвестных равно числу уравнений). При этом решение системы может быть найдено по формулам Крамера.

Однако применение этих выводов на практике связано с некоторыми трудностями. Во-первых, коэффициенты системы задаются с определенной степенью точности, поэтому и решение получается приближенным. Во-вторых, если вычисление определителя системы приводит к ненулевому, но близкому к нулю значению, то вычислить значения неизвестных по формулам Крамера невозможно, так как результат будет мало достоверен. В-третьих, даже если определитель отличен от нуля, то формулы Крамера мало пригодны для вычислений, потому что число вычислительных операций быстро растет с ростом числа неизвестных.

В силу сказанного для получения достоверного результата при численном решении системы линейных уравнений обычно применяют либо метод исключения неизвестных, либо методы последовательных приближений.

Итак, численное решение задачи требует дополнительного исследования, сводящегося к поиску корректного и эффективного численного метода решения.

Подводя итог, можно сказать, что использование персональных ЭВМ при обучении математике позволит сделать уроки более интересными и наглядными, повысит качество и эффективность обучения.

РАЗДЕЛ III

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Одним из условий успешного усвоения учащимися систематического курса геометрии является наличие у них хорошо развитых пространственных представлений. Запаса пространственных представлений, накопленных ранее, явно недостаточно и для усвоения планиметрии, тем более для усвоения геометрии трехмерного пространства, поэтому задача дальнейшего их развития у учащихся в процессе изучения геометрии является одной из первостепенных.

Наиболее эффективным средством для развития пространственных представлений у учащихся является использование наглядности в учебном процессе: примеры из окружающей действительности, модели геометрических фигур из картона и проволоки, специально изготовленные рисунки на плакатах и кодопленках, стереометрический ящик для моделирования стереометрических понятий, аксиом и теорем. Весьма важно организовать с учащимися работу по изготовлению моделей плоских и пространственных фигур из картона и проволоки, нитяных моделей, для чего в начале года следует составить перечень таких моделей.

Большая роль в развитии пространственных представлений отводится устным задачам, в том числе задачам на моделях, задачам на готовых чертежах. При этом важно иметь определенную систему устных задач, предназначенных для использования при введении новых понятий и закреплении уже известных, при изучении свойств понятий.

Большое место в процессе изложения курса геометрии, а курса стереометрии в особенности, должно быть отведено выполнению чертежей на доске и в тетрадях с использованием различных цветов (цветных мелков, цветных карандашей, фломастеров).

В процессе изложения курса геометрии следует шире использовать технические средства обучения, имеющиеся в школе. Весьма интересен и удобен при обучении кодоскоп с набором кодопозитивов по каждой теме. При повторении больших тем, обобщающем повторении целесообразно использовать кинофильмы. Важно умело использовать наглядные и технические средства обучения, разумно сочетать их с рассказом учителя, с самостоятельной работой учащихся.

Большое внимание следует уделять развитию логического мышления учащихся, постоянно вырабатывать у них необходимость обосновывать высказываемые положения, начиная такую работу

прямо с начала изучения курса геометрии после введения первых аксиом. При отыскании пути обоснования высказываемых положений следует шире опираться на интуицию учащихся.

Изложение как отдельных разделов курса в целом, так и его частей целесообразно проводить в определенной системе, которая особенно рельефно просматривается на итоговом этапе работы учителя. Это, безусловно, позволяет учащимся более сознательно и прочно усвоить содержание теории без особого напряжения и использования механической памяти. Итоговое обобщение надо сопровождать несложной схемой с рисунками и краткими пояснениями, которая дает возможность учащимся получить представление о логической структуре того или иного раздела, получить возможность его наглядно обозреть.

В процессе изучения геометрии, безусловно, должна проводиться систематическая работа по формированию у учащихся марксистско-ленинского мировоззрения и воспитанию других качеств личности.

Учитель получает постоянную возможность показывать и подчеркивать при удобных случаях учащимся, что теоретические положения, изучаемые ими, являются не чем иным, как отражением реальной действительности, логически стройная теория находит свое подтверждение в производственной практике людей.

Изучение геометрии предполагает постоянное развитие творческой, самостоятельной работы учащихся на уроке и дома. Необходимо систематически практиковать самостоятельное изучение теории на уроке и дома с последующим выступлением учащихся у доски, на каждом уроке проводить самостоятельные работы по решению задач. В итоге изучения больших разделов курса стереометрии весьма полезно предлагать учащимся самостоятельные домашние сочинения, тематика которых разрабатывается заранее.

При изложении курса следует постоянно вырабатывать у учащихся устойчивое внимание, сосредоточенность, умение сочетать прослушивание рассказа учителя с записями в тетрадях основных мыслей; с этой целью на определенном этапе обучения необходимо практиковать на уроке рассказ-лекцию, проводить итоговые уроки по достаточно большим темам в виде обобщающей лекции.

С целью осуществления дифференцированного подхода на уроках геометрии и организации индивидуальной работы с учащимися необходимо иметь раздаточный дидактический материал — карточки с заданиями. В картотеке учителя карточки располагаются по темам, а в каждой теме — по степени возрастания трудности. В карточках могут быть как задачи, так и теоретический материал.

Большое место в работе учителя занимает подбор задач для решения в классе и дома, задач для самостоятельной работы на уроке, для контрольной работы по отдельным темам, для итоговых контрольных работ за полугодие, за год. Особое внимание при этом обращается на подбор задач с практическим содержанием, которые в определенной степени раскрывают связи курса

геометрии с жизнью, с современным производством, позволяют увязать содержание теории с окружающей действительностью, иллюстрировать различные геометрические положения примерами из производственной практики, из повседневной жизни.

В процессе преподавания курса геометрии необходимо постоянно заботиться о развитии интереса учащихся к изучаемой теории, постоянно обращаться к историческому материалу, к производственным и занимательным задачам, аргументированно мотивировать изучение программных вопросов.

Глава 12. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Знания о взаимном расположении прямых и плоскостей лежат в основе изучения свойств геометрических фигур как в планиметрии, так и в стереометрии. Действительно, параллельность и перпендикулярность прямых на плоскости являются необходимым материалом для изучения свойств многоугольников и окружности; без знания взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве невозможно изучение свойств многогранных углов, многогранников и круглых тел.

Разделы о взаимном расположении прямых и плоскостей изучаются сразу же после введения основных понятий геометрии на плоскости и в пространстве, которые используются при доказательстве первых предложений и решении задач. Это позволяет систематически вести работу по развитию логического мышления учащихся, а также способствует прочному и сознательному усвоению ими основных понятий и аксиом и постепенному раскрытию их роли в школьном курсе геометрии.

Изучение взаимного расположения прямых и плоскостей сопровождается решением большого количества задач, среди которых особое место занимают задачи на доказательство и задачи конструктивного характера. Конструктивные задачи трехмерного пространства требуют как формально-логического подхода при их решении, так и знания проекционного чертежа (параллельного проектирования и его свойств). В процессе решения задач у учащихся развиваются пространственные представления, конструктивные навыки, в частности навыки изображения фигур на плоскости, навыки выполнения рисунков, их правильного восприятия и чтения.

В процессе изучения взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве постепенно ведется работа по формированию у учащихся основ векторного метода, умению использовать его при доказательстве целого ряда теорем и решении различного рода задач. Умелое сочетание векторного метода с синтетическим методом позволяет учителю не ослаблять внимания к развитию пространственных представлений учащихся.

В вузовских курсах геометрии учение о взаимном расположении прямых и плоскостей построено целиком и полностью на

основе координатного метода, само изложение этого раздела обладает большой общностью и является довольно абстрактным. Поэтому и на этой поре обучения периодическое обращение к наглядности, опора на пространственные представления играют большую роль. В школьном курсе математики также разумно используются в сочетании координатный метод и наглядные, чисто геометрические представления о взаимном расположении прямых на плоскости в процессе решения систем линейных уравнений с двумя переменными, когда возникает необходимость графической иллюстрации решения.

Изучение взаимного расположения прямых и плоскостей в школьном курсе математики можно разделить на три этапа:

подготовительная (пропедевтическая) работа по ознакомлению учащихся со взаимным расположением прямых на плоскости и некоторыми пространственными фигурами в I—V классах;

систематическое изучение взаимного расположения прямых на плоскости и знакомство на наглядной основе с простейшими многогранниками в VI—VIII классах;

систематическое изучение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве в IX—X классах.

Знакомство со взаимным расположением прямых и плоскостей начинается с первого появления геометрического материала в курсе математики средней школы. Уже в подготовительном курсе геометрии, в I—V классах, изучаются на наглядно-оперативном уровне такие вопросы, как пересечение двух прямых на плоскости, перпендикулярность двух прямых на плоскости, параллельность прямых. Об изучении строгой теории на этой поре обучения не может быть и речи. Здесь даются определения перпендикулярных и параллельных прямых, формируются навыки изображения каждого из названных случаев на плоскости, развиваются умения пользоваться чертежными инструментами — линейкой, угольником, транспортиром, циркулем. Рассмотренные случаи взаимного расположения прямых на плоскости используются при решении простейших задач.

Основой для введения различных случаев взаимного расположения прямых является беседа о возможном числе общих точек у двух прямых на плоскости, где используются интуиция и жизненный опыт учащихся. Изучение этого материала проводится на различных рисунках, как готовых, так и выполненных учащимися.

Подготовительный этап в изучении взаимного расположения прямых на плоскости играет важную роль в обогащении жизненного опыта учащихся, в накоплении необходимого фактически-наглядного материала, который может служить надежной базой для успешного систематического изучения этих вопросов на последующем этапе обучения.

На этой ступени обучения учащиеся должны знать:

что две пересекающиеся прямые имеют **только** одну общую точку, и уметь изобразить пересекающиеся прямые с помощью линейки;

что две перпендикулярные прямые являются пересекающимися, уметь построить такие прямые с помощью линейки и угольника, нейки и транспортира;
что две параллельные прямые совсем не имеют общих точек, уметь построить параллельные прямые с помощью линейки и ольника.

Особые трудности вызывают первые уроки систематического рса планиметрии, на которых систематизируются полученные нее знания о взаимном расположении прямых на плоскости, этому разработка методики их проведения требует особого имания. Это обусловлено целым рядом причин: психическими обенностями учащихся этого возраста, выделением курса геомет- и в отдельную учебную дисциплину и новизной его структуры, зким повышением уровня строгости логических рассуждений, едением большого числа новых понятий, терминов, новой сим- лики, повышением уровня абстрактности изучаемого материала, вым содержанием заданного материала, недостаточной раз- тостью пространственных представлений и пространственного ображения учащихся, несформированностью умений и навыков общения, абстрагирования. Методика преподавания первых зделов курса планиметрии предполагает постепенный, плавный реход от конкретного к общему, постоянное обращение к ок- жающей действительности и другим видам наглядности, при- альное внимание обучению учащихся умению логически рас- ждать, обосновывать, доказывать высказываемые предложения, иентироваться в изучаемых математических предложениях — сиомах, определениях, теоремах, которые для них являются но- ми. С самых первых этапов изучения геометрии необходимо единую систему увязать рассказ учителя, текст учебника, соот- тствующие записи на доске и в тетради с рисунками, являющиеся ирой для учащихся при самостоятельной работе. На первом оке геометрии необходимо учащихся познакомить с историей зникновения геометрии.

Геометрические объекты, с которых начинается изучение сис- матического курса планиметрии, уже знакомы учащимся, однако и предстают перед ними в новом виде. Точка и прямая рас- атриваются как основные понятия, свойства которых раскры- ются в аксиомах. Это находит соответствующее отражение в писях, которые носят характер опорных схем: в них дается ображение точек и прямых, их обозначение на плоскости.

В процессе изучения свойств прямой важно постоянно подчер- вать, что она безгранична, и на рисунке можно изобразить лько часть прямой. Вопрос о взаимном расположении точек и ямых на плоскости является одним из первых после рассмот- ния основных понятий. Положение о том, что любая прямая держит точки, а также есть точки и вне прямой, в одних учеб- их пособиях формулируется как аксиома [101], в других учеб- их пособиях без всякого указания включено в текст соответст- ющего раздела [30], [134].

Именно на основании этого положения можно выбирать точки как на прямой, так и вне прямой на плоскости; изучению его следует уделить особое внимание.

Предложение «Точка лежит на прямой (точка принадлежит прямой)» можно сформулировать по-другому, а именно: «Прямая проходит через точку». Особо надо подчеркнуть, что через точку на плоскости проходит сколько угодно прямых, и проиллюстрировать на рисунке.

На первых уроках геометрии вводятся и первые аксиомы (основные свойства). На этой поре обучения их не следует вводить формально. При разработке методики введения аксиом целесообразно учитывать такие моменты, как:

а) иллюстрация примерами из окружающей жизни или с помощью специальной модели;

б) формулировка аксиомы;

в) иллюстрация аксиомы на рисунке;

г) краткая запись аксиомы.

Ниже приводится примерная краткая запись аксиомы прямой (основного свойства прямой).

***A* и *B* — различные точки.**

а) Можно провести прямую a через точки A и B (рис. 92).

б) Прямая a — единственная.

Рис. 92

Предложение «Можно провести прямую a через точки A и B» формулируют и в другой форме: «Существует прямая a, проходящая через точки A и B».

В дальнейшем, чтобы всякий раз не делать оговорок, можно договориться, что если речь идет о двух прямых или двух точках, то они различны.

Две точки прямой полностью ее определяют. Это дает право прямую называть двумя большими латинскими буквами.

Аксиома прямой после ее введения используется в доказательствах первых предложений, которые еще не получили названия теорем. Большая осторожность требуется в обучении учащихся первым доказательствам. Надо сказать, что в числе первых учащимся дается метод доказательства от противного, который вызывает у них наибольшие трудности. В процессе доказательства методом от противного необходимо выделить все его этапы, дать им характеристику, сделать соответствующую запись алгоритма рассуждений.

Ниже приводится доказательство одного из предложений методом от противного: «Две различные прямые не могут иметь более одной общей точки».

Дано: a и b — различные прямые.

Доказать: a и b не могут иметь более одной общей точки.

Доказательство.

1. Предположить, что истинно предложение, противополож-	1. Предположим, что различные прямые a и b имеют более

ное тому, что нужно доказать.

2. В результате рассуждений получить вывод, противоречащий известному истинному предложению.

3. Сделать вывод о том, что высказанное предположение неверно.

4. Сделать общий вывод.

одной общей точки; пусть у них две общие точки.

2. Если прямые a и b имеют две общие точки, то получим, что через две точки проходят две различные прямые a и b. Это противоречит основному свойству (аксиоме) прямой.

3. Предположение о том, что различные прямые a и b имеют более одной общей точки, неверно.

4. Две различные прямые не могут иметь более одной общей точки.

Учитель должен знать, что в рассуждениях методом от противного используется формально-логический закон «исключенного третьего». В данном случае истинным является одно из двух предложений, третьего быть не должно:

а) две различные прямые a и b не могут иметь более одной общей точки;

б) две различные прямые a и b могут иметь более одной общей точки.

На основе вышеизложенного можно сделать вывод: две различные прямые на плоскости или имеют только одну общую точку, или совсем не имеют общих точек. Если две прямые имеют только одну общую точку, то они называются пересекающимися.

В усвоении раздела о взаимном расположении точек и прямых на плоскости большую роль играют задачи, сопровождаемые рисунками:

а) Отметить точки, принадлежащие прямой и не принадлежащие ей.

б) Проверить, будут ли названные точки принадлежать прямой (или прямая проходит через названные точки); наиболее трудный случай представлен на рисунке 93.

в) Пересекаются ли две прямые? Построить точку их пересечения (рис. 94).

г) Построить прямые, пересекающиеся в данной точке.

На первых уроках систематического курса планиметрии вводятся такие понятия, как «отрезок», «луч», «угол», которым да-

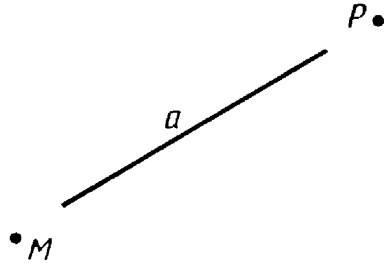


Рис. 93

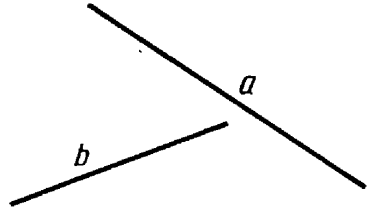


Рис. 94

ется формально-логическое определение. Перед их изучением вводятся свойства расположения точек на прямой.

В учебных пособиях по геометрии отрезок и луч рассматриваются как части прямой, что следует особо подчеркнуть. Прежде чем сформулировать их определение, необходимо, используя имеющиеся наглядные представления учащихся об этих объектах, выделить отдельные его части.

В процессе введения понятия отрезка можно выделить его части и изобразить их на рисунке различными цветами:

а) отрезок — это часть прямой;

б) две точки — концы отрезка, принадлежащие ему, особо выделены;

в) отрезку принадлежат все точки, лежащие между его концами.

После анализа понятия отрезка можно перейти к формулировке его определения, соединяя все выделенные части воедино (синтез). Схематическая запись определения отрезка поможет лучшему его усвоению (рис. 95).

Рис. 95

Понятие луча вводится аналогично понятию отрезка.

Важно разъяснить учащимся, что луч — фигура неограниченная. Лучше всего это сделать в процессе выполнения упражнений на взаимное расположение отрезков и лучей.

Приведем пример упражнения: «Имеется ли общая точка у фигур, изображенных на рисунке 96? Если да, то постройте ее».

Понятие угла рассматривается в школе или как пара лучей с общим началом [30], [134], или как часть плоскости вместе с ограничивающей ее парой лучей с общим началом [101]. В практике работы школы имеют место оба названных варианта, однако второй подход соответствует в большей степени жизненным представлениям учащихся об угле, а поэтому легче ими воспринимается.

Формирование понятия угла ведется по аналогии с формированием понятия отрезка.

Вопросы о взаимном расположении прямых изучаются одними из первых в систематическом курсе планиметрии, а поэтому требуют особого внимания к разработке их содержания и методики преподавания. Уже при изучении этих разделов целесообразно

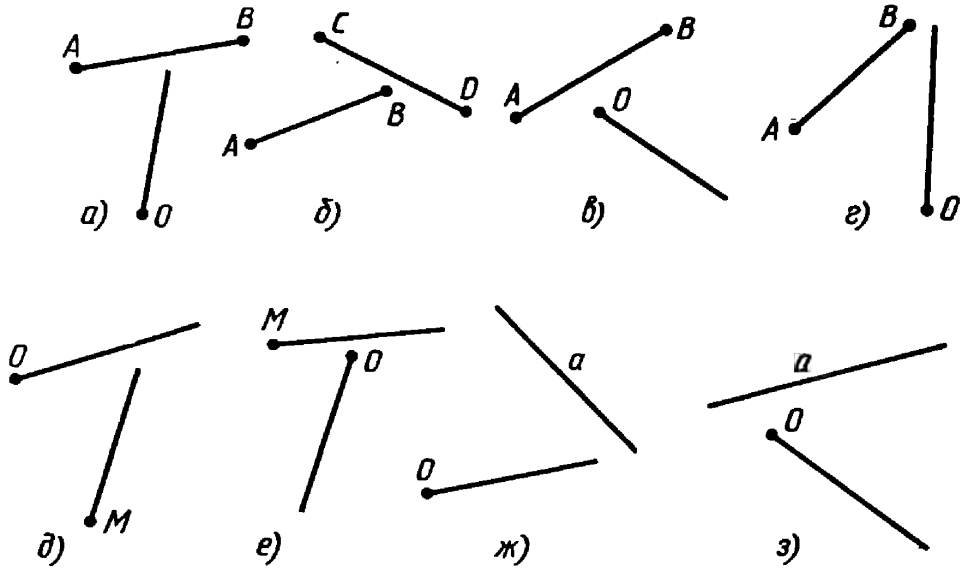


Рис. 96

в доступной для учащихся форме раскрывать роль аксиом, создавать первые представления об аксиомах как о рабочем инструменте при построении геометрии.

В имеющейся учебной литературе по геометрии для средней школы представлена различная последовательность изучения разделов о параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости после введения понятий пересекающихся и непересекающихся прямых.

В учебном пособии А. В. Погорелова [134] введение понятия параллельных прямых и аксиома параллельных прямых предшествуют изучению перпендикулярных прямых.

Существование параллельных прямых на плоскости, признаки параллельности прямых, построение параллельных прямых с помощью циркуля и линейки излагаются после изучения раздела о перпендикулярных прямых.

В учебном пособии по геометрии под редакцией А. Н. Колмогорова изучение взаимного расположения прямых на плоскости начинается с параллельности прямых, хотя понятие перпендикулярных прямых, знакомое учащимся из курса математики IV—V классов, используется ранее при изучении осевой симметрии [101].

В пробном учебнике Л. С. Атанасяна и других авторов изучение взаимного расположения прямых на плоскости начинается с перпендикулярности прямых, а затем излагается раздел о параллельности прямых на плоскости [30].

Все названные пути вполне доступны для учащихся, хотя учение о перпендикулярных прямых в логическом отношении проще для них, ближе к их опыту. Понятие параллельности связано с бесконечностью, что само по себе является нелегким в средней школе.

Большая роль при изучении раздела о взаимном расположении прямых отводится аксиоме: через любые две точки можно провести прямую и только одну.

В учебном пособии А. В. Погорелова аксиомы в начале систематического курса планиметрии названы основными свойствами. Только после введения всех основных свойств, на которых строится курс планиметрии, их называют аксиомами и вводится соответствующий термин [134].

В начале изучения взаимного расположения прямых на плоскости целесообразно дать учащимся общую картину взаимного расположения двух прямых на плоскости. Это позволит им сразу охватить основные отношения между двумя прямыми: две прямые имеют только одну общую точку; все точки двух прямых общие — две прямые совпадают; две прямые на плоскости совсем не имеют общих точек — две прямые параллельны.

Учитель с этой целью может провести с учащимися класса беседу по вопросам, ответы на которые требуют знания уже введенных аксиом:

1. Могут ли две прямые на плоскости иметь **только** две общие точки?

2. Могут ли две прямые на плоскости иметь **только** одну общую точку?

3. Могут ли две прямые на плоскости **совсем** не иметь общих точек?

Ответ на первый вопрос приводит к случаю, когда у двух прямых все точки общие, т. е. прямые совпадают. Ответ на второй вопрос приводит к случаю пересекающихся прямых на плоскости, имеющих только одну общую точку.

Ответ на третий вопрос дает возможность ввести понятие параллельности прямых на плоскости.

Особо следует остановиться на том случае, когда все точки двух прямых общие, т. е. прямые сливаются. Дальнейшее отношение учителя к этому случаю зависит от той системы изложения, которой он придерживается. Поэтому возможны два подхода:

1) случай совпадения двух прямых не рассматривать в дальнейшем, как не представляющий интереса; если речь идет о двух прямых, то их всегда надо представлять себе различными; этот подход имеет место в учебном пособии по геометрии А. В. Погорелова [134], в пробном учебнике Л. С. Атанасяна и др. [30], в учебнике по геометрии А. П. Киселева [92];

2) две совпадающие прямые считают параллельными, а следовательно, параллельные прямые или совсем не имеют общих точек, или совпадают; этот подход имеет место в учебном пособии по геометрии под редакцией А. Н. Колмогорова [101].

Второй подход дает возможность на определенном этапе изучения геометрии в школе показать учащимся, что параллельность прямых входит в класс эквивалентности, однако само восприятие понятия параллельности прямых в этом случае для учащихся с чисто психологической точки зрения более затруднительно.

§ 41. Параллельность прямых на плоскости

В процессе беседы с учащимися о взаимном расположении двух прямых надо постоянно подчеркивать, что речь идет о прямых на плоскости.

Итог беседы иллюстрируется таблицей (рис. 97).

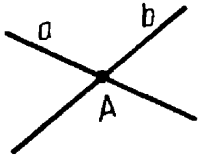
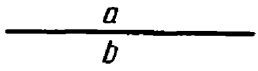
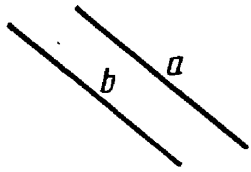
Взаимное расположение двух прямых на плоскости		
		
Прямые a и b имеют только одну общую точку A: a и b пересекаются	У прямых a и b все точки общие: a и b совпадают	Прямые a и b не имеют общих точек: a и b параллельны

Рис. 97

Схема может быть другой, если совпадающие прямые рассматриваются как параллельные.

Дальнейшее изложение этого раздела ведется по следующему плану:

1. Параллельные прямые.
2. Перпендикулярные прямые.

В практике школьного преподавания имела место и другая последовательность изучения взаимного расположения прямых на плоскости, о чем говорилось выше.

Учитель, прежде всего, должен четко представить себе логическую структуру излагаемого раздела, последовательность изучения его отдельных частей, взаимосвязь между ними. Учение о параллельности прямых в курсе планиметрии можно разделить на следующие части:

— определение параллельных прямых;
— существование параллельных прямых;
— построение параллельных прямых;
— аксиома параллельных;
— свойства параллельных прямых;
— признаки параллельности прямых;
— применение изученной теории к решению задач.

Резко очерченных границ между выделенными частями не может быть, последний раздел, безусловно, присутствует во всех предыдущих.

Формулировки определений параллельных прямых в учебных пособиях, так же как и подходы к их изучению, различны.

В учебном пособии по геометрии А. В. Погорелова [134] и в пробном учебнике Л. С. Атанасяна и др. [30] рассматриваются только два случая взаимного расположения прямых на плоскости:

прямые пересекаются (имеют только одну общую точку) и прямые не пересекаются (совсем не имеют общих точек). Поэтому и определения параллельных прямых в этих пособиях даются соответствующим образом: или как прямые на плоскости, которые не пересекаются, или как прямые на плоскости, не имеющие общих точек. Эти определения параллельных прямых на плоскости эквивалентны друг другу.

В учебном пособии по геометрии под редакцией А. Н. Колмогорова [101] рассматриваются три случая взаимного расположения двух прямых на плоскости: прямые имеют только одну общую точку; прямые совпадают (все точки общие); прямые совсем не имеют общих точек.

Два последних случая входят в определение параллельных прямых в этом учебнике.

В процессе работы над определением параллельных прямых следует особо выделить, что они лежат в одной плоскости, и требовать этого постоянно от учащихся; такая работа поможет избежать нежелательных ошибок в дальнейшем при изучении соответствующих вопросов в курсе стереометрии. В качестве контрпримера полезно наглядно показать прямые пространства, которые не лежат в одной плоскости, не имеют общих точек и не являются параллельными (скрещивающиеся прямые).

Учитывая приведенное замечание, определение параллельных прямых следует записать в тетради, выделив четко в записи видовые отличия.

Две прямые называются параллельными, если они:

1) лежат в одной плоскости; 2) не пересекаются.	1) лежат в одной плоскости; 2) не имеют общих точек.	1) лежат в одной плоскости; 2) не имеют общих точек или совпадают.

Вопрос о существовании параллельных прямых также решается неодинаково в имеющихся учебных пособиях. Здесь можно отметить два ярко выраженных подхода:

1) рассматривается специальная теорема, показывающая существование параллельных прямых, а затем дается аксиома параллельных [30], [101];

2) рассматривается аксиома параллельных, а затем доказывается теорема, показывающая существование таких прямых [134].

Второй подход может породить трудности, которые помешают убедить учащихся в необходимости доказательства существования параллельных прямых, поскольку целый ряд рассуждений проводится на основе предположения, что такие прямые на самом деле есть. Об этом следует помнить учителю при изучении этого раздела и в нужном месте при изучении соответствующей теоремы сообщить, что построение параллельных прямых, аксиома параллельных и некоторые свойства параллельных рассматривались с учетом

предположения, что параллельные прямые реально существуют. Существование параллельных прямых обосновывается в школе двумя путями, а именно на основе центральной симметрии [101], [43] или на основе свойств углов, образованных при пересечении двух прямых третьей [30], [134].

Доказательство теоремы везде ведется методом от противного, однако предложения, на основе которых делается окончательный вывод, различны: в одних случаях это свойство двух различных прямых не иметь двух и более различных общих точек; в других случаях это свойство внешнего угла треугольника не быть меньшим или равным внутреннему углу этого треугольника, не смежному с ним. Доказательство теоремы опирается на представление учащихся о неограниченности и бесконечности прямой, что сопряжено с большими трудностями, связанными с потерей наглядности чертежа, противоречием правильным интуитивным представлениям учащихся.

Вследствие этого чертежу желательно уделить особое внимание при доказательстве теоремы, при изображении точки пересечения прямых желательно не делать изломов.

Теоремы — признаки параллельности прямых требуют тщательной методической разработки, их доказательство надо сопровождать соответствующими записями. В качестве примера рассматривается соответствующая теорема по учебному пособию под редакцией А. Н. Колмогорова [101]: «Если две прямые симметричны относительно некоторого центра, то они параллельны».

Запись этой теоремы с ее доказательством может выглядеть следующим образом:

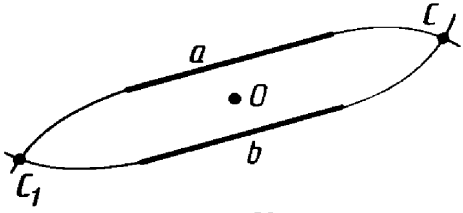


Рис. 98

Признак параллельности прямых

Д а н о: прямые a и b, $b = Z_0(a)$.

Д о к а з а т ь: $a \parallel b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о *(метод от противного)* (рис. 98).

1. Пусть a и b различны и непараллельны, т. е. a и b имеют общую точку C.

2. C отлична от O, так как b и $Z_0(b) = a$ различны.

3. C и $Z_0(C) = C_1$ различны, так как C не совпадает с O.

4. C_1 принадлежит прямым a и b, так как C принадлежит этим прямым.

5. Прямые a и b имеют две различные общие точки C и C_1, что невозможно.

6. Предположение, что a и b непараллельны, неверно. Значит, a и b параллельны.

7. Если a и b центрально-симметричны и совпадают, то они параллельны по определению.

Как видим, перед доказательством теоремы необходимо воспроизвести в памяти учащихся отдельные составные части доказательства теоремы в виде задач:

а) если центрально-симметричные прямые различны, то центр симметрии не принадлежит ни одной из этих прямых;

б) если точка не совпадает с центром симметрии, то ее образ при центральной симметрии отличен от нее.

В практике школы большое распространение получили обоснования признаков параллельности прямых на основе сравнения углов, образуемых при пересечении двух прямых третьей.

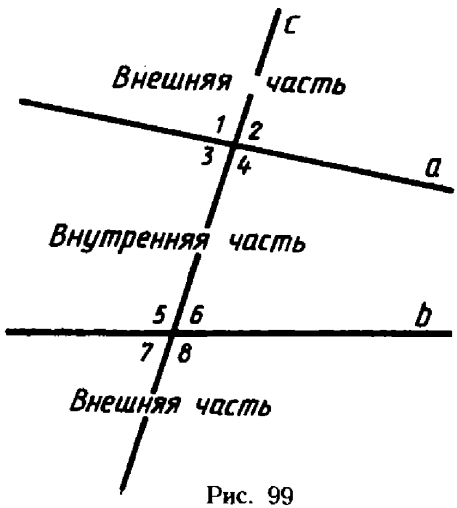


Рис. 99

Раздел об углах, образующихся при пересечении двух прямых третьей, как показывает опыт, не вызывает особых затруднений.

Рисунок к введению этих понятий не должен отражать частных случаев: две прямые не должны изображаться параллельными, а секущая не должна быть к ним перпендикулярной (рис. 99).

Прямые a и b разбивают плоскость на три части: две внешние и одну внутреннюю.

Из восьми углов, образующихся при пересечении прямых a и b прямой c, некоторые лежат по одну сторону от прямой c, другие — по разные стороны от прямой c. Некоторые из углов, расположенных по разные стороны от прямой c, получили название накрест лежащих; некоторые углы, расположенные по одну сторону от прямой c, получили название или односторонних или соответственных. В зависимости от того, в каких из названных частей расположены углы, различают внутренние и внешние накрест лежащие углы (3 и 6, 4 и 5, 1 и 8, 2 и 7), внутренние или внешние односторонние углы (4 и 6, 3 и 5, 1 и 7, 2 и 8), соответственные углы (2 и 6, 1 и 5, 4 и 8, 3 и 7). Для лучшего запоминания углов названные части, на которые разбивают плоскость прямые a и b, надо закрасить на рисунке в различные цвета, а именно: внутреннюю часть закрасить одним цветом, а внешние части другим цветом. В итоге произвести соответствующие записи:

3 и 6, 4 и 5 — внутренние накрест лежащие углы;

1 и 8, 2 и 7 — внешние накрест лежащие углы;

3 и 5, 4 и 6 — внутренние односторонние углы;

2 и 6, 1 и 5, 4 и 8, 3 и 7 — соответственные углы;

1 и 7, 2 и 8 — внешние односторонние углы.

Большую роль в изучении параллельных прямых играет аксиома параллельных.

В имеющейся учебной литературе приведены различные формулировки аксиомы параллельных:

1. «Через данную точку проходит не более одной прямой, параллельной данной прямой» [101] или «Через точку, не лежащую

на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной» [134].

2. «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной» [30], [91].

Требование, чтобы точка не лежала на данной прямой, связано с тем, что в этих учебных пособиях совпадающие прямые не считаются параллельными и вообще не рассматриваются. Надо отметить, что во втором случае аксиома является более сильной, чем в первом случае. Утверждение, что через точку проходит **только одна** прямая, параллельная данной прямой, в первом случае можно доказать:

«Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной» — на основе аксиомы;

«Через данную точку можно провести одну прямую, параллельную данной» — на основе теоремы существования и построения.

Следовательно, через данную точку проходит только одна прямая, параллельная данной прямой. Эти рассуждения приводятся не во всех учебных пособиях для средней школы.

В процессе изучения параллельности прямых весьма важно обращать внимание на раскрытие роли аксиомы параллельности при построении темы. При доказательстве соответствующих теорем, где явно используется аксиома параллельных, этот пункт доказательства желательно особо выделить.

Теорема. Две прямые, параллельные третьей, параллельны [134].

Дано: a, b и c — прямые, $a \parallel c$ и $b \parallel c$.

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство (рис. 100).

1. Пусть прямые a и b непараллельны, т. е. a и b пересекаются в некоторой точке C.

2. Через точку C проходят две прямые a и b, параллельные прямой C, что противоречит аксиоме параллельных.

3. Предположение, что прямые a и b непараллельны, неверно. Значит, $a \parallel b$.

При изложении курса геометрии большое значение имеют как теоремы — признаки параллельности, так и теоремы, им обратные. Достаточно доказать один из признаков параллельности прямых,

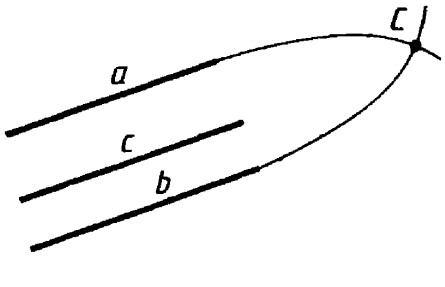


Рис. 100

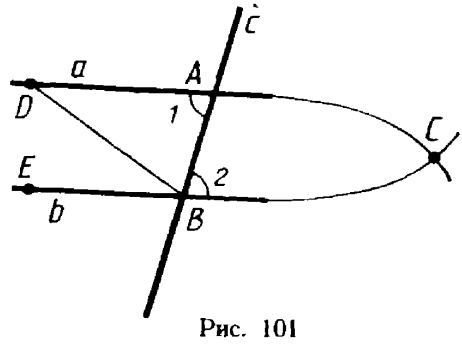


Рис. 101

основанных на углах, образованных при пересечении двух прямых третьей, а остальные признаки параллельности свести к уже доказанному.

Особый интерес представляет методика работы над теоремами — признаками параллельности прямых в соответствии с учебным пособием по геометрии А. В. Погорелова и пробным учебником по геометрии Л. С. Атанасяна и др. (рис. 101):

Дано: c — секущая для прямых a и b;
$\angle 1$ и $\angle 2$ — внутренние накрест лежащие; $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство *(метод от противного)*.

По учебному пособию А. В. Погорелова

1. Пусть a и b непараллельны, т. е. пересекаются в точке C.
2. Построим $AD = BC$ и некоторую точку E на прямой b.
3. $\triangle BAD = \triangle ABC$ по первому признаку равенства треугольников.
4. $\angle ABD = \angle BAC$, так как $\triangle BAD = \triangle ABC$.
5. $\angle ABE = \angle BAC$, так как $\angle 1 = \angle 2$.
6. $\angle ABD = \angle ABE$ как равные одному и тому же $\angle BAC$.
7. Лучи BD и BE совпадают, так как $\angle ABD = \angle ABE$ (аксиома откладывания углов).
8. D принадлежит прямой b, так как лучи BD и BE совпадают.
9. Прямые a и b имеют две различные общие точки D и C, что невозможно.
10. Предположение, что a и b пересекаются, неверно. Значит, $a \parallel b$.

По пробному учебнику Л. С. Атанасяна

1. Пусть a и b непараллельны, т. е. имеют общую точку C.
2. $\angle 2$ внутренний в $\triangle ABC$, а $\angle 1$ внешний в $\triangle ABC$.
3. $\angle 1 > \angle 2$ по теореме о внешнем угле треугольника. Это противоречит условию теоремы.
4. Предположение, что a и b непараллельны, неверно. Значит, $a \parallel b$.

Перед доказательством признаков параллельности прямых необходима специальная работа по организации повторения тех вопросов, которые составляют основу доказательства, а именно:

По учебному пособию А. В. Погорелова:

а) признаки равенства треугольников и определение равных треугольников;

По пробному учебнику Л. С. Атанасяна и др.:

а) углы, образуемые при пересечении двух прямых третьей;

б) аксиома откладывания углов;

в) углы, образуемые при пересечении двух прямых третьей;

г) свойство смежных углов.

б) нахождение на рисунке внутренних углов треугольника и внешних его углов;

в) нахождение на рисунке внутренних углов треугольника, не смежных с данным внешним его углом;

г) свойства внешнего угла треугольника.

Повторение проводится по рисункам, при этом предполагается их варьирование во избежание частных случаев.

Доказательство признака параллельности прямых, приведенного в учебном пособии А. В. Погорелова, несомненно, вызовет определенные трудности у учащихся, так как оно сложное по структуре, дополнительные построения на чертеже носят искусственный характер. Все это говорит о необходимости специальной подготовки учащихся к его восприятию: отдельные фрагменты доказательства целесообразно рассмотреть предварительно как задачи.

Задача 1. Известно, что накрест лежащие углы одной пары равны между собой. Докажите, что остальные накрест лежащие углы также попарно равны.

Задача 2. Известно, что $\triangle ABC = \triangle PQM$. Назовите равные углы и равные стороны этих треугольников.

Задача 3. Известно, что $\angle ABD = \angle ABE$. Докажите, что лучи BD и BE совпадают.

Задача 4. Что значит, что прямые a и b непараллельны?

Доказательство признака, связанного с односторонними углами, сводится к уже рассмотренному признаку параллельности прямых.

Дано: c — секущая для прямых a и b; $\angle 2 + \angle 5 = 180°$.

Доказать: $a \parallel b$ (рис. 102).

Доказательство.

1. $\angle 2 + \angle 5 = 180°$ — по условию,
   $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ — смежные углы.
2. $\angle 5 = 180° - \angle 2$, $\angle 3 = 180° - \angle 2$, следовательно, $\angle 3 = \angle 5$.
3. $a \parallel b$, так как накрест лежащие углы равны.

Задачи на доказательство, подготавливающие к рассмотрению других признаков параллельности прямых (см. рис. 102):

а) $\dfrac{\angle 1 + \angle 6 = 180°}{\angle 3 = \angle 5}$;

б) $\dfrac{\angle 4 = \angle 6}{\angle 3 = \angle 5}$; в) $\dfrac{\angle 2 = \angle 6}{\angle 3 = \angle 5}$.

Эти задачи можно использовать в качестве домашних заданий, включать их в классные самостоятельные работы, предлагать учащимся во время устного опроса.

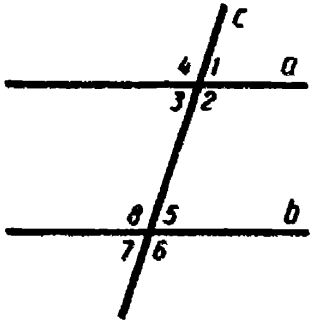


Рис. 102

Рассуждения и доказательства теорем, обратных признакам параллельности прямых, аналогичны между собой, что облегчает их усвоение учащимися. Необходимо учителю совместно с учащимися четко провести рассуждения при доказательстве одной из этих теорем и записать их, чтобы на них полностью опираться при обучении учащихся самостоятельному доказательству остальных теорем.

Большую роль в усвоении материала о параллельных прямых на плоскости играют задачи. Задачи могут быть использованы при формировании понятий темы, при подготовке учащихся к доказательству теорем, при использовании изученных теорем, в доказательстве новых фактов. Особо следует выделить задачи на построение параллельных прямых с использованием различных конструктивных инструментов.

По содержанию задачи по этой теме можно разделить на три группы:

1) задачи на прямое применение аксиомы параллельности: «Доказать, что две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны»;

2) задачи на применение признаков параллельности прямых: «Доказать, что биссектрисы соответственных углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, параллельны»;

3) задачи на применение теорем, обратных признакам параллельности прямых: «Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная противоположной стороне его. Зная углы треугольника, вычислить углы, образовавшиеся при вершине A».

§ 42. Перпендикулярность прямых на плоскости

Учение о перпендикулярности прямых в средней школе имеет в своей основе понятие угла между прямыми и умение измерять величину угла.

Случай перпендикулярных прямых, естественно, появляется при рассмотрении пересекающихся прямых. Величину наименьшего из углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, считают углом между ними. Поэтому величина угла между пересекающимися прямыми не может превосходить 90°. В том случае, если угол между прямыми равен 90° (равен прямому углу), прямые называются перпендикулярными. Прямые, стало быть, будут перпендикулярны в том и только в том случае, если угол между ними равен 90°. При введении понятия перпендикулярных прямых правильному его восприятию и более прочному запоминанию его определения помогает обращение к окружающей действительности, опора на жизненный опыт учащихся. Примеры перпендикулярных прямых в окружающей жизни убеждают учащихся в их существовании, в их большой значимости для практики, а значит, помогают создать правильное представление у них о природе этого понятия — о возникновении его на основе практической деятельности людей.

Надо сказать, что такого рода работа уже проводилась с учащимися I—V классов, а поэтому в систематическом курсе пла-

ниметрии необходимо учитывать это, опираться на имеющиеся у учащихся знания о перпендикулярных прямых.

После определения перпендикулярных прямых вводится соответствующая символика, проводится обучение учащихся использованию введенной символики при выполнении записей, а также обучение чтению записей, в которых используется символика.

Существование перпендикулярных прямых показывается конструктивно. Способ решения задачи на построение перпендикуляра к прямой, проходящего через данную точку, основывается на свойстве смежных углов; если смежные углы равны, то каждый из них прямой (величина его равна 90°).

Заслуживает внимания способ построения прямой, перпендикулярной к данной прямой, проходящей через данную точку на ней, изложенный в пробном учебнике по геометрии для VI класса А. Д. Александрова и др., который является частным случаем известной учащимся задачи на построение биссектрисы угла. Биссектриса развернутого угла является общей стороной двух равных смежных углов, т. е. является стороной прямого угла. Стало быть, задача на построение перпендикуляра к прямой весьма удачно сводится к известной задаче на построение биссектрисы угла.

Доказательство единственности перпендикуляра к прямой, проходящего через данную точку, может опираться на различные положения. В одних учебниках (см. [134]) при доказательстве единственности используется аксиома откладывания углов, в других (см. [33] и [12]) при доказательстве единственности перпендикуляра к прямой используется положение о том, что в треугольнике не может быть двух прямых углов.

Способ построения перпендикуляра к прямой, проходящего через точку вне этой прямой, можно получить из предыдущей задачи.

На рисунке 103 любая точка перпендикуляра MO к прямой a (не только точки M и O) равноудалена от концов отрезка AB (A и B равноудалены от O). Действительно, $\triangle AKO = \triangle BKO$, где K — произвольная точка перпендикуляра MO к прямой a, поскольку $\angle O$ прямой по построению, $AO = OB$ по построению, OK — общая сторона. Отсюда следует, что $AK = BK$.

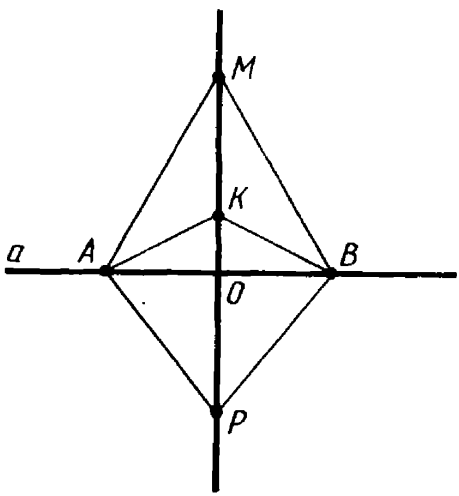


Рис. 103

Следовательно, для построения перпендикуляра к прямой a через точку M вне ее достаточно на прямой a найти отрезок AB так, чтобы $AM = BM$, а затем построить еще одну точку P так, чтобы $AP = BP$. Прямая MP — искомый перпендикуляр к прямой a, проходящий через точку M. Это легко доказать. $\triangle MAP = \triangle MBP$,

так как $AB=BM$, $AP=BP$ по построению, MP — общая сторона. Отсюда следует, что $\angle AMO=\angle BMO$ и $\angle APO=\angle BPO$. $\triangle APO=\triangle BPO$, так как $AP=BP$ по построению, OP — общая сторона, $\angle APO=\angle BPO$ по доказанному. Это значит, что $\angle AOP=\angle BOP$. Поскольку $\angle AOP$ и $\angle BOP$ смежные и равные между собой, то они прямые.

Таким образом $MP\perp a$.

Задача всегда имеет решение, поскольку все произведенные построения всегда выполнимы.

Доказательство единственности такого перпендикуляра опирается на то положение, которое принято за основное в учебном пособии А. В. Погорелова [134].

Перпендикуляр MP к прямой a имеет весьма примечательное расположение по отношению к отрезку AB на этой прямой: он перпендикулярен к отрезку AB и проходит через его середину. Поэтому он получил особое имя — серединный перпендикуляр к отрезку.

Как видим, именно свойства серединного перпендикуляра к отрезку лежат в основе построения перпендикуляра к прямой, проходящего через данную точку.

Эти свойства надо сформулировать в виде теорем, обращаясь к тем рассуждениям-доказательствам, которые были проведены.

«Если точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, то она равноудалена от концов этого отрезка».

Верно и обратное утверждение:

«Если точка равноудалена от концов некоторого отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку».

В классе под руководством учителя оформляется запись условия и заключения каждой теоремы, доказательство первой теоремы. Доказательство другой теоремы можно дать с пояснениями в качестве домашнего задания.

После рассмотрения теоремы решается задача: «Через точку D вне прямой a провести перпендикуляр к прямой a». Перед решением задачи выясняется, какая из двух рассмотренных теорем будет использована при построении перпендикуляра к прямой.

Учащимся ставятся вопросы:

1. Как на прямой a построить отрезок, концы которого равноудалены от точки D?

2. Сколько точек перпендикуляра достаточно построить, чтобы определить его?

3. Известно ли положение какой-либо точки перпендикуляра? Назовите ее.

4. Сколько точек перпендикуляра остается построить, чтобы определить его положение?

После такой беседы по рисунку на доске учащимся можно предложить провести построение самостоятельно.

Доказательство правильности построения провести устно, а дома оформить запись самостоятельно (такое задание уже дано). Желательно свойство серединного перпендикуляра к отрезку с соответствующей задачей на построение рассмотреть на одном уроке

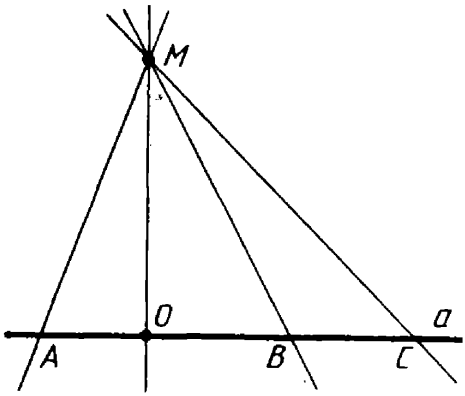


Рис. 104

с целью создания у учащихся цельного представления об этом понятии. В последующей работе над понятием серединного перпендикуляра к отрезку подмечается, что прямая будет являться серединным перпендикуляром к отрезку в том и только в том случае, если ее точки равноудалены от концов этого отрезка.

В процессе такой работы постепенно формируются представления учащихся о необходимых и достаточных условиях, которые играют большую роль в дальнейшем построении курса математики средней школы.

Учащимся надо разъяснить, что формулировка теоремы со словами «в том и только в том случае» или «тогда и только тогда» включает в себя две теоремы — прямую и обратную.

Большое значение для изучения последующих разделов систематического курса геометрии, а особенно для решения задач, имеют вопросы, относящиеся ко взаимосвязи параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Взаимосвязь параллельности и перпендикулярности прямых может быть раскрыта в процессе решения соответствующих задач на доказательство.

З а д а ч а 1. Доказать, что два перпендикуляра к одной и той же прямой параллельны.

При ее решении можно опираться на единственность перпендикуляра к прямой, проходящего через данную точку. Если изучение перпендикулярности прямых предшествует изучению параллельности прямых, то эта задача рассматривается как теорема — признак параллельности прямых.

З а д а ч а 2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к данной прямой, то другая из параллельных прямых также перпендикулярна к этой прямой.

Эта задача вытекает как частный случай из теоремы о свойстве углов, образуемых при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой.

В разделе о перпендикулярности прямых на плоскости рассматривается понятие наклонной к данной прямой. Поскольку через данную точку проходит только один перпендикуляр к данной прямой, то все остальные прямые, проходящие через эту точку (кроме прямой, параллельной ей), называют наклонными к данной прямой.

Через данную точку к данной прямой можно провести сколько угодно наклонных, а перпендикуляр только один. Это четко следует подчеркнуть в беседе с учащимися.

Особо рассматривается случай о перпендикуляре и наклонных к данной прямой, проходящих через точку вне ее.

Как перпендикуляр, так и каждая из наклонных к данной прямой пересекают эту прямую (рис. 104).

Длину отрезка MO, который расположен на перпендикуляре к прямой a, называют длиной перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую a, или расстоянием от точки M до прямой a.

Длину каждого из отрезков MA, MB, MC и т. д., принадлежащих соответственным наклонным к прямой a, проходящим через точку M, называют длиной наклонных.

Учителю в этом случае следует быть весьма осторожным в обращении с терминологией: в одном случае перпендикуляр и наклонные выступают как геометрические фигуры — прямые, в другом случае — как величины.

Это делается для краткости формулировок теорем, раскрывающих свойства перпендикуляра и наклонных, проведенных из **одной** и **той же точки к одной и той же прямой.**

После этого рассматриваются соответствующие теоремы, которые не вызывают, как правило, у учащихся особых затруднений.

§ 43. Первые уроки стереометрии

Изучение взаимного расположения прямых и плоскостей в курсе стереометрии полностью опирается на основные понятия и аксиомы, поэтому методика введения аксиом требует особого внимания.

Каждую из аксиом рекомендуется вводить по следующей схеме:
— иллюстрация аксиомы на модели;
— формулировка аксиомы;
— схематический рисунок;
— символическая запись.

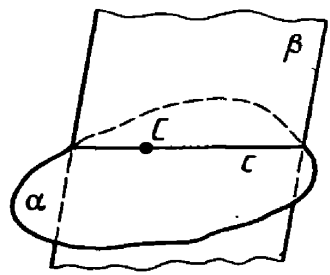
Ниже приводится рисунок (рис. 105) и символическая запись к аксиоме C_2 из учебного пособия А. В. Погорелова [134].

Из самого определения пересечения фигур следует, что $C \in \alpha$, а поэтому в аксиоме C_2 это требование не фиксируется. Эта аксиома, так же как и аксиома C_1, обеспечивает трехмерность пространства: в плоскости α существуют точки, не принадлежащие плоскости β, и наоборот.

Эта аксиома показывает существование пересекающихся плоскостей, поэтому после ее введения следует познакомить учащихся с пересекающимися плоскостями.

Аксиома, определяющая положение плоскости в пространстве, в различных учебных пособиях формулируется по-разному.

Традиционная формулировка используется в большинстве учебников для средней школы: «Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну».



$$\frac{C \in \alpha \quad C \in \beta}{\alpha \cap \beta = c}$$

Рис. 105

В учебном пособии А. В. Погорелова [134] дается другая формулировка аксиомы: «Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость и притом только одну».

В процессе введения аксиомы, определяющей положение плоскости в пространстве, необходимо учащимся разъяснить ее сущность: в аксиоме говорится о том, что **существует** плоскость, удовлетворяющая заданным условиям, и **единственная.** Существование и единственность такой плоскости особо подчеркиваются, так как будут использованы в дальнейшем при формулировке и доказательстве следствий из аксиом.

В процессе введения математического предложения, определяющего плоскость тремя различными точками пространства, не лежащими на одной прямой, необходимо рассмотреть с использованием наглядности различные случаи, а именно:

Сколько плоскостей проходит через одну точку пространства?

Сколько плоскостей проходит через две различные точки пространства?

Сколько плоскостей проходит через три различные точки пространства, лежащие на одной прямой и не лежащие на одной прямой?

Только после этого дается формулировка самого предложения.

Основные понятия и все аксиомы стереометрии желательно ввести на одном уроке, чтобы создать у учащихся первое цельное представление о той базе, на которой строится геометрия трехмерного пространства. Запоминание аксиом, понимание их значения и роли в построении курса геометрии осуществляются при изучении всех дальнейших разделов стереометрии, в процессе применения их при доказательстве теорем и решении задач. Роль учителя состоит в том, чтобы при каждом удобном случае в процессе обучения найти возможность оттенить, подчеркнуть сущность аксиом и их значение. Одним из благодатных для проведения такой работы с учащимися является раздел о следствиях из аксиом, которые, по сути дела, есть первые теоремы с явным использованием аксиоматики при их доказательстве. Каждое из следствий представляет собой новое задание плоскости, отличное от того, которое сформулировано в аксиомах. В заключениях теорем-следствий необходимо выделить две части: первая часть требует доказательства существования плоскости, заданной определенными элементами условия теоремы, вторая часть требует доказательства единственности такой плоскости. Это должно найти отражение как в краткой записи условия и заключения теоремы, так и в записи ее доказательства.

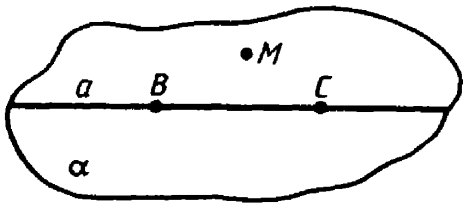


Рис. 106

В качестве примера ниже рассматривается следствие 1.

Дано: a; $M \notin a$ (рис. 106).

Доказать:

1. Существует α, такая, что $a \subset \alpha$ и $M \in \alpha$.

2. α — единственная.

Доказательство.

1. Существование плоскости α: $a \subset \alpha$ и $M \in \alpha$.

а) $B \in a$, $C \in a$ и $B \neq C$ по аксиоме 1.

б) $B \in a$, $C \in a$ и $M \notin a$, следовательно, существует плоскость $(BCM) = \alpha$.

в) $\left.\begin{array}{l} B \in a,\ C \in a \\ B \in \alpha,\ C \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \subset \alpha$ — по соответствующей аксиоме.

2. Единственность плоскости α.

а) Пусть существует β: $a \subset \beta$ и $M \in \beta$.

б) $a \subset \beta$, $B \in a$ и $C \in a \Rightarrow B \in \beta$ и $C \in \beta$.

в) $\left.\begin{array}{l} (BMC) = \alpha \\ (BMC) = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \alpha$ — по соответствующей аксиоме.

В учебном пособии А. В. Погорелова доказательство этого следствия опирается на аксиому, определяющую плоскость в пространстве двумя пересекающимися прямыми. В этом случае на прямой a достаточно выбрать одну точку B, которая с точкой M определяет единственную прямую b, пересекающую прямую a. Прямые a и b определяют единственную плоскость α по соответствующей аксиоме.

Все остальные следствия доказываются по такой же схеме, как и следствие 1, поэтому, пользуясь аналогией, одно из следствий можно предложить учащимся для самостоятельного доказательства после соответствующих указаний и разъяснений. Каждое из следствий необходимо проиллюстрировать примерами из окружающей действительности, а также на моделях различных многогранников. В процессе доказательства следствий следует обратить внимание на одно допущение: «На прямой существуют хотя бы две точки», которое использовалось без доказательства при выборе двух различных точек на прямой. Вообще говоря, без доказательства принимается, что прямая представляет собой бесчисленное множество точек. Это подтверждает тот факт, что систематический курс стереометрии средней школы построен не строго дедуктивно.

Так же как и в геометрии на плоскости, в курсе стереометрии изучение взаимного расположения прямых и плоскостей может осуществляться в различной последовательности, что находит отражение в существующих учебных пособиях. В одних пособиях параллельность прямых и плоскостей предшествует их перпендикулярности ([134], [33], [99]), в других пособиях, наоборот, перпендикулярность прямых и плоскостей предшествует их параллельности ([92], [15]). Хотя обе названные схемы имели место в средней школе, в настоящее время изучение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве в школе начинается с аффинной ее части — с параллельности. Это дает возможность как можно раньше познакомить учащихся с изображением пространственных фигур на плоскости, а также позволяет показать в достаточной степени роль аксиом при изложении этого раздела, развивать конструктивные навыки учащихся в процессе решения позиционных задач.

§ 44. Параллельность в пространстве

Прежде всего всю тему «Параллельность в пространстве» следует разделить на четыре самостоятельные части:

1^0. Параллельность прямых в пространстве; скрещивающиеся прямые.

2^0. Параллельность прямой и плоскости.

3^0. Параллельность плоскостей в пространстве.

4^0. Параллельная проекция и ее свойства; изображение пространственных фигур на плоскости.

В соответствии с этим следует проводить учет знаний учащихся, самостоятельные работы на уроке, в тетрадях учащихся должны быть соответствующие заголовки.

1^0. Изложение первого пункта намеченного плана следует начать с беседы о том, сколько общих точек могут иметь две прямые; при этом надо отталкиваться от соответствующих аксиом, уже известных учащимся.

На основании одной из аксиом две прямые не могут иметь только две общие точки, в противном случае они совпадают. По той же причине две прямые не могут иметь конечное число общих точек большее, чем одна.

Итак, две прямые могут иметь бесчисленное множество точек, т. е. совпадать.

После этого выяснить, могут ли две прямые иметь меньше двух общих точек.

Совершенно ясно, что две прямые могут иметь только одну общую точку; в этом случае прямые называются пересекающимися.

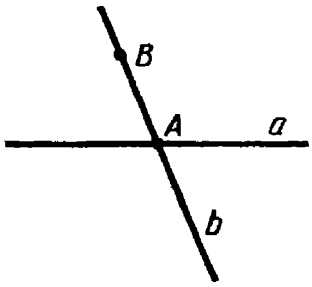


Рис. 107

Учащимся следует показать способ построения пересекающихся прямых (рис. 107):

а) $A \in a$ — по соответствующей аксиоме;

б) $B \notin a$ — по соответствующей аксиоме;

в) A и B определяют единственную прямую b — по соответствующей аксиоме;

г) a и b пересекаются, ибо в противном случае a и b совпали бы и точка B оказалась бы на прямой a, чего быть не может.

Остается выяснить, могут ли две прямые совсем не иметь общих точек. Такого рода прямые известны учащимся из курса планиметрии, это так называемые параллельные прямые. С учащимися следует повторить определение параллельных прямых, в процессе повторения особо подчеркнуть выражение «лежат в одной плоскости», которое характеризует параллельные прямые в пространстве.

Параллельно с рассуждениями должен появиться рисунок 108 с заголовком «Взаимное расположение прямых в пространстве», на котором отражаются все случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве.

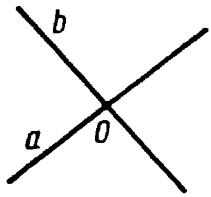
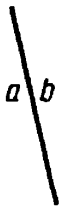
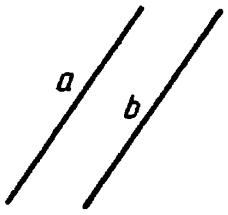
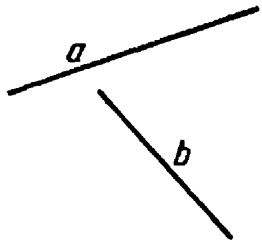
Взаимное расположение прямых в пространстве			
			
Прямые a и b имеют только одну общую точку O: a и b пересекаются	Все точки прямых a и b — общие: прямые a и b совпадают	Прямые a и b не имеют общих точек: a и b параллельны ($a \parallel b$)	Прямые a и b не имеют общих точек: a и b — скрещивающиеся
a и b лежат в одной плоскости			a и b не лежат в одной плоскости

Рис. 108

Сначала на рисунке изображаются три случая взаимного расположения прямых — прямые пересекаются, прямые совпадают и прямые параллельны — и выясняется, что во всех этих случаях прямые лежат в одной плоскости; это подтверждается следствиями из аксиом.

Возникает вопрос: могут ли две прямые в пространстве располагаться так, что через них нельзя провести плоскость?

Как показывает опыт, такие прямые есть, их следует показать в окружающей действительности, выяснить в процессе рассуждений, что они не могут иметь общих точек. После этого вводится термин «скрещивающиеся прямые», дается определение скрещивающимся прямым, показывается соответствующая символика, на рисунке изображается новый случай взаимного расположения двух прямых в пространстве. Схема, которая показана на рисунке 108, может быть другой в зависимости от того, считаются ли совпадающие прямые параллельными или нет. Если совпадающие прямые считать параллельными, тогда получатся не четыре, а три различных случая взаимного расположения прямых в пространстве. Случай совпадения двух прямых не представляет интереса для его изучения, а поэтому в дальнейшем не рассматривается. В итоге необходимо подчеркнуть, что других случаев взаимного расположения двух прямых в пространстве, кроме указанных выше, быть не может.

Особое внимание следует уделить признаку скрещивающихся прямых, который лежит в основе способа их построения. Перед формулировкой признака надо наглядно проиллюстрировать скрещивающиеся прямые, используя каркасные модели многогранников, и подметить такую их особенность: одна из прямых пересекает плоскость, в которой лежит другая прямая, в точке, не принадлежащей ей. На основании этого выполняется рисунок, дается формулировка теоремы — признака скрещивающихся прямых, а затем проводится ее

доказательство. Доказательство признака должен сначала рассказать сам учитель, а затем попросить учащихся повторить его. При доказательстве признака важно заострить внимание учащихся на вопросе: «Что значит: две прямые не являются скрещивающимися?» Ответить на этот вопрос поможет схема на с. 283: в этом случае прямые или пересекаются, или параллельны. Эти два случая надо в доказательстве рассмотреть отдельно. Случай скрещивающихся прямых — новый для учащихся, наиболее трудный среди остальных случаев, часто встречающийся при решении задач на многогранники, поэтому при закреплении ему надо уделить особое внимание. В задачах на закрепление должны быть рассмотрены всевозможные скрещивающиеся прямые, которым принадлежат ребра многогранников.

С учащимися надо решить задачу на построение прямой, скрещивающейся с данной прямой и проходящей через данную точку.

Дано: a; M.

Построить: $b \doteq a$ и $M \in b$ (рис. 109).

Решение.

I. $M \notin a$.

1. a и M определяют единственную плоскость α (следствие 1).
2. Выберем точку P вне плоскости α (соответствующая аксиома).
3. Точки M и P определяют единственную прямую b (соответствующая аксиома).
4. $b \doteq a$.

При доказательстве того, что $b \doteq a$ и $M \in b$, необходимо рассмотреть два случая, следующие из допущения, что b и a нескрещивающиеся:

а) a и b пересекающиеся;

б) a и b параллельны.

Рассуждения полностью повторяют доказательство признака скрещивающихся прямых. Задача имеет сколько угодно решений, поскольку выбор точки P вне плоскости α произволен. Итак, через точку пространства вне прямой можно провести сколько угодно скрещивающихся с ней прямых.

II. $M \in a$. Задача не имеет решений.

Небезынтересно провести сравнение на плоскости и в пространстве прямых, не имеющих общих точек.

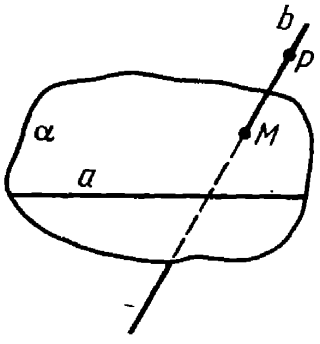


Рис. 109

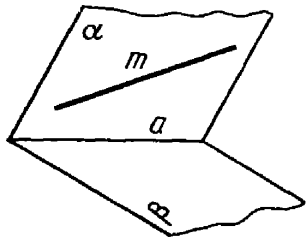


Рис. 110

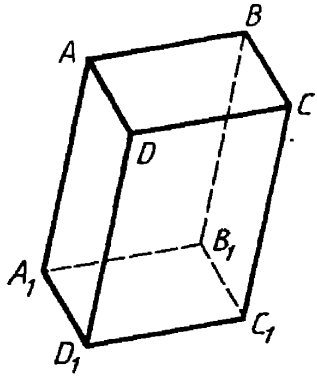
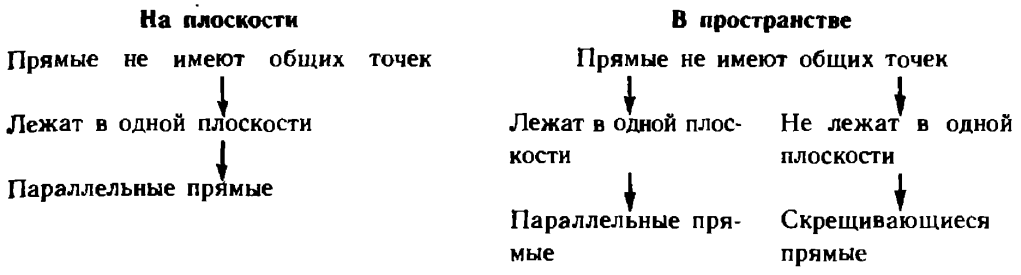


Рис. 111



Изучение параллельности прямых в пространстве проводится на базе повторения соответствующего раздела из курса планиметрии.

Подробно следует остановиться на решении задачи о проведении прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку пространства, показать роль аксиом и следствий из аксиом в процессе решения. Предложение «В пространстве через данную точку можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной прямой» оформить как теорему с соответствующей записью в тетрадях. Доказательство этой теоремы сводится к повторению решения задачи на построение, рассмотренной перед этим.

В пространстве можно провести сколько угодно прямых, параллельных данной; совокупность таких прямых называется связкой параллельных прямых. Чтобы утверждать, что любые две прямые параллельны между собой, необходимо доказать свойство транзитивности параллельных прямых.

Доказательство свойства транзитивности параллельности прямых в пространстве представляет определенные трудности для учащихся, а поэтому нуждается в специальной предварительной подготовке их к его восприятию. С этой целью необходимо рассмотреть решение задачи, которая является элементом доказательства свойства транзитивности параллельности прямых в пространстве и используется дважды в процессе доказательства.

З а д а ч а. Плоскости α и β пересекаются по прямой a (рис. 110). Прямая m, лежащая в плоскости α, пересекает плоскость β. Доказать, что точка пересечения прямой m с плоскостью β принадлежит прямой a.

Весьма важно использование свойства транзитивности параллельности прямых в пространстве в процессе решения задач. Примеры таких задач приведены ниже.

З а д а ч а. Дан параллелепипед (рис. 111). Доказать параллельность его ребер и равенство их длин:

а) AA_1 и CC_1; б) AB и D_1C_1; в) AD и B_1C_1.

З а д а ч а. В многограннике (рис. 112) грани A_1ABB_1 и B_1BCC_1 — параллелограммы. Доказать, что A_1ACC_1 — параллелограмм.

Доказательство транзитивности параллельности прямых в учебном пособии А. В. Погорелова дается без использования параллельности прямой и плоскости. В учебном пособии по геометрии под редакцией З. А. Скопеца это свойство доказывается после изучения параллельности прямой и плоскости.

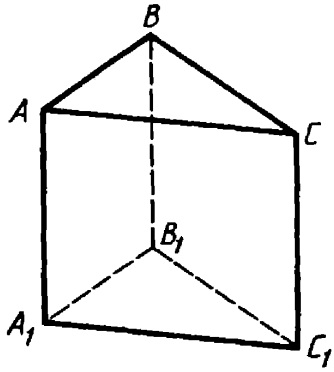


Рис. 112

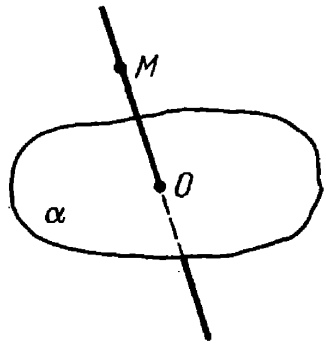


Рис. 113

2^0. Раздел о параллельности прямой и плоскости следует начать с беседы о возможном числе общих точек у прямой и плоскости, опираясь при этом на соответствующую аксиому.

Прямая и плоскость не могут иметь только две общие точки, ибо в противном случае прямая будет лежать в этой плоскости. По той же причине прямая не может иметь с плоскостью только три, четыре и т. д. общих точек.

Может ли прямая иметь с плоскостью только одну общую точку? Как показывает опыт, да.

Надо построить прямую, имеющую с плоскостью только одну общую точку, и обосновать это (рис. 113):

1. На плоскости α выбрать точку O.
2. Вне плоскости α выбрать точку M.
3. Точки M и O определяют единственную прямую b.
4. b имеет с α единственную общую точку O.

При доказательстве предполагаем противное, т. е. пусть b имеет с α более чем одну общую точку. Тогда b будет лежать в α. Таким образом, прямая b имеет с α только одну общую точку. В этом случае говорят, что прямая пересекает плоскость или плоскость пересекает прямую.

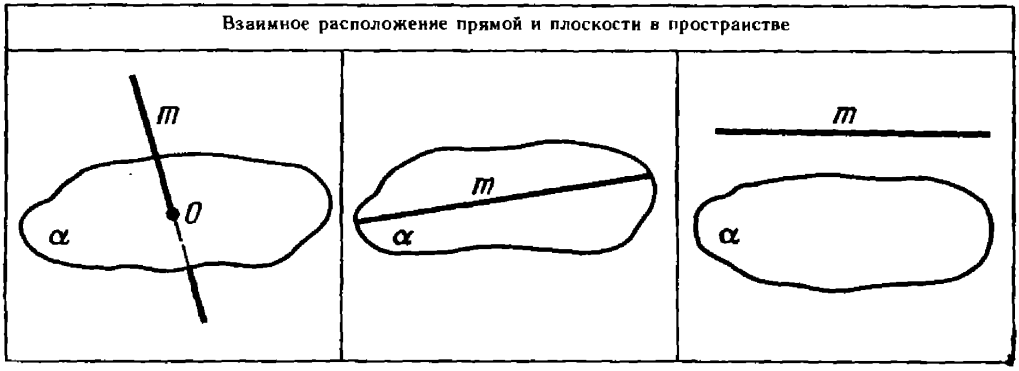


Рис. 114

Остается выяснить, может ли прямая совсем не иметь с плоскостью общих точек. На основании опыта и наблюдений можно утверждать, что может.

Все приведенные выше рассуждения поясняются примерами из окружающей жизни и записываются в таблицу (рис. 114):

Исходя из приведенной таблицы, можно дать и другую классификацию различных случаев взаимного расположения прямой и плоскости, а именно: прямая m лежит в плоскости α, прямая m не лежит в плоскости α. Других случаев быть не может. Этой классификацией в дальнейшем также будем пользоваться при рассуждениях.

Случай, когда m принадлежит α, не представляет интереса, а поэтому в дальнейшем не рассматривается.

Если прямую, лежащую в плоскости, считать параллельной плоскости, то в схеме о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве будут два случая: прямая и плоскость пересекаются; прямая и плоскость параллельны.

Пользуясь таблицей, учащиеся самостоятельно могут дать определение параллельности прямой и плоскости. С помощью определения не всегда можно судить о том, что данные прямая и плоскость параллельны, поскольку прямая и плоскость безграничны.

Как известно, учащиеся могут по известным признакам судить о параллельности двух прямых в пространстве. Встает вопрос: нельзя ли о параллельности прямой и плоскости судить по параллельности двух прямых? Естественно, одна из таких прямых есть данная прямая, а другая должна принадлежать данной плоскости.

Так появляется теорема, носящая имя признака параллельности прямой и плоскости, показывающая существование параллельных прямой и плоскости в пространстве.

При доказательстве теоремы используется таблица.

Доказательство ведется методом от противного.

Из предположения, что прямая имеет с плоскостью общую точку, приходят к противоречию с уже известной истиной. На основании этого утверждают, что прямая не может пересекаться с плоскостью, т. е. она параллельна ей.

Перед формулировкой теоремы, обратной признаку параллельности прямой и плоскости, прямую a в плоскости α следует рассмотреть как след плоскости β, определяемой параллельными прямыми a и b на плоскости α (рис. 115).

Тогда признак параллельности прямой b и плоскости α можно сформулировать по-другому: если плоскость, проходящая через прямую b, оставляет на плоскости α след a, параллельный b, то прямая b параллельна плоскости α.

Исходя из этой формулировки и дается теорема, обратная признаку параллельности прямой и плоскости: если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то след ее на этой плоскости параллелен данной прямой.

В порядке закрепления рассмотренных теорем следует решить две задачи на построение.

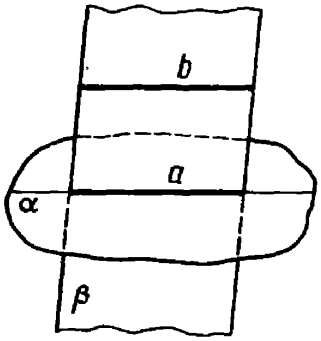


Рис. 115

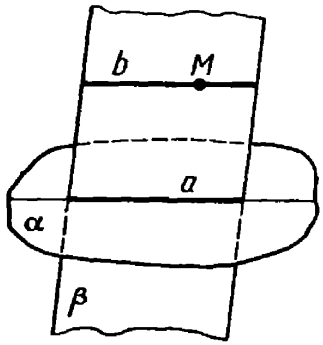


Рис. 116

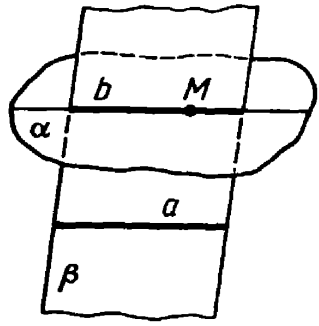
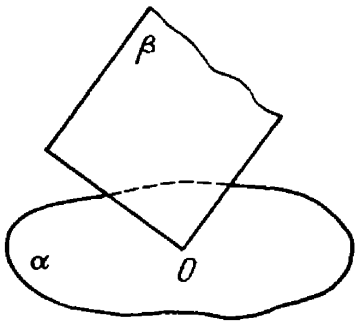
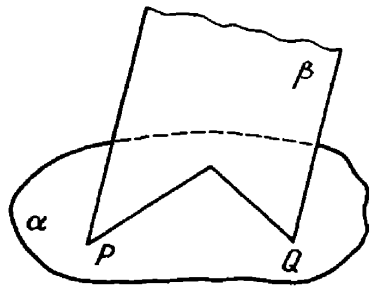


Рис. 117



а)



б)

Рис. 118

Задача 1. Даны плоскость α и точка M вне плоскости α (рис. 116). Через точку M повести прямую b, параллельную плоскости α.

Решение. а) $a \subset \alpha$.

б) a и M определяют единственную плоскость β.

в) Через M в плоскости β провести единственную прямую $b \parallel a$.

г) $b \parallel \alpha$ по признаку параллельности прямой и плоскости.

Так как выбор прямой a в плоскости α произволен, то задача имеет бесчисленное множество решений.

Итак, через точку пространства можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных данной плоскости.

Задача 2. Даны прямая a и точка M вне прямой a. Через точку M провести плоскость, параллельную прямой a (рис. 117).

Решение. а) M и a определяют единственную плоскость β.

б) В плоскости β через точку M проводят единственную прямую b, параллельную a.

в) Через прямую b проводят плоскость α.

г) Плоскость α параллельна прямой a по признаку параллельности прямой и плоскости.

Поскольку через прямую a можно провести сколько угодно плоскостей, то задача имеет бесчисленное множество решений.

3^0. Изучение параллельности плоскостей в пространстве, конечно, следует начать с разговора о возможном числе общих точек у двух плоскостей, отталкиваясь от соответствующей аксиомы.

Две различные плоскости не могут иметь только одну общую точку, ибо на основании известной аксиомы они будут иметь общую прямую, проходящую через эту точку (рис. 118 *а*). В этом случае говорят, что две плоскости пересекаются по прямой. По той же причине две плоскости не могут иметь только две общие точки (рис. 118 *б*). Оба эти случая надо продемонстрировать наглядно, используя картонные модели двух плоскостей. Беседа по моделям поможет учащимся закрепить представление о плоскости как безграничной фигуре.

Могут ли различные плоскости иметь только три различные точки?

Если эти точки не лежат на одной прямой, то на основании соответствующей аксиомы (или следствия из аксиомы) плоскости совпадают; если точки принадлежат одной прямой, то плоскости пересекаются по этой прямой.

Аналогично выясняется, что две различные плоскости не могут иметь конечного числа общих точек: они или пересекаются, или совпадают. В том и другом случае число общих точек бесконечно.

И наконец, в беседе с классом (с помощью примеров из окружающей обстановки) появляется гипотеза о том, что две плоскости могут совсем не иметь общих точек. Случаи взаимного расположения двух плоскостей заносятся в соответствующую таблицу (рис. 119). Как правило, совпадение двух плоскостей не рассматривается в дальнейшем как не представляющее интереса, и в таблице отражены только два случая.

Как видно, исходя из таблицы, можно по-разному сформулировать определение параллельных плоскостей в пространстве.

В процессе работы с таблицей учащимся следует дать способ построения пересекающихся плоскостей: на данной плоскости α выбирают произвольную прямую a и вне плоскости α — произвольную точку M. Плоскость β, определяемая прямой a и точкой M, пересекает плоскость α. Доказательство этого факта предлагается учащимся провести самостоятельно.

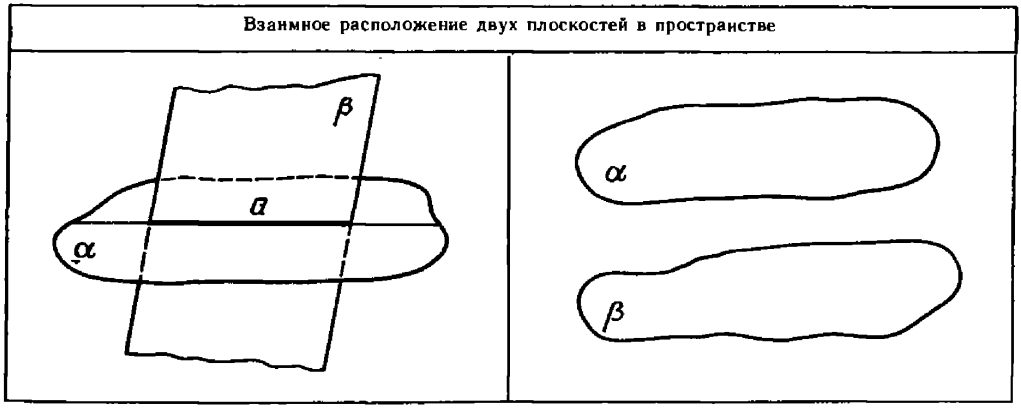


Рис. 119

Судить о параллельности двух плоскостей, пользуясь определением, не всегда возможно, так как плоскость — фигура безграничная. О параллельности двух плоскостей судят по параллельности прямых, связанных с этими плоскостями. Известно, что плоскость вполне определяется или парой пересекающихся прямых, принадлежащих ей, или парой параллельных прямых. Отсюда можно вывести две гипотезы:

а) если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны;

б) если две параллельные прямые одной плоскости соответственно параллельны двум параллельным прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

Вторая гипотеза отвергается путем приведения контрпримера: в пересекающихся плоскостях выбрать по прямой, параллельной линии их пересечения. Признак параллельности можно сформулировать, опираясь на параллельность прямой и плоскости: две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости [134].

Признак параллельности двух плоскостей доказывается методом от противного, поэтому следует особое внимание обратить на четкость рассуждений.

В порядке закрепления признака параллельности двух плоскостей следует решить ряд задач на построение.

З а д а ч а 1. Через точку вне данной плоскости провести плоскость, параллельную данной плоскости.

Р е ш е н и е. а) На плоскости α строят две пересекающиеся прямые p и q (рис. 120).

б) Через точку M проводят прямые a и b, соответственно параллельные прямым p и q.

в) Прямые a и b пересекающиеся, они определяют единственную плоскость β.

г) Плоскость $\beta \| \alpha$ по признаку параллельности двух плоскостей.

Доказательство единственности плоскости, проходящей через точку M и параллельной плоскости α, можно предложить учащимся самостоятельно прочитать по учебному пособию.

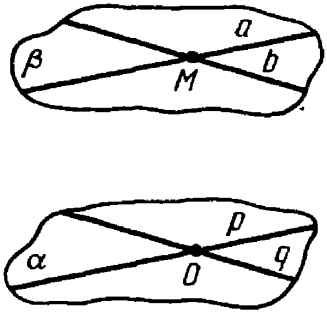


Рис. 120

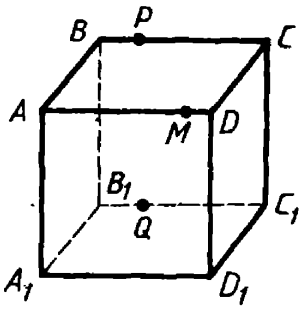


Рис. 121

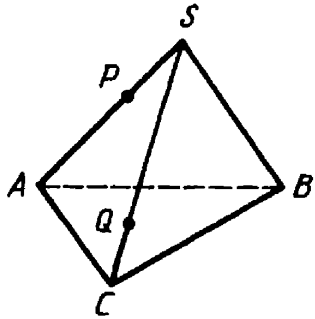


Рис. 122

Задача 2. Через данную прямую провести плоскость, параллельную данной плоскости.

При решении задачи рассматриваются два случая: данная прямая и данная плоскость непараллельны; данные прямая и плоскость параллельны.

В первом случае задача не имеет решений. Во втором случае в плоскости α проводят прямую p, параллельную прямой a (рис. 120); в плоскости α проводят произвольную прямую q, пересекающую прямую p; через произвольную точку прямой a проводят прямую b, параллельную прямой q; пересекающиеся прямые a и b определяют плоскость β, которая параллельна плоскости α по признаку параллельности двух плоскостей.

Доказательство единственности плоскости β, проходящей через прямую a и параллельной данной плоскости α, проводится методом от противного. Если допустить, что существует плоскость γ, отличная от плоскости β, проходящая через прямую a и параллельная плоскости α, то придем к противоречию с теоремой о единственности плоскости, проходящей через данную точку и параллельной данной плоскости.

Задача 3. Через каждую из двух скрещивающихся прямых провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.

Решение задачи основано на признаке параллельности двух плоскостей, доказательство единственности такой пары плоскостей проводится методом от противного.

В процессе изучения темы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве большое значение имеет решение задач, связанных с такими многогранниками, как параллелепипед, треугольная пирамида. Задачи должны являться хорошим материалом для закрепления всего ранее изученного, в частности аксиоматики трехмерного пространства. Ниже приведены примеры таких задач.

Задача 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки P и Q на его ребрах (рис. 121). Найти точки пересечения прямой PQ с плоскостями граней куба.

Задача 5. Дана пирамида $SABC$ и точки P и Q на ее ребрах. Найти точки пересечения прямой PQ с плоскостями граней пирамиды (рис. 122).

Задача 6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через прямую PQ и точку M (рис. 121).

Задача 7. Построить сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, параллельной прямой BC и проходящей через точки P и Q (рис. 122).

Такого рода задачи учитель может составить сам. В задачах вместо куба можно брать произвольный параллелепипед, предварительно дав описание этого многогранника.

4^0. В тему «Параллельность в пространстве» включен раздел о параллельной проекции и ее свойствах, который носит сугубо практический характер и является весьма благодатным материалом для развития пространственных представлений учащихся.

В процессе изучения этого раздела на основе определения и свойств параллельной проекции необходимо научить учащихся:

1) изображать пространственные фигуры на плоскости;

2) решать задачи на построение сечений многогранников (призм и пирамид) плоскостью методом следа.

При обучении учащихся решению указанных задач учитель должен не забывать о том, что построение сечений пирамиды плоскостью требует знакомства в неявном виде с центральным проектированием.

Задачи на построение сечений многогранников плоскостью следует разбить на группы.

1-я группа: задачи на построение сечения многогранника плоскостью, след которой на плоскости основания многогранника задан.

2-я группа: задачи на построение следа секущей плоскости на основании многогранника.

3-я группа: задачи на построение сечения многогранника плоскостью, след которой на плоскости основания многогранника не задан.

§ 45. Перпендикулярность в пространстве

Всю тему можно условно разделить на три части:

1) перпендикулярность прямых в пространстве;

2) перпендикулярность прямой и плоскости;

3) перпендикулярность плоскостей.

По каждой из этих частей проводится учет знаний учащихся: самостоятельные работы, контрольные работы, опрос учащихся на уроке и др.

В процессе изучения каждой из указанных частей следует исходить из общей схемы взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, с которой учащиеся познакомились в начале курса стереометрии при изучении параллельности в пространстве. Это дает возможность случай перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве вписать в общую схему взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, связать перпендикулярность в пространстве с аксиоматикой стереометрии, планомерно осуществлять повторение при изучении нового материала.

Эта тема носит большой прикладной характер, а поэтому при ее изучении особое внимание следует уделить решению задач; в задачах надо использовать многогранники — призмы и пирамиды — с целью подготовки учащихся к изучению соответствующего раздела в курсе стереометрии X класса. Особо выделить задачи, решаемые с помощью векторного аппарата, а также задачи, решаемые по готовому рисунку устно.

Перпендикулярность прямых в пространстве

Этот раздел, по сути дела, рассматривается как повторение пройденного ранее. Повторение нужно вести по следующему плану:

определение взаимно перпендикулярных прямых:

$$\widehat{(a, b)} = 90^\circ \Leftrightarrow a \perp b;$$

пересекающиеся и скрещивающиеся взаимно перпендикулярные прямые;

иллюстрация их на моделях многогранников и в окружающей действительности.

При повторении важно подчеркнуть, что в пространстве взаимно перпендикулярные прямые могут не иметь общих точек.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Изучение целесообразно начать с повторения о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве, используя имеющуюся таблицу.

Как нетрудно видеть, прямая и плоскость перпендикулярны тогда, когда они пересекаются.

Встает вопрос, в каком случае прямая, пересекающая плоскость, будет ей перпендикулярна.

Как показывает опыт, если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой на этой плоскости. Это положение иллюстрируется на наглядном пособии (на модели прямой призмы, на рисунке, с помощью стереометрического ящика). После этого дается определение перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве. Важно заметить, что перпендикулярность прямой и плоскости сводится к перпендикулярности прямых в пространстве, что уже знакомо учащимся.

В учебной литературе по стереометрии приняты различные определения перпендикулярности прямой и плоскости:

«Прямая и плоскость называются перпендикулярными, если прямая перпендикулярна каждой прямой, лежащей в плоскости» [33].

«Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости» [134], [15].

Для школьного изложения курса геометрии весьма целесообразно в определение перпендикулярности прямой и плоскости включить требование их пересечения. Если этого не включить в определение, то надо этот факт специально доказывать, что является нелегким для учащихся на этой поре обучения. Второе из приведенных определений включает в себя частный случай взаимного расположения данной прямой и прямых на плоскости, о котором говорится в определении, а именно случай их пересечения. Случай скрещивания этих прямых исключается. Оно, конечно, доступнее для учащихся, соответствует уровню развития их пространственного представления. В дальнейшем по мере развития учащихся это определение вполне можно расширить.

Надо сказать, что второе определение дает полный объем изучаемого понятия.

Если учащиеся достаточно подготовлены всей предыдущей работой, имеют хорошо развитые пространственные представления, то вполне можно вводить «первое» определение перпендикулярности

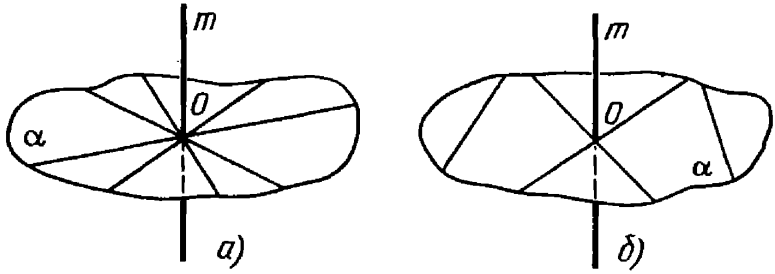


Рис. 123

прямой и плоскости, дополнив его требованием, что рассматриваемые прямая и плоскость пересекаются: «Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости».

Такое определение, безусловно, облегчит доказательство некоторых теорем курса, в частности доказательство теоремы о трех перпендикулярах.

Судить о перпендикулярности прямой и плоскости, пользуясь определением, невозможно, поскольку прямых, принадлежащих плоскости, бесчисленное множество. Оказывается, о перпендикулярности прямой и плоскости можно судить по перпендикулярности этой прямой двум прямым, лежащим в плоскости, которые должны проходить через точку пересечения прямой и плоскости (рис. 123 *а*).

Если в определение перпендикулярности прямой и плоскости включены скрещивающиеся прямые, то в этом случае достаточно потребовать, чтобы две прямые, принадлежащие плоскости, пересекались (рис. 123 *б*).

К этой мысли можно идти, рассмотрев в качестве жизненного примера крестовину для крепления новогодней елки перпендикулярно полу.

Учащимся важно показать на наглядном пособии, что прямая, перпендикулярная двум параллельным прямым, лежащим в плоскости, может оказаться не перпендикулярной плоскости.

В итоге этой работы формулируется теорема, которая получила название признака перпендикулярности прямой и плоскости (теорема о двух перпендикулярах), и ее доказательство проводится в классе учителем и сопровождается продуманными записями.

Доказательство этой теоремы в различных учебных пособиях различное: в большинстве пособий, в том числе и в учебном пособии А. В. Погорелова [134], доказательство проводится с помощью рассмотрения цепочки равных треугольников. Такой подход позволяет целенаправленно повторить большой раздел планиметрии, что облегчает вести учителю работу по планированию повторения; в учебном пособии под редакцией З. А. Скопеца [99] доказательство проводится с помощью векторного аппарата, поскольку к этому времени изучен раздел о векторах.

В дальнейшем в процессе изучения скалярного произведения векторов целесообразно вернуться к этой теореме и дать другое ее доказательство.

Здесь же вводится понятие наклонной к плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости лежит в основе построения прямой, перпендикулярной данной плоскости, и плоскости, перпендикулярной данной прямой.

Обе задачи на построение следует рассмотреть вместе с учащимися и кратко записать ход решения. В процессе решения особо подчеркивается, какая аксиома или какое следствие из аксиомы используется при выполнении каждого шага построения.

Задачу на построение прямой m, перпендикулярной плоскости α и проходящей через данную точку M, желательно решать отдельно для двух случаев с целью лучшего ее усвоения:

а) точка M принадлежит плоскости α;

б) точка M не принадлежит плоскости α.

Случай а) можно рассмотреть в классе, а случай б) предложить в качестве домашнего задания, используя уже имеющийся план решения для случая а).

Доказательство единственности построенной плоскости или прямой проводится устно, при этом надо обратить внимание на аккуратность рассуждений:

1) допускается, что через точку проходит более чем одна плоскость (прямая), перпендикулярная данной прямой (плоскости);

2) получается противоречие с известным уже положением;

3) сделанное допущение неверно, т. е. задача имеет единственное решение.

При изучении признака перпендикулярности прямой и плоскости надо позаботиться и о том, чтобы высвободить время для решения задач на доказательство и на вычисление, что во многом облегчает изучение темы «Многогранники» в дальнейшем.

Изучение взаимосвязи перпендикулярности прямой и плоскости с параллельностью прямых и плоскостей в пространстве следует связать с повторением темы «Параллельность в пространстве».

В условии теорем, характеризующих эту взаимосвязь, фигурируют тройки объектов: две прямые и плоскость; две плоскости и прямая. Теоремы рассматриваются попарно.

Первая пара теорем

1. Дано:
$a \parallel b$;
$a \perp \alpha$.

Доказать: $b \perp \alpha$.

2. Дано:
$a \perp \alpha$;
$b \perp \alpha$.

Доказать: $a \parallel b$.

Эти две теоремы доказываются чисто геометрически, а в дальнейшем в процессе повторения их полезно доказать с использованием векторного аппарата.

Доказательство теорем без векторного аппарата изложено в учебном пособии «Геометрия, 6—10» А. В. Погорелова, а с помощью векторов — в учебном пособии по геометрии под редакцией З. А. Скопеца.

Вторая пара теорем

1. Дано:
$a \perp \alpha$;
$\alpha \parallel \beta$.

Доказать: $a \perp \beta$.

2. Дано:
$a \perp \alpha$;
$a \perp \beta$.

Доказать: $\alpha \parallel \beta$.

Эти две теоремы можно получить из двух предыдущих заменой в их формулировке двух прямых двумя плоскостями, а плоскости — прямой.

При доказательстве первой теоремы через прямую a проводят две различные плоскости γ и δ, которые пересекают как плоскость α, так и плоскость β соответственно по прямым b и b_1, c и c_1, причем $b \parallel c$ и $b_1 \parallel c_1$.

Прямая a пересекает плоскость α в точке пересечения прямых b и c, а плоскость β — в точке пересечения прямых b_1 и c_1. Отсюда следует, что $a \perp \beta$.

Другая теорема доказывается методом от противного.

После этого вводится понятие прямоугольной (ортогональной) проекции прямой на плоскость.

На основе перпендикулярности прямой и плоскости вводятся такие понятия, как «расстояние от точки до плоскости», «общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых», «угол между наклонной и плоскостью», а также доказывается теорема о трех перпендикулярах, имеющая большое значение для дальнейшего изучения курса стереометрии, в частности для изучения многогранников. При доказательстве этой теоремы учащиеся должны понимать, о каких трех перпендикулярах идет речь, а поэтому их следует выделить на рисунке разными цветами.

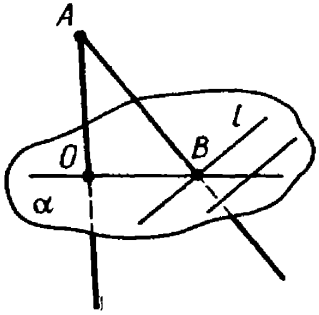


Рис. 124

Эта теорема заключает в себе необходимое и достаточное условия перпендикулярности прямой, лежащей в плоскости и наклонной к этой плоскости, поэтому достаточное и необходимое условия надо рассматривать как отдельные теоремы (соответственно прямую и обратную теорему):

Достаточность

Дано: AB — наклонная к α;
OB — проекция AB;
$l \perp OB$ и $l \subset \alpha$
(рис. 124).

Доказать: $l \perp AB$.

Необходимость

Дано: AB — наклонная к α;
OB — проекция AB;
$l \perp AB$ и $l \subset \alpha$
(рис. 124).

Доказать: $l \perp OB$.

С целью развития пространственных представлений учащихся для доказательства этой теоремы желательно изготовить модель. В дальнейшем, после изучения векторов, теорему о трех перпендикулярах можно доказать векторным методом.

Расстояние от точки до плоскости можно вводить, исходя из понятия расстояния между двумя фигурами, а можно его определить как расстояние от точки до основания перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Задачи на отыскание расстояния от точки до плоскости необходимо связать с многогранниками.

Перпендикулярность плоскостей

Раздел о перпендикулярности плоскостей в пространстве целесообразно начать с повторения о взаимном расположении двух плоскостей. С помощью рисунков, опираясь на жизненные представления учащихся, выясняется, что две перпендикулярные плоскости являются пересекающимися. Это требование включается в определение перпендикулярных плоскостей.

По аналогии с перпендикулярностью прямых о перпендикулярности двух плоскостей судят по углу между ними. Поэтому встает проблема: что такое угол между плоскостями? В решении этой проблемы в имеющихся учебных пособиях для школы изложены различные точки зрения. В пробном учебнике Л. С. Атанасяна и др. [33] сначала вводится понятие двугранного угла, а затем на этой основе дается определение перпендикулярных плоскостей. В учебном пособии А. В. Погорелова [134] угол между плоскостями рассматривается как угол между прямыми, полученными при пересечении двух плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной линии их пересечения. Такой подход к изучению перпендикулярных плоскостей позволяет на этой стадии обучения избежать введения нового понятия двугранного угла, которое для учащихся является непростым.

В пробном учебнике А. Д. Александрова и др. [15] понятие перпендикулярности двух плоскостей вводится на основе понятия перпендикулярности прямой и плоскости: «Две плоскости называются перпендикулярными, если в каждой из них через любую точку проходит прямая, перпендикулярная другой плоскости».

Такой подход к определению перпендикулярных плоскостей позволяет совершенно естественно перейти к пункту о перпендикулярности двух плоскостей, используя аналогию с перпендикулярностью прямой и плоскости, что является, несомненно, выигрышным при изучении этого вопроса. Однако при введении самого понятия перпендикулярных плоскостей в этом случае нежелательно использовать аналогию с введением понятий перпендикулярных прямых и перпендикулярности прямой и плоскости.

Аналогично определение перпендикулярных плоскостей дается в учебном пособии под редакцией З. А. Скопеца [99]; по сути дела, в качестве определения в этом пособии рассматривается признак перпендикулярности плоскостей.

Каждый из рассмотренных подходов может иметь место в школе.

В процессе введения перпендикулярных плоскостей необходимо использовать наглядность из окружающей обстановки, модели многогранников (куба, прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы), стереометрический ящик.

В пробном учебнике А. Д. Александрова и др. [15] сначала предварительно доказывается признак перпендикулярности плоскостей, исходя из предположения, что такие плоскости существуют, а затем показывается конструктивно их существование.

Во всех остальных случаях существование перпендикулярных плоскостей может быть показано конструктивно сразу после введения определения этого понятия.

В процессе изучения раздела о перпендикулярных плоскостях с учащимися отрабатываются такие вопросы, как:

а) определение перпендикулярных плоскостей;

б) признак перпендикулярности плоскостей (его доказательство);

в) построение перпендикулярных плоскостей;

г) решение задач с использованием определения и признака перпендикулярности плоскостей.

Эти вопросы должны быть центральными в процессе контроля знаний учащихся: при устном опросе, в процессе решения задач в классе и дома, при составлении самостоятельных и контрольных работ для учащихся.

Глава 13. МНОГОУГОЛЬНИКИ И МНОГОГРАННИКИ

§ 46. Особенности методики изложения темы «Многоугольники»

В курсе геометрии VI—VIII классов систематически изучаются геометрические фигуры на плоскости, причем большое внимание уделяется многоугольникам, изучению их свойств, рассмотрению величин, характеризующих плоский многоугольник. В решении задач на многоугольники находят применение различные методы.

Систематическое изучение плоских многоугольников базируется на сформированных в I—III классах представлениях о простейших геометрических фигурах и служит средством развития логического мышления учащихся. Здесь вводится много определений, доказываются содержательные теоремы, ведется работа по формированию понятий «свойство» и «признак». Уже в I—III классах они знакомы учащимся и служат хорошим дидактическим средством изучения арифметики. В I классе дети считают элементы многоугольников: вершины, стороны, углы, измеряют их стороны. Разбитый на равные квадраты прямоугольник используется во II классе для иллюстрации переместительного закона умножения, задача на нахождение периметра прямоугольника рассматривается в связи с изучением распределительного закона умножения относительно сложения. В III классе формируются представления о площади фигуры, основное внимание при этом уделяется вычислению площади прямоугольника и квадрата.

При обучении элементам геометрии в IV—V классах многоугольник выступает не только как средство изучения арифметики и элементов алгебры, но и как объект изучения. Большое внимание при этом уделяется развитию пространственных представлений учащих-

ся, работе с изображением отрезка, ломаной, угла, многоугольника, многогранника (прямоугольного параллелепипеда, куба). Основным для получения результатов является конкретно-индуктивный метод. Эпизодически вводятся элементы дедукции: формулируются некоторые определения (длина ломаной, дополнительные лучи, квадрат, куб и т. п.), отдельные свойства (отрезок AB короче любой линии, соединяющей точки A и B, свойства измерения углов и др.), на которые учащиеся ссылаются при решении задач типа «Объясните, почему...».

Этот раздел школьного курса геометрии выполняет и определенные мировоззренческие функции. В процессе его рассмотрения ученики знакомятся с историей отдельных вопросов, узнают об их месте и роли в практической деятельности человека.

Вместе с тем при изучении многоугольников идет формирование знаний, умений и навыков, необходимых для изучения смежных дисциплин: физики, черчения, трудового обучения и др.

Изученные в курсе планиметрии свойства и признаки многоугольников находят широкое применение в курсе стереометрии. Учителю необходимо помнить об этом при организации текущего и итогового повторения.

В различных школьных курсах планиметрии понятие многоугольников трактуется неодинаково.

В одних курсах многоугольник $A_1, A_2, \ldots, A_n$ трактуется как фигура, состоящая из отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, любые два из которых, имеющие общий конец, не лежат на одной прямой [30], [134]. В этом случае при рассмотрении площади многоугольников (прямоугольника, параллелограмма, треугольника и др.) под каждым из них понимается соответствующий плоский многоугольник (конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником).

В других курсах простой многоугольник (треугольник, четырехугольник и др.) трактуется с самого начала как часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной [12].

Если перечень вопросов курса, их объем предопределены программой, то структура материала внутри каждой темы, последовательность изучаемых вопросов обычно характерны для каждого отдельного учебника.

Так, пробные учебники геометрии А. Д. Александрова и др. [12] и Л. С. Атанасяна и др. [30] отличает широкое использование практического опыта учащихся, различные приложения изучаемой теории.

Кроме того, нельзя не сказать о роли наглядности при изучении многоугольников. Наличие в учебнике большого числа рисунков ни в коем случае не ограничивает творчество учителя. В то же время это дает возможность ученику, вынужденному в силу сложившихся обстоятельств самостоятельно изучать тот или иной раздел, следить на хорошем иллюстративном материале за логикой рассуждений, «увидеть» идею и путь доказательства.

Традиционно многоугольники классифицируются по числу углов: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и т. д.

Треугольник — самый «экономный» вид многоугольника. Для его задания достаточно указать его вершины — три точки, не лежащие на одной прямой, или три попарно пересекающиеся прямые.

Классифицируют треугольники также по степени их симметричности или по числу равных сторон.

Треугольник	Количество осей симметрии	Количество пар равных сторон
Равносторонний	3	3
Равнобедренный	1	1
Разносторонний	Нет	Нет

В школе принята также классификация треугольников по углам: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные.

Изучение треугольников в соответствии с программой распределено практически по всем классам неполной средней школы. Курс VI класса — это, по существу, геометрия треугольника.

Треугольник — одна из основных «рабочих» фигур изучаемого в школе курса планиметрии. Установление цепочек равных треугольников — широко используемый прием доказательства различных геометрических утверждений.

На изучение признаков равенства треугольников отводится 12 ч (один из них резервный). Главная цель изучения этого материала — добиться активного владения им, обратив особое внимание на отработку навыков использования признаков равенства треугольников в решении задач.

Равенство треугольников традиционно изучается в курсе планиметрии. Однако трактовка этого понятия, методика введения разные для различных учебников. Так, в учебниках [101] и [30] равные треугольники — частный случай равных фигур, т. е. фигур, которые можно совместить наложением. Такие понятия, как «совмещение» и «наложение», считаются интуитивно понятными учащимся и в курсе не определяются.

Иной подход реализован в пробном учебнике А. Д. Александрова и др. [12]. Здесь равными называются треугольники, у которых соответственные стороны равны. Такая «экономия» определяющих равные треугольники свойств ведет к сокращению числа признаков равенства треугольников. С другой стороны, такой подход не позволяет ввести общее понятие равных многоугольников.

В соответствии с определением, данным в учебнике А. В. Погорелова, в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеем шесть пар соответственно равных элементов: $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ (рис. 125). Внимание к записи равенства треугольников (буквы, обозначающие соответственные вершины, должны занимать одинаковые позиции в обозначении треугольников) позволяет: 1) имея запись равенства треугольников, например $\triangle ABC=\triangle PQR$, почти автоматически делать вывод о равенстве соответственных сторон и углов, т. е. по определению будем иметь: $AB=PQ$, $BC=QR$, $AC=PR$, $\angle A=\angle P$, $\angle B=\angle Q$,

$\angle C = \angle R$; 2) существенно опираться на запись равенства треугольников при доказательстве равенства углов при основании в равнобедренном треугольнике и теоремы, обратной ей. Учителю необходимо следить за правильностью буквенной записи равенства треугольников.

Характерным для учебного пособия А. В. Погорелова [134] является и наличие в нем аксиомы существования треугольника, равного данному (которая, по существу, является эквивалентом аксиомы подвижности плоскости). Остается сожалеть, что ясная формулировка этой аксиомы в последних изданиях представлена в редакции, которая никак не раскрывает смысл аксиомы и соответственно затрудняет ее использование в доказательстве теорем (например, признаков равенства треугольников).

Необходимо отметить, что А. В. Погорелов использует (в целях логического развития учащихся) сильный прием: доказательство эквивалентности двух различных определений равных треугольников — вышеуказанного и как фигур, совмещаемых движением. Этот вопрос можно обсудить на занятии кружка, в индивидуальной работе с сильными учащимися.

Важным на начальном этапе рассмотрения равных треугольников является отработка понятий «сторона, противолежащая углу», «угол, заключенный между сторонами».

Программа диктует необходимость уже с самого начала изучения систематического курса планиметрии проводить работу по логическому развитию учащихся, по формированию и развитию таких понятий, как «свойство» и «признак».

После введения определения равных треугольников обычно рассматривается их свойство: «В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы и против равных углов лежат равные стороны». Из такой формулировки ученику непонятно, что же здесь дано, а что требуется доказать. Поэтому наряду с ней желательно формулировку теоремы дать на языке «если — то»: «Если треугольники равны, то...». Ученику видно, что даны равные треугольники,

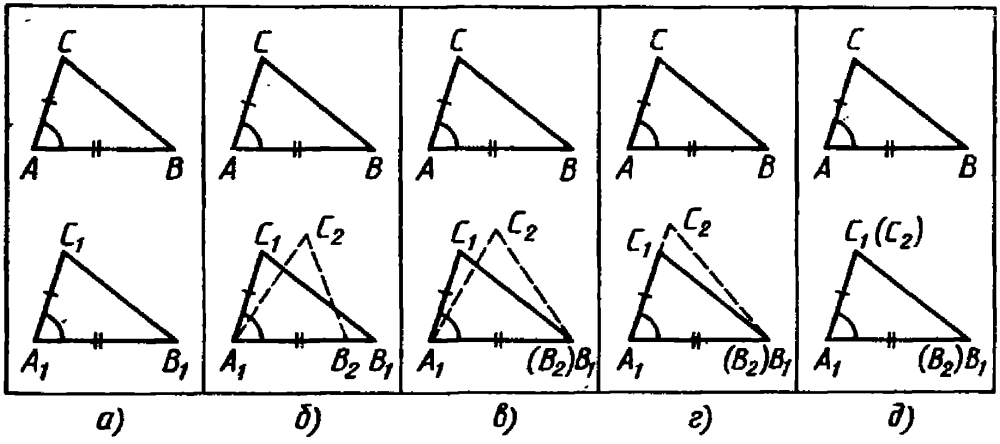


Рис. 125

а учителю легче пояснить, что в таком случае речь идет о свойстве равных треугольников. Когда заключение в формулировке теоремы будет «..., то такие треугольники равны», то речь идет о признаке равных треугольников.

Основная идея доказательства I и II признаков равенства треугольников в пробном учебнике Л. С. Атанасяна и др. [30] состоит в последовательном осуществлении наложения одного из данных треугольников на другой и доказательства совмещения их при таком наложении. В доказательстве III признака существенно используется свойство углов при основании равнобедренного треугольника.

Доказательство первых двух признаков равенства треугольников в учебном пособии А. В. Погорелова [134] и пробном учебнике А. Д. Александрова и др. [12] сводится к доказательству совпадения некоторого третьего треугольника, равного первому и определенным образом расположенного относительно второго, с этим вторым данным треугольником. При доказательстве первых двух признаков равенства можно использовать серию рисунков (кодопозитивов), отражающих динамику доказательства, отдельные его этапы. Так, при рассмотрении первого признака полезно использовать серию рисунков.

Эффективно с точки зрения воспитания учащихся проведение практических работ перед рассмотрением каждого из признаков равенства треугольников. В процессе проводимых построений, измерений учащиеся лучше усваивают взаимосвязи данных элементов, правильно формулируют необходимый вывод. Задача учителя как раз и состоит в раскрытии взаимосвязей науки и практики.

При использовании признаков равенства треугольников: 1) указывается пара треугольников, относительно которых выдвигается гипотеза об их равенстве; 2) в рассматриваемых треугольниках выделяются пары соответственно равных элементов; 3) на основании одного из признаков делается вывод о равенстве рассматриваемых треугольников; 4) делают вывод о равенстве каких-либо из соответственных элементов.

При обучении решению задач на применение признаков равенства треугольников целесообразно использование готовых чертежей, на которых отмечены равные элементы. Учащимся легче увидеть или подметить возможность применения того или иного признака равенства треугольников, когда эти треугольники изолированы один от другого. Затем можно перейти к треугольникам, имеющим общую вершину, общую сторону (или часть стороны), другие общие элементы. Иногда в слабом классе полезно использовать вспомогательный чертеж, на котором рассматриваемые треугольники изображены изолированно один от другого. Прибегать к такому приему следует осторожно, так как наряду с положительным наблюдается и отрицательное действие: один и тот же элемент, входящий в различные рассматриваемые треугольники, воспринимается учащимися как два различных, равенство которых следует обосновать. Весьма эффективно в случае затруднений использование накладывающихся кодопозитивов.

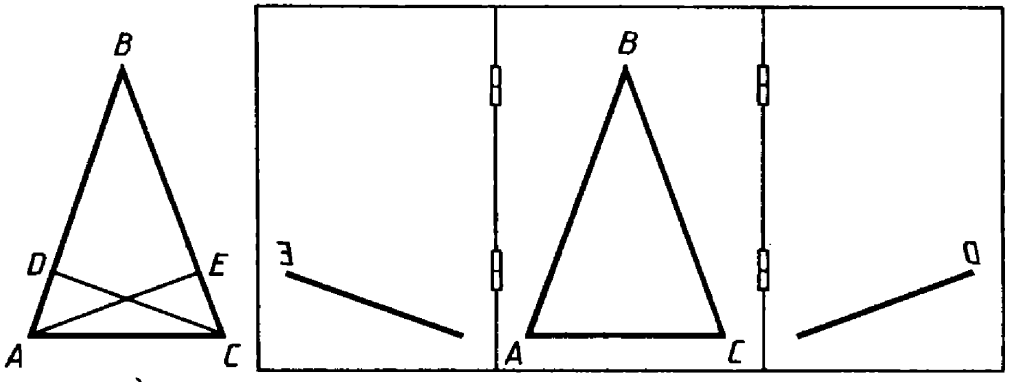


Рис. 126

Рассмотрим, например, следующую задачу (рис. 126):

На боковых сторонах BA и BC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC от вершины B отложены равные отрезки BD и BE (точка D лежит на стороне BA, точка E — на стороне BC). Доказать, что треугольник ABE равен треугольнику CBD.

Хорошо успевающий ученик увидит рассматриваемые треугольники на рисунке 126 *а*. Слабому же ученику необходима подсказка. С этой целью можно на рисунке выделить рассматриваемые треугольники линиями разного цвета. Удобно использовать комплект из трех кодопозитивов (рис. 126 *б*). Накладывая попеременно то один, то другой боковой кадр на средний, учитель помогает слабым ученикам увидеть отдельно каждый из рассматриваемых треугольников.

Творческие работы учащихся по теме «Равные треугольники» могут быть оформлены по-разному. Например, сложив альбомный лист вдвое, ученики пишут на лицевой стороне название темы. Здесь же они могут поместить различные рисунки к устным упражнениям на равенство треугольников. На развороте слева пишут определение равных треугольников с соответствующим рисунком и записями. Второй раздел озаглавлен «Свойства равных треугольников», третий — «Признаки равенства треугольников». В каждый из этих разделов может быть внесена формулировка не только изучаемых в курсе теорем, но и тех свойств или признаков, которые ученики обнаружили в ходе решения задач.

Конкретизацией изученных признаков равенства произвольных треугольников служат признаки равенства прямоугольных треугольников.

Одним из центральных вопросов в курсе планиметрии VIII класса выступает теорема Пифагора, о которой хорошо рассказано в пробном учебнике А. Д. Александрова и др. [12]. Эта теорема дает учителю широкие возможности для развития познавательного интереса учащихся. Предлагая рисунки, иллюстрирующие различные способы доказательства теоремы, учитель побуждает учеников к самостоятельному доказательству ее, к поискам новых способов. Рассмотрение обобщения теоремы Пифагора, обратной ей теоремы, очень

много дает в логическом развитии учащихся. Рассказ учителя о происхождении теоремы, о возможностях применения ее на практике формирует правильные представления о месте и роли науки в деле познания и преобразования реальной действительности. Переход от геометрической фигуры к числовому соотношению и обратно также способствует формированию диалектического мировоззрения. Теорема Пифагора позволяет широко применять в обучении геометрии метод координат и другие аналитические методы. Тесно связано с этой теоремой рассмотрение тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника.

Очень важным в раскрытии геометрии треугольника является вопрос о подобии треугольников как конкретизации общего понятия подобных фигур. Этот материал важен с точки зрения формирования представлений о форме фигуры. Утверждение «Фигуры A и B подобны» означает, что фигуры A и B имеют одинаковую форму. Широкое применение подобия на практике позволяет на содержательном материале осуществить один из основных принципов обучения — связь его с реальной жизнью, с производством.

В процессе решения различных задач на треугольники, как и при рассмотрении других вопросов курсов алгебры и геометрии, целесообразно применять калькуляторы.

Четырехугольники — традиционный для курса планиметрии материал. Как и треугольник, четырехугольник трактуется в одних учебниках как простая замкнутая четырехзвенная ломаная, в других — как часть плоскости, ограниченная такой ломаной. Из всевозможных четырехугольников выделяются выпуклые. Во всех действующих в настоящее время пособиях осуществляется одинаковый подход во введении частных видов параллелограммов: прямоугольников и ромбов. Квадрат в одних учебниках вводится как четырехугольник, который одновременно является прямоугольником и ромбом [12]. В других квадрат определяется как частный вид прямоугольника. Трапеция рассматривается после параллелограммов (и их частных видов).

При установлении различных свойств и признаков параллелограмма широко используются свойства и признаки равных треугольников, свойства углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, признаки параллельности прямых. Материал о параллелограммах и их частных видах очень удобен для формирования и развития логического мышления учащихся. Именно здесь учитель имеет широкие возможности по работе с определениями: предложить, например, ученику дать определение прямоугольника через понятие четырехугольника, параллелограмма, и т. д. Учащимся по силам самим установить, а затем и доказать различные свойства и признаки параллелограммов и трапеций. В творческих работах на темы «Параллелограмм», «Прямоугольник» и т. д. отдельные учащиеся помещают 4—6 различных признаков рассматриваемого вида четырехугольников.

В настоящее время широкое распространение получают уроки общения, общественные смотры знаний и др. При этом учебный

процесс активизируется, ученики осваивают новые приемы учебной работы, их знания по определенному разделу систематизируются, обобщаются. Воспитывается чувство коллективизма, ответственности за товарища, умение заметить хорошее и найти недостатки в ответе другого ученика.

Успешно проходят в школах общественные смотры знаний по теме «Четырехугольники». За две, две с половиной недели до его проведения учащимся сообщается перечень вопросов по теме (можно взять их из раздела«Вопросы для повторения» учебника), список задач (все задачи по теме из раздела «Обязательные результаты обучения»). Учитель называет консультантов (человек 8—10, обычно это лучшие ученики класса) и их группы (3—4 человека). Учитель на уроке (или после уроков) опрашивает консультантов по всем вопросам темы. Консультанты готовят членов своей группы к общественному смотру знаний (спрашивают по вопросам, контролируют решение в отдельных тетрадях предложенных задач по теме). Общественный смотр знаний проходит на уроке геометрии. Класс подготовлен к его проведению: на стенах развешены готовые чертежи к каждой из предложенных задач (иногда один и тот же чертеж к нескольким задачам); в классе имеются часы (каждый из консультантов знает, сколько человек он должен опросить и сколько времени он может затратить на опрос); столы, за которыми сидят консультанты, поставлены отдельно. У каждого консультанта на столе имеются: опросный лист (в который он записывает фамилию отвечающего) с 11 колонками для оценок (5 колонок для оценок за ответ на каждый из пяти вопросов по теории, 5 — для оценок за решение каждой из пяти задач, 1 — для итоговой оценки), стопочки карточек разного цвета (например, на карточках красного цвета выписаны задачи на параллелограмм, на карточках зеленого цвета — на прямоугольник и т. д.) и список теоретических вопросов. Учитель объявляет начало общественного смотра знаний и назначает, кто к кому пойдет отвечать. Отвечающий должен иметь при себе творческую работу по теме «Четырехугольники» и тетрадь с решением всех задач по теме. Учитель руководит работой остальных учеников. Они могут выполнять контрольную работу по теме из «Дидактических материалов». Отвечающий вытаскивает 5 разноцветных карточек с задачами. Консультант задает последовательно 5 вопросов по теории и оценивает каждый ответ. После этого отвечающий берет одну из задач, находит соответствующий чертеж и по нему объясняет решение задачи. Каждое решение оценивается спрашивающим. Когда опрос ученика закончен, его место занимает другой ученик и т. д.

В конце урока каждый из консультантов комментирует ответ тех, кого он опрашивал. Общий итог подводит учитель.

Свойства и признаки четырехугольников разных видов находят широкое применение при изучении многогранников и тел вращения. Свойство площадей подобных многоугольников применяется при рассмотрении сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

§ 47. Особенности методики изложения темы «Многогранники»

Тема «Многогранники» является одной из центральных в курсе стереометрии средней школы. В процессе ее изучения синтезируются знания учащихся о многоугольниках из курса планиметрии, а также знания о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве из курса стереометрии IX класса. Это, естественно, требует от учителя особой организации повторения как соответствующих вопросов курса планиметрии, так и изученных ранее разделов стереометрии.

В процессе изучения многогранников продолжается работа по дальнейшему развитию пространственных представлений и пространственного воображения учащихся.

Широкие возможности для развития пространственных представлений открываются при использовании различных наглядных пособий, ТСО (технических средств обучения). Легко организовать работу по изготовлению наглядных пособий силами учащихся. Эта работа потребует от них и определенных знаний, и достаточно развитого пространственного воображения. Работа по изготовлению самодельных учебных наглядных пособий проводится под руководством учителя в классе, во внеурочное время, в кружках и школьных производственных мастерских. Помимо положительного влияния на усвоение курса математики, такая работа содействует развитию творческих способностей учащихся, расширяет их кругозор, содействует повышению эффективности урока. Иное дело, когда учитель злоупотребляет демонстрацией наглядных пособий. Этим он избавляет учеников от необходимости напрягать, упражнять воображение и в результате мешает его развитию.

Во многих школах используются выпускаемые промышленностью наборы многогранников, сделанные из дерева, каркасные модели. Они несут разные дидактические функции. Все они будут полезны на уроках геометрии. Набор деревянных тел демонстративен, дает необходимое представление о форме. Они могут служить объектами для измерения и определения площадей поверхностей и объемов. Тела из стекла прозрачны и позволяют видеть элементы фигур, сечения тела, которые показываются либо стеклянными вкладышами, либо с помощью натянутых нитей. Эти модели могут демонстрироваться целому классу. С ними полезно поработать и отдельному ученику, пропустившему урок или занятому решением задачи. Каркасные модели незаменимы для изучения элементов многогранников, анализа построения сечения. С помощью резиновых шнуров и плоскостей-вкладышей на каркасных моделях можно иллюстрировать конструкции к доказательству некоторых теорем и к решению задач. Полезно иметь в кабинете и разбирающиеся наборы геометрических тел, сделанные из картона или плотной бумаги. Учащиеся могут самостоятельно изготовить развертки многогранников. Достаточная прочность фигуры в сборке может быть достигнута даже без использования клея (рис. 127). При необходимости модель можно быстро разобрать.

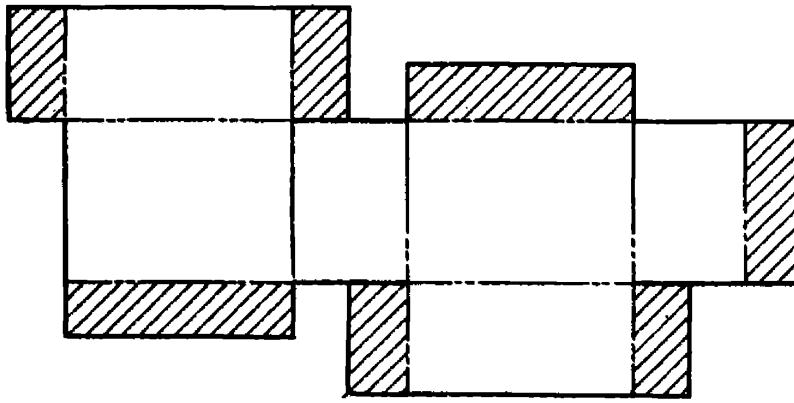


Рис. 127

Можно использовать простой способ изготовления объемных моделей, которыми удобно пользоваться при решении различных стереометрических задач в классе и дома.

Задача 1. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Определить высоту пирамиды, если одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а три других равны соответственно a, b и c.

На листе картона учащиеся чертят прямоугольник $ABCD$ и треугольник ADS (рис. 128 *а*). Лист перегибают по прямой DA. Точки S и C, S и B соединяют цветной нитью или шнуром так, чтобы при взаимной перпендикулярности граней $ADCB$ и DSA они были туго натянуты. Они закрепляются узлами с обратной стороны картона. Получаем пирамиду, о которой говорится в задаче (рис. 128 *б*).

Такую модель легко хранить. Более того, пользуясь такими конструкциями, школьники быстрее понимают приемы изображения пространственных фигур на плоскости.

Важными при изучении многогранников являются задачи на построение их сечений, установление формы этих сечений, установление и обоснование взаимного расположения элементов пространственной фигуры, построение линейных углов данных двугранных углов, углов, образованных прямой с плоскостью. Для формирования прочных

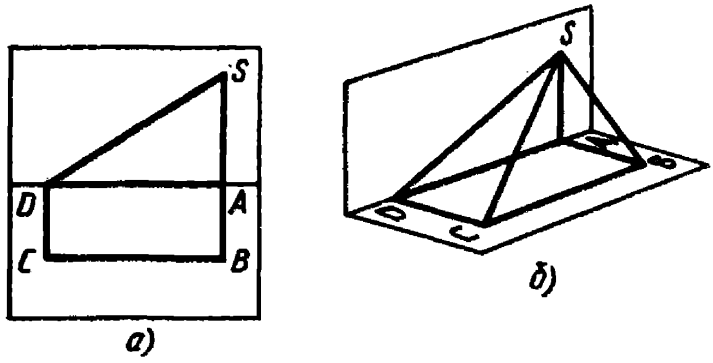


Рис. 128

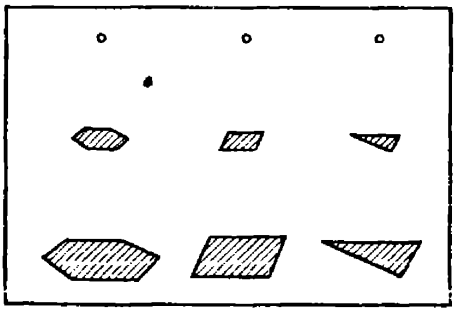


Рис. 129

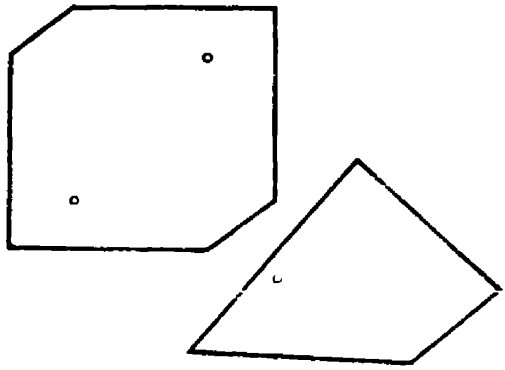


Рис. 130

навыков их решения приходится одну и ту же задачу в различных комбинациях и вариантах текста решать по нескольку раз. Решение этих задач и проверка их усвоения связаны с большей затратой времени, главным образом из-за подготовительной работы. На тщательное выполнение чертежа призмы или пирамиды учащийся затрачивает около 5 мин. Это непроизводительная затрата времени. Главной частью решения задачи является построение самого сечения. Поэтому иногда, желая сэкономить время, учителя допускают неточное и небрежное выполнение чертежа основной фигуры, концентрируя все внимание на построении сечения. Это ухудшает качество учебной работы и в конечном счете не дает возможности проверить качество знаний учащихся. А ведь именно в классе должна проводиться основная учебная работа. С целью уменьшения нерационально затрачиваемого времени, повышения качества изображения можно рекомендовать следующее учебное пособие. На листах линолеума 60×60 см масляной или другой несмывающейся краской наносятся изображения куба, прямоугольного параллелепипеда, правильных треугольной и четырехугольной пирамид, правильной треугольной призмы и др. Вместо линолеума можно использовать переносные доски того же размера, но чертежи на них лучше процарапать любым острым инструментом. Прорези забьются мелом, и чертежи будут хорошо видны и долговечны. На этих чертежах учащиеся выполняют необходимые построения. Применять эти способы следует лишь в тех случаях, когда построение изображения многогранников носит вспомогательный характер.

В целях экономии времени, для достижения аккуратного и удобного изображения многогранников в ученической тетради можно использовать шаблоны. В школьных мастерских из тонкого листа металла или пластмассы можно сделать трафарет (рис. 129) или шаблоны (рис. 130), которые более просты в изготовлении.

На первых порах при изучении многогранников учащиеся еще не умеют читать готовые чертежи, они не способны посредством рассмотрения готовой графической модели получить верное представление об изображенной фигуре. В этом случае целесообразно воспользоваться серией кодопозитивов, иллюстрирующих динамику построения.

З а д а ч а 2. Дан тетраэдр $ABCD$. Построить сечение тетраэдра плоскостью, параллельной грани ACD и проходящей через точку M ребра DB.

При решении задачи серия кодопозитивов (рис. 131) поможет учащимся лучше понять и усвоить этапы построения сечения. Количество накладных кадров может быть различным. Для того чтобы изображения на нескольких пленках точно совпадали, все пленки скрепляются липкой лентой.

Вначале проводится анализ задачи. Наложением кадра 2 на кадр 1 учащимся демонстрируется плоскость сечения, проходящая через данную точку M. После этого можно предложить им найти наиболее удобный способ задания этой плоскости. После того как учащиеся предложат задать ее двумя прямыми, пересекающимися в точке M, на кадры 1 и 2 накладывается кадр 3. Ученики должны будут обосновать параллельность прямых a и AD. Затем после наложения кадра 4 обосновывают параллельность прямых b и CD. Учащиеся могут не записывать проведенный анализ. Эта же серия кодопозитивов используется для того, чтобы показать все этапы построения сечения. Но теперь кадры накладываются в другой последовательности. На кадр 1 накладывается кадр 3.

Учащиеся записывают первый шаг построения: 1) MP, $MP \parallel DA$. После наложения кадра 4 — запись: 2) MN, $MN \parallel CD$. Последним накладывается кадр 5: 3) $\triangle MNP$ — искомое сечение.

Применение накладных кодопозитивов дает возможность учителю в любой момент воспроизвести нужный этап решения задачи.

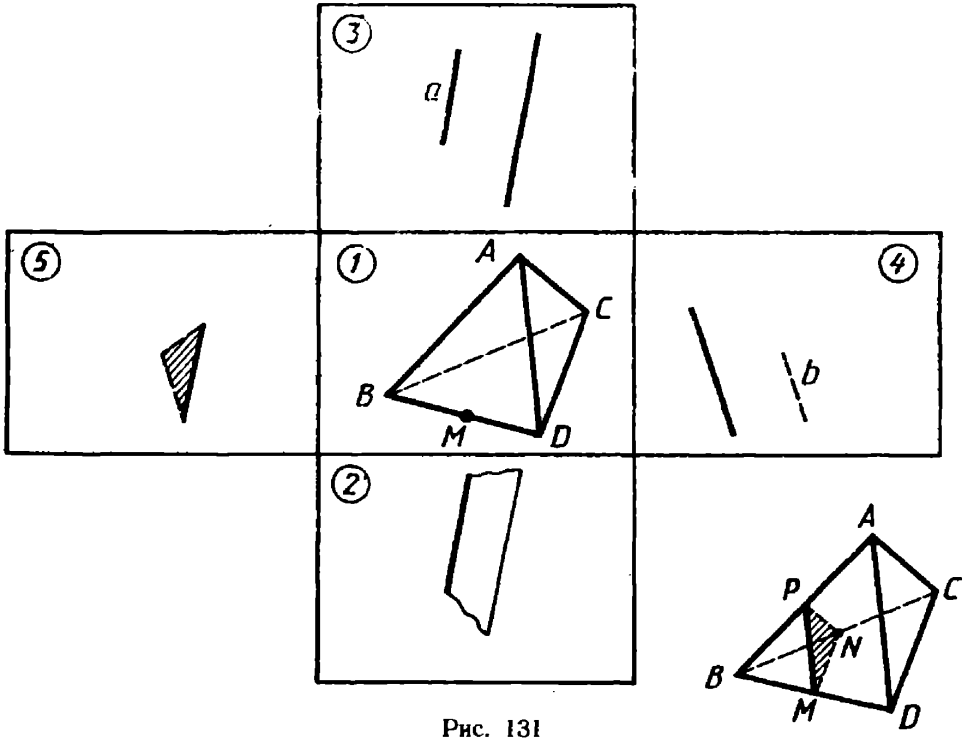


Рис. 131

Для организации самостоятельной работы учащихся весьма эффективно использование комплектов лабораторных пособий с чертежами многогранников. Эти пособия могут изготовить сами учащиеся, используя прозрачные папки для бумаг. На альбомных листах или чертежных форматках учащиеся изображают многогранники без обозначений. При решении задачи нужный чертеж вкладывается в папку. Построения, надписи учащиеся делают на поверхности папки мягким карандашом. Пособие можно использовать многократно. Надписи, линии легко убираются ластиком или влажной тряпочкой. Учитель легко может проверить правильность выполнения задания.

Учитель может широко использовать диафильмы, диапозитивы серии «Многогранники». При проведении такой работы не требуется выполнение чертежей в тетрадях. Вместе с тем правильно выполненный чертеж находится в поле зрения учащихся. Можно, например, спроектировать кадр на доску и предложить: а) заштриховать невидимые грани; б) построить сечение многогранника плоскостью и т. п.

Если окажется, что сечение построено неверно, легко убрать меловые линии, а изображение многогранника, создаваемое диапроектором, останется.

Важная особенность отдельных диапозитивов серии «Многогранники», кстати мало используемая, делающая их ценным средством,— возможность их показа в различных положениях. Предназначенный для этой цели диапозитив не должен иметь надписей. Например, учащиеся, как правило, видят в учебнике и на доске изображения призм, у которых основания расположены в горизонтальных плоскостях, причем видимыми у них являются верхние основания. Все это приводит к тому, что если диапозитив, создающий на экране именно такое «привычное» изображение призмы, повернуть на 90°, 180° (рис. 132), то учащиеся воспринимают это новое изображение как «неправильное» в отношении показа видимых и невидимых ребер.

Дальнейшее развитие получает при изучении многогранников логическое мышление учащихся. Материал учебника, различных пособий предоставляет учителю богатые возможности в этом направлении: здесь вводится много новых понятий, определений, до-

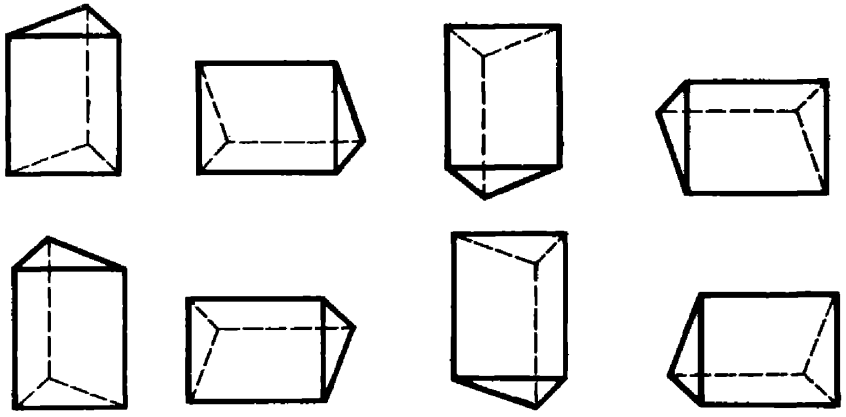


Рис. 132

казываются теоремы, при этом возможно эффективное применение различных методов (координатный, векторный и др.). Как отмечалось выше, выполнение задач на построение или задач, включающих построение как промежуточный элемент, требует логического обоснования, умелой записи. При работе над определением, теоремой нельзя ограничиться воспроизведением текста учебника, надо так организовать работу на уроке, чтобы учащиеся поняли необходимость каждого из свойств, фигурирующих в определении понятия, умели распознать понятие по его определению, умели выделить условие и заключение теоремы. Несомненную пользу принесет переформулировка изучаемых свойств многогранников в терминах «если — то», «необходимо», «достаточно», выявление условий применимости каждой из теорем. В случае затруднения при доказательстве теорем необходимо побуждать их к установлению логики в рассуждениях, к пониманию и умению аргументировать высказанные утверждения. При такой организации работы ученики легко запоминают хорошо осознанные ими факты, умеют применять их при решении различных задач и упражнений.

Задачный материал по теме «Многогранники» дает возможность применения различных методов. Одна и та же задача может быть решена по-разному. Целенаправленная работа учителя по решению «опорных» задач (задач, часто встречающихся и являющихся элементами других задач по теме «Многогранники»), по обучению умению применять различные методы при их решении, по отбору задач для демонстрации эффективности того или иного метода решения приносит ощутимые результаты. Применяя изученные понятия и свойства при выполнении упражнений учащиеся углубляют свои знания, конкретизируют и обобщают их, у них формируются общие методы и приемы решений задач.

В процессе преподавания раздела о многогранниках необходимо использовать аналогию с соответствующими вопросами курса планиметрии, однако пользоваться ею надо осторожно, ибо она не всегда может приводить к правдоподобным выводам.

При изучении многогранников, так же как и при изучении других разделов курса стереометрии, должно осуществляться разумное сочетание интуиции учащихся и логики. Педагогически нецелесообразно стремиться строго определять те понятия, о которых учащиеся имеют достаточно четкое и правильное представление из собственного жизненного опыта, а формулировки определений которых являются слишком громоздкими.

При планировании темы «Многогранники» следует предварительно ее разбить на логически законченные части: это поможет учителю правильно организовать повторение, проводить систематически учет и контроль знаний учащихся, своевременно и постепенно готовить средства наглядности, сгруппировать умения и навыки в соответствии с указаниями программы, заблаговременно подобрать соответствующие задачи и упорядочить их, подготовить тематику и содержание самостоятельных и контрольных работ, а также другие дидактические материалы. Тему можно разделить на следующие части:

1. Определение многогранника. Элементы многогранника. Выпуклые многогранники.
2. Призмы. Параллелепипеды.
3. Пирамиды.
4. Правильные многогранники.
5. Объемы многогранников.

В итоге изучения разделов 2, 3 и 5 провести контрольные работы. Самостоятельные работы и отчеты по заданиям проводятся по всем разделам темы.

1. Определение многогранника. Элементы многогранника. Выпуклые многогранники. Изучение темы начинается с введения понятия многогранника. В разных учебных пособиях по геометрии для средней школы представлены различные подходы к введению этого понятия. В большинстве из них многогранник трактуется как ограниченное геометрическое тело с определенными характерными свойствами [134], [99], [13], только в пробном учебнике Л. С. Атанасяна и др. [32] многогранник рассматривается как поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело. В дальнейшем авторы все-таки добавляют, что «тело, ограниченное многогранником, часто называют также многогранником».

Если следовать строго дедуктивному пути изложения школьного курса стереометрии, надо определить такие понятия, как «геометрическое тело», «ограниченность тела», которые лежат в основе определения многогранника. Однако на любом этапе обучения в средней школе следует руководствоваться принципом педагогической целесообразности при введении понятия. В данном случае как понятие геометрического тела, так и понятие ограниченности тела педагогически целесообразно считать интуитивно ясными для учащихся из их опыта и не давать им формально-логических определений, которые окажутся недоступными.

Все вышеназванные подходы к введению понятия многогранника вполне приемлемы для средней школы. Выбор конкретного направления, безусловно, зависит и от того, какое определение давалось многоугольнику в планиметрии — как «части плоскости», как «плоской замкнутой ломаной линии». Об этом весьма четко говорится в «Математической энциклопедии» (М.: Сов. энциклопедия, 1982.— Т. 3.— С. 708—711): «Определение многогранника получает различный смысл в зависимости от того, как определить многоугольник».

Многоугольник — основной элемент поверхности многогранника. Изучение многоугольников продолжается фактически на всем протяжении обучения математике в средней школе.

В пробном учебнике А. Д. Александрова и др. [13] к понятию многоугольника возвращаются в курсе стереометрии. Здесь вводится обобщенное понятие многоугольника как ограниченной замкнутой области, граница которой состоит из конечного числа отрезков. В связи с этим ранее рассматриваемые многоугольники (ограниченные одной замкнутой ломаной) получают название «простые».

В связи с принятым толкованием многоугольника многогранник может рассматриваться как «каркас» или как «поверхность».

Существует третья точка зрения на многогранник как на геометрическое тело. Эта точка зрения является наиболее распространенной в средней школе.

Для введения понятия многогранника учащимся понадобятся знания из курса планиметрии, которые необходимо повторить, а именно: понятие многоугольника, элементы многоугольника, выпуклые многоугольники.

Перед определением понятия многогранника следует продемонстрировать учащимся модели различных многогранников — призм, пирамид, правильных многогранников, провести анализ определения и продемонстрировать на моделях отдельные его части; только после этого дать определение многогранника (произвести синтез — соединение отдельных частей определения в единое целое). Затем привести примеры многогранников из окружающей жизни — из классной обстановки, строительной техники и т. д. Уместно в связи с этим рассказать о вкладе русских ученых М. В. Ломоносова, Е. С. Федорова и других в дело создания и развития кристаллографии.

Весьма важным этапом изучения этого раздела является формирование понятия выпуклого многогранника. Наряду с выпуклыми многогранниками учащиеся должны наблюдать и модели невыпуклых многогранников, только в результате такого сравнения можно выработать правильное представление о выпуклых многогранниках. Здесь полезно использовать аналогию с выпуклыми многоугольниками на плоскости.

Выпуклый многоугольник	**Выпуклый многогранник**
а) Если он лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону.	а) Если он лежит по одну сторону от каждой из ограничивающих его плоскостей.
б) Если каждые две его точки могут быть соединены в нем отрезком.	б) Если каждые две его точки могут быть соединены в нем отрезком.

Оба определения приемлемы в школе, однако первое из них теснее связано с жизненным опытом учащихся, дает наглядное представление о выпуклом многограннике, а поэтому предпочтительнее его дать учащимся при первом знакомстве с выпуклыми многогранниками.

В большинстве школьных учебников элементы: грань, ребра, вершины — вводятся для любого многогранника. Это влечет многие трудности логического и методического характера. Следует отметить удачное решение вопроса А. В. Погореловым: он вводит понятие грани, ребра и вершины только для выпуклого многогранника.

Неудачным надо признать введение граней многогранника как многоугольников, составляющих его поверхность [69], или как многоугольников, полученных пересечением плоскостей, ограничивающих «со всех сторон» многогранник [99]. Следуя первому

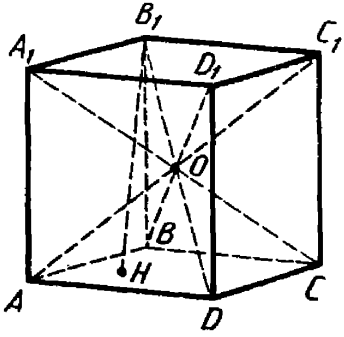


Рис. 133

подходу, гранями куба могут быть не только квадраты, но и треугольники, если, например, провести в одной или нескольких гранях диагональ, прямоугольник и т. д. Во втором определении заключена неопределенность. Рассмотрим, например, усеченную четырехугольную пирамиду. В пересечении, как его понимает А. П. Киселев, ограничивающих рассматриваемую пирамиду плоскостей получаются и треугольники. Однако таких граней в усеченной четырехугольной пирамиде нет.

Элементы многогранника желательно проиллюстрировать на одной из известных учащимся фигур, например на призме, сделать соответствующий рисунок (рис. 133) на доске и в тетрадях и произвести запись.

Элементы многогранника

1. $ABCD$, AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, DD_1A_1A, $A_1B_1C_1D_1$ — грани многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 133).

2. AB, BC, CD, DA, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, A_1B_1, C_1B_1, C_1D_1, A_1D_1 — ребра многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

3. A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 — вершины многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

4. AC_1, CA_1, BD_1, DB_1 — диагонали многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

5. B_1H — высота многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Рассмотрение различных случаев взаимного расположения диагоналей, ребер и граней многогранника, использование для этого моделей и готовых чертежей способствуют развитию пространственных представлений учащихся, их интуиции.

Для закрепления изученного о многогранниках можно поставить ряд задач на моделях.

Задачи по этому разделу темы может составить сам учитель, используя для этой цели многогранники, с которыми учащиеся будут знакомиться на последующих уроках. Необходимое предварительное ознакомление учащихся с ними дается коротко в описательном плане.

Следует отметить, что в школьном курсе геометрии изучаются только простейшие выпуклые многогранники — выпуклые призмы и пирамиды, правильные многогранники.

С полуправильными выпуклыми многогранниками (изогонами, изоэдрами), выпуклыми многогранниками, играющими большую роль в кристаллографии (параллелоэдрами), невыпуклыми многогранниками (телами Пуансо) можно познакомить учащихся, проявляющих повышенный интерес к изучению математики, на внеклассных занятиях.

Кроме того, учащимся небезынтересно знать, что в школе изучаются многогранники, Эйлерова характеристика которых равна 2.

Такого рода многогранники получили название многогранников нулевого рода.

Эйлерова характеристика вычисляется по формуле $B-P+\Gamma=2$, где B — число вершин многогранника,

P — число ребер многогранника,

Γ — число граней многогранника.

Полезно с начала изучения темы с учащимися заполнять таблицу о каждом из многогранников, с которыми они знакомятся.

№	Наименование многогранника	B	P	Γ	Эйлерова характеристика $B-P+\Gamma$
1	Куб	8	12	6	$8-12+6=2$
2	Тетраэдр	4	6	4	$4-6+4=2$

При изучении общего понятия многогранника можно предложить учащимся задачи, способствующие развитию их пространственных представлений и пространственного воображения.

Учащиеся на опыте убедились, что у тетраэдра число вершин и число граней одинаково. Интересно выяснить, существуют ли еще такие многогранники.

Вопросы для беседы с учащимися по теме «Многогранник. Его элементы»:

1. Объясните, что такое: а) многогранник; б) поверхность многогранника.

2. Какой многогранник называют выпуклым?

3. Куб — выпуклый многогранник (проверьте). Как, имея пилу, получить из деревянного куба модель невыпуклого многогранника?

4. Дан выпуклый многогранник. Что называют: а) его гранью; б) его ребром; в) его вершиной?

5. Назовите известные вам многогранники. а) Выпуклым или невыпуклым является каждый из них? б) Сколько граней, ребер и вершин у каждого?

6. Приведите пример многогранника, все грани которого: а) треугольники (кроме тетраэдра); б) квадраты (кроме куба); в) прямоугольники (кроме прямоугольного параллелепипеда).

7. Дан квадрат. На нем как на основании по разные стороны построены куб и пирамида. Сколько вершин, ребер и граней в полученном многограннике?

8. Два тетраэдра имеют общую грань и расположены по разные стороны от нее. Сколько вершин, ребер и граней имеет полученный многогранник?

9. Сколько трехгранных, двугранных и плоских углов: а) у тетраэдра; б) у параллелепипеда?

10. Какие фигуры можно получить в сечении куба плоскостью, проходящей через: а) одно из его ребер; б) одну из его диагоналей; в) через одну из его вершин?

11. Отсечь от куба плоскостью часть его так, чтобы оставшийся многогранник имел одинаковое число вершин и граней.

12. Можно ли в сечении куба плоскостью получить: а) треугольник; б) прямоугольный треугольник; в) остроугольный треугольник; г) тупоугольный треугольник; д) правильный треугольник? Покажите на модели.

13. Можно ли в сечении куба плоскостью получить правильный: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник; д) семиугольник?

14. Дана точка M на ребре куба, через которую проходит секущая плоскость α. а) Нельзя ли получить квадрат в сечении куба плоскостью α? б) Сколькими способами можно получить квадрат в сечении куба плоскостью?

2. Призмы. Параллелепипеды. Основное внимание при изучении призм уделяется рассмотрению их частного вида — параллелепипеда.

В этой теме повторяются многие разделы курса планиметрии: треугольники, параллелограммы. Также надо повторить вопросы из курса стереометрии: параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность прямых и плоскостей в пространстве, перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве. Особое внимание при повторении надо обратить на двугранные углы, построение линейных углов для двугранных углов призм. Повторение следует тесно увязать с изучением нового материала:

а) знания о треугольнике целесообразно повторить в процессе рассмотрения треугольной призмы;

б) параллелограммы удобнее всего повторить в процессе изучения параллелепипеда;

в) повторение параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве следует рассредоточить по всей теме.

Наибольшие трудности, как показывает опыт, вызывают вопросы, связанные с построением и вычислением линейных углов для двугранных углов призмы, углов между ребрами и гранями призмы. Этим вопросам надо уделить особое внимание, составить специальные упражнения для выработки соответствующих навыков у учащихся.

Тему «Призмы» также следует разделить на части:

1. Понятие призмы. Элементы призмы.
2. Призма прямая; правильная призма.
3. Наклонная призма.
4. Параллелепипед. Свойства параллелепипеда.

При изучении параллелепипедов целесообразно провести аналогию их с параллелограммами, а учащимся самостоятельно формулировать аналогичные свойства параллелепипеда и глубже их усвоить.

Призма определяется как многогранник, обладающий определенными свойствами. В процессе работы над этим понятием необходимо показать модели различных призм, прямых и наклонных. При наблюдении подмечается то, что является общим для всех призм, и на основе этого дается определение призмы.

После этого показывается способ построения призмы, что, по сути дела, является конструктивным доказательством существования такого многогранника.

Возможен и другой путь введения понятия призмы: сначала, после рассмотрения моделей различных призм, дается способ построения призмы (конструктивное доказательство существования), а затем формулируется определение этого многогранника. Оба указанных пути имеют место в существующих учебных пособиях по стереометрии для средней школы.

Построение призмы также можно осуществлять различными способами:

а) изображают произвольный многоугольник — одно из оснований призмы;

б) из его вершин проводят параллельные между собой лучи по одну сторону от плоскости многоугольника, на которых будут отложены боковые ребра призмы;

в) на лучах от их начала откладывают равные между собой отрезки и полученные точки (концы отрезков) соединяют отрезками. Полученный многогранник — призма;

в′) на одном из лучей от его начала откладывают произвольный отрезок и из его конца проводят отрезок, параллельный соответствующей стороне основания до пересечения с соседним лучом, затем поступают так же с полученной точкой на соседнем луче и т. д. Образовавшийся многогранник — призма.

Вместе с учащимися в классе можно получить изображение пятиугольной наклонной призмы. Важно подчеркнуть, что на изображении призмы боковые ребра — равные параллельные отрезки. Учитель следит и вовремя подсказывает учащимся, что вершины многоугольника основания призмы надо располагать таким образом, чтобы никакие два боковых ребра не изображались отрезками одной прямой. В случае прямой призмы принято боковые ребра изображать вертикальными отрезками.

По рисунку, полученному в результате построения, вводятся элементы призмы.

В ходе объяснения необходимо сделать выводы об элементах n-угольной призмы:

1. n-угольная призма имеет $n+2$ граней, n боковых граней.
2. n-угольная призма имеет $3n$ ребер, n боковых ребер.
3. n-угольная призма имеет $2n$ вершин.
4. n-угольная призма имеет $n(n-3)$ диагоналей. Сколько диагоналей имеет треугольная призма?

Новым для учащихся является понятие высоты призмы, поэтому на построение высоты призмы и на определение этого понятия нужно обратить особое внимание. При первоначальном знакомстве с этим понятием необходимо продемонстрировать учащимся модель, где предусматривался бы общий случай расположения высоты. После этого целесообразно отметить и показать на моделях, что в отдельных случаях основание высоты призмы может лежать на одном из ребер основания или совпадать с боковым ребром.

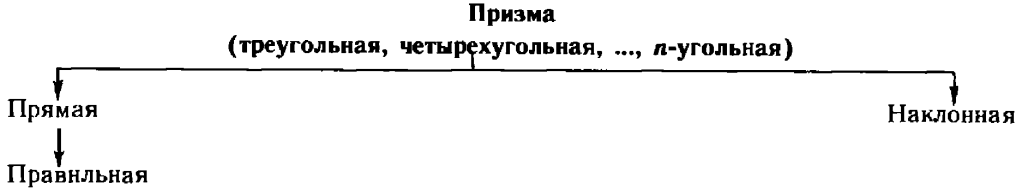
После введения понятия высоты призмы можно перейти к рассмотрению формул для вычисления площади поверхности призмы и площади боковой поверхности призмы.

$S_{\text{пов. призмы}} = 2S_{\text{осн}} + P \cdot h$, где P — периметр основания призмы и h — высота призмы.

Перед тем как перейти к решению задач на вычисление площади поверхности призмы и других геометрических величин, на построение линейных углов для двугранных углов призмы и их вычисление, на построение углов между боковыми ребрами призмы и плоскостью основания, между диагональю призмы и плоскостью основания и других задач, целесообразно ввести понятие прямой призмы и правильной призмы. Особо подчеркиваются характеристические свойства призмы.

Выводы делаются в процессе сравнительного рассмотрения моделей прямой и наклонной призм.

Как частный случай прямой призмы рассматривается правильная призма. В итоге учащимся полезно дать следующую схему:



Этот раздел богат разнообразными задачами.

Все опорные задачи целесообразно разделить на группы:

1. Задачи на построение и вычисление высоты призмы.
2. Задачи на построение и вычисление линейного угла двугранных углов призмы.
3. Задачи на построение и вычисление угла между диагональю, боковым ребром и основанием призмы.
4. Задачи на построение и вычисление угла между диагоналями призмы, между диагоналями граней призмы и др.
5. Задачи на вычисление площади поверхности призмы, площади диагональных сечений призмы.

При выводе формул для вычисления площади поверхности и площади боковой поверхности призмы учитель, демонстрируя развертку поверхности данной призмы, убеждает учащихся, что задача сводится к вычислению площади полученного многоугольника. Повторив предварительно с учащимися соответствующее основное свойство площадей (если многоугольник составлен из непересекающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей составляющих его многоугольников), учитель подводит их к искомой формуле.

Формулы для вычисления площади поверхности и площади боковой поверхности прямой призмы учащиеся получают самостоятельно, анализируя развертки поверхностей прямых треугольной, че-

тырехугольной и пятиугольной призм. Как частный случай получают формулу для вычисления площади поверхности правильной призмы.

Параллелепипед рассматривается как частный вид призмы. Способ построения параллелепипеда является конструктивным доказательством его существования.

Прежде всего надо выяснить, что учащиеся знают о параллелепипедах, ведь они знакомились в восьмилетней школе с прямоугольным параллелепипедом и его частным видом — кубом.

Параллелепипед имеет те же элементы, что и призма; площадь полной и боковой поверхности его вычисляется по аналогичным формулам, что и для призмы.

Свойства параллелепипедов аналогичны свойствам параллелограммов из курса планиметрии, а поэтому повторение целесообразно построить таким образом:

при изучении параллелепипеда общего вида повторить общие свойства параллелограмма;

при изучении прямоугольного параллелепипеда повторить свойства прямоугольника;

при изучении куба повторить свойства квадрата и ромба.

Свойства граней и диагоналей параллелепипеда сформулировать по аналогии со свойствами сторон и диагоналей параллелограмма.

Параллелограмм	**Параллелепипед**
1. Противоположные стороны параллелограмма равны.	1. Противоположные грани параллелепипеда равны.
2. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.	2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
3. Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.	3. Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

Свойства прямоугольного параллелепипеда формулируются по аналогии со свойствами прямоугольника.

Прямоугольник	**Прямоугольный параллелепипед**
1. Диагонали прямоугольника равны.	1. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.
2. Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов его неравных сторон.	2. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его трех линейных размеров.

Основное внимание следует обратить на решение задач, в которых рассматриваются параллелепипеды (прямые и наклонные), основанием которых является прямоугольник, ромб, квадрат, параллелепипед, гранями которых являются равные между собой ромбы (ромбоэдр).

Включить задачи на построение сечения параллелепипеда плоскостью и вычисление площади полученного сечения.

В хорошо успевающем классе можно рассмотреть свойства параллелепипедов, связанные с осевой и центральной симметрией в пространстве, с симметрией относительно плоскости. Задачи на параллелепипед группируются по той же схеме, что и задачи на призмы.

Вопросы для беседы с учащимися по теме «Призмы»

1. Какой многогранник называют призмой? Назовите основные элементы призмы.
2. Докажите, что число ребер призмы кратно 3.
3. Докажите, что число плоских углов при всех вершинах кратно 6.
4. Что называется высотой призмы?
5. Объясните, как построить наклонную призму, у которой высота лежит в боковой грани.
6. Что такое диагональ призмы? диагональное сечение призмы?
7. Какая призма называется прямой? наклонной?
8. Является ли призма прямой, если у нее: а) высота совпадает с одним из боковых ребер; б) одна из боковых граней — прямоугольник; в) двугранные углы между боковыми гранями и одним из оснований прямые; г) двугранный угол между одной из боковых граней и основанием прямой; д) углы одного из оснований служат линейными углами двугранных углов при боковых ребрах; е) один из углов основания служит линейным углом двугранного угла при боковом ребре, проходящем через вершину этого угла основания?
9. Сколько прямых двугранных углов может иметь прямая пятиугольная призма?
10. В каком случае призма называется правильной?
11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с ребром 1 проведено сечение через вершину A параллельно ребру B_1C_1. а) Какая фигура получается в сечении? б) Найти граничные значения площади сечения.
12. Является ли призма правильной, если у нее: а) все плоские углы равны; б) все боковые грани — квадраты; в) все ребра равны?
13. Перпендикулярное сечение наклонной треугольной призмы — правильный треугольник. Площадь одной из боковых граней равна 1. Найти площади других боковых граней.
14. Квадрат служит основанием призмы. Может ли только одна ее боковая грань быть перпендикулярна основанию?
15. В основании призмы трапеция. Две ее боковые грани перпендикулярны основанию. Может ли она быть наклонной? Изобразите ее.
16. Объясните, что такое боковая поверхность призмы, полная поверхность призмы.
17. Выведите формулу для вычисления боковой поверхности прямой призмы.

18. Вычислите площадь поверхности ромбоэдра, если острый угол ромба, являющегося его боковой гранью, равен 60° и ребро ромбоэдра равно 1.

19. Длины сторон основания прямоугольного параллелепипеда 5 и 8, а высота его равна 12. Отверстие, идущее от верхнего основания до нижнего, имеет форму правильной треугольной призмы со стороной основания 3. Вычислите площадь полной поверхности тела.

20. Каждое из ребер правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно a. Призма пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, A_1B_1 и AC. Вычислите площадь сечения.

21. Дан параллелепипед. Сколько его граней могут быть прямоугольниками?

22. Установите вид параллелепипеда, каждое из диагональных сечений которого — ромб.

3. Пирамиды. Прежде всего сообщается учащимся, что пирамида — это новый вид многогранников, к изучению которого они приступают.

Перед изучением темы ее содержание можно разделить на логически законченные части:

1^0. Определение пирамиды. Элементы пирамиды. Виды пирамиды.

2^0. Правильная пирамида, апофема правильной пирамиды.

3^0. Свойство сечений пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

4^0. Площадь поверхности пирамиды.

5^0. Усеченная пирамида.

По каждой из указанных частей подбираются задачи, способствующие формированию и развитию умений и навыков, предусмотренных программой по математике для средней школы.

Изучение пирамиды можно начать с рассмотрения способа ее построения, а потом дать определение этого многогранника.

Построение ведется по следующему плану (рис. 134):

а) на плоскости строят некоторый многоугольник (на рисунке 134 построен пятиугольник $ABCDE$);

б) вне плоскости построенного многоугольника выбирается произвольная точка M;

в) точка M соединяется отрезками с точками построенного многоугольника;

г) полученный многогранник $MABCDE$ является пирамидой.

Чтобы получить изображение пирамиды, достаточно точку M соединить с вершинами многоугольника $ABCDE$.

По рисунку подмечают, что одна из граней у пирамиды — произвольный многоугольник, а все остальные грани — треугольники с общей вершиной. После этого можно сформулировать определение пирамиды, взяв понятие многогранника за родовое понятие.

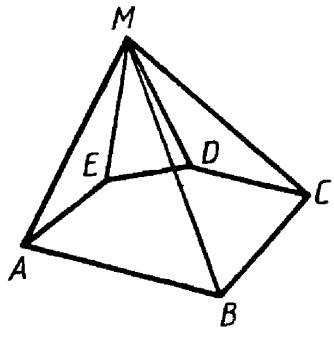


Рис. 134

В существующих учебных пособиях по геометрии для средней школы даются как формально-логические определения пирамиды [13], так и конструктивные определения [134, 32].

Только в одном из учебных пособий, а именно в учебном пособии А. В. Погорелова [134], при построении пирамиды делается оговорка, что плоский произвольный многоугольник, являющийся основанием пирамиды, выпуклый. Это значит, что знакомство учащихся с невыпуклыми пирамидами совсем исключается, хотя было бы полезным предложить учащимся построить пирамиду, выбрав в качестве произвольного многоугольника невыпуклый четырехугольник, и сравнить ее с выпуклой пирамидой.

В процессе сравнения у учащихся возникает более отчетливое представление о выпуклых пирамидах. После этого можно сообщить им, что в школе изучаются только выпуклые пирамиды.

Приведенный в учебных пособиях способ построения пирамиды следует рассматривать как конструктивное доказательство существования этого многогранника.

Классификация пирамид дается в зависимости от вида многоугольника, который является основанием пирамиды. В зависимости от этого различают треугольные пирамиды, четырехугольные пирамиды и т. д., n-угольные пирамиды. Обращается особое внимание учащихся на то, что треугольная пирамида называется тетраэдром.

Элементы пирамиды надо показать на рисунке и сделать соответствующие записи, аналогичные записям для элементов призмы. При выполнении записей о числе тех или иных элементов у конкретной пирамиды надо сделать обобщение для n-угольной пирамиды. Особо подчеркнуть, что в отличие от призм пирамиды не имеют диагоналей.

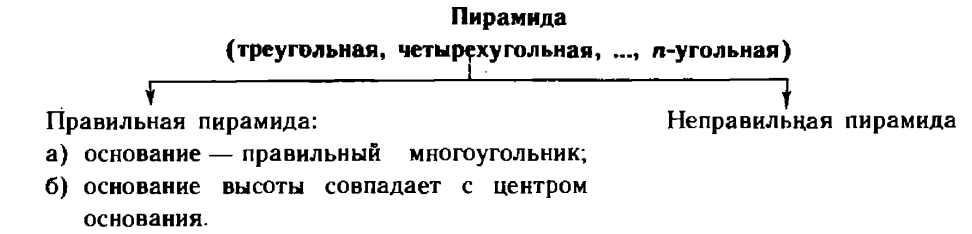
После этого из всех выпуклых пирамид выделяется правильная пирамида с помощью двух признаков:

а) основание ее является правильным многоугольником;

б) основание высоты совпадает с центром основания.

Нередко вместо признака б) используют другой, эквивалентный ему, а именно: вершина проектируется в центр основания (имеется в виду ортогональная проекция). Следует особо подчеркнуть, что понятие апофемы вводится только для правильной пирамиды.

Приведенная ниже схема дает полное представление о классификации пирамид.



Учащиеся должны усвоить алгоритм изображения правильной пирамиды:

а) строят изображение основания пирамиды;

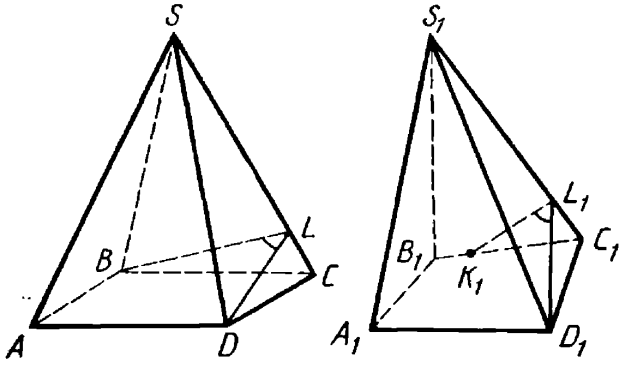


Рис. 135

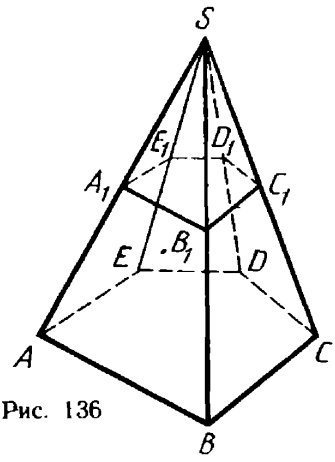


Рис. 136

б) строят изображе́ние центра основания;

в) строят изображение высоты правильной пирамиды;

г) строят изображение боковых ребер правильной пирамиды.

Как показывает практика школьного преподавания, большие трудности у учащихся вызывают задачи на построение линейных углов, двугранных углов пирамиды и вычисление величин этих углов. Учитель может сам составить серию таких задач, особо выделив в ней задачи с правильными пирамидами.

На рисунке 135 показано построение линейных углов для двугранных углов правильной и неправильной четырехугольной пирамиды.

Из всех свойств пирамиды особо выделяется свойство сечений пирамиды плоскостями, параллельными основанию.

Д а н о:

$SABCDE$ — пирамида,

$ABCDE$ — основание пирамиды,

$\beta \parallel$ пл. $ABCDE$ (рис. 136).

Д о к а з а т ь: сечение пирамиды плоскостью β подобно $ABCDE$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Сечением пирамиды $SABCDE$ плоскостью β является многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, одноименный многоугольнику $ABCDE$, так как эта плоскость пересекает все грани пирамиды, кроме основания. Для обоснования этого пункта используется теорема: «Если плоскость пересекает одну из двух параллельных между собой плоскостей, то она пересекает и другую».

2. Соответственные углы многоугольников A и A_1, B и B_1, C и C_1, D и D_1, E и E_1 попарно равны как углы с соответственно параллельными сторонами. Для обоснования этого пункта используется теорема: «Плоскость пересекает две параллельные между собой плоскости по параллельным прямым».

3. Сходственные стороны многоугольников AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, DE и D_1E_1, EA и E_1A_1 пропорциональны:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}=k.$$

4. На основании пунктов 2 и 3 имеем: $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1$.

Интересно отметить, что эта теорема справедлива и для призмы: многоугольник — основание и многоугольник – сечение в призме не только подобны, но и равны.

В процессе решения задач особо рассматриваются виды пирамид, у которых:

а) основание высоты совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды;

б) основание высоты совпадает с центром окружности, вписанной в основание пирамиды;

в) боковая грань перпендикулярна основанию;

г) боковое ребро перпендикулярно основанию.

Уместно поставить вопрос: что собой представляет пирамида, основание высоты которой совпадает с центром окружности, одновременно вписанной в основание и описанной около него?

Понятие о поверхности пирамиды и вычисление ее площади следует дать с помощью развертки пирамиды. При рассмотрении этого вопроса выводится специальная формула для вычисления площади боковой поверхности правильной пирамиды. Целесообразно эту формулу получить как результат решения специальной задачи на вычисление. Этот раздел богат задачами вычислительного характера, и цель учителя в процессе его изучения — выработать у учащихся умения и навыки вычисления площади боковой и полной поверхности различных пирамид.

Задачи на вычисление по разделу о пирамиде можно разделить на группы:

а) задачи на построение и вычисление линейных углов для двугранных углов пирамиды;

б) задачи на вычисление линейных элементов пирамиды — ребер пирамиды, высоты пирамиды, апофемы правильной пирамиды;

в) задачи на построение и вычисление угла между боковыми ребрами и основанием пирамиды;

г) задачи на вычисление площади поверхности пирамиды (боковой и полной).

Понятие об усеченной пирамиде целесообразно ввести параллельно с изучением свойств сечений пирамиды плоскостью, параллельной основанию. При рассмотрении соответствующей теоремы удобно проиллюстрировать способ получения усеченной пирамиды из любой пирамиды и отличие усеченной пирамиды от призмы.

Призма	**Усеченная пирамида**
1. Имеет два основания — параллельные друг другу грани.	1. Имеет два основания — параллельные друг другу грани.
2. Основания призмы — равные многоугольники.	2. Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.
3. Боковые грани призмы — параллелограммы.	3. Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.
4. Призма (кроме треугольной) имеет $(n-3)$ диагоналей.	4. Усеченная пирамида (кроме треугольной) имеет $(n-3)$ диагоналей.

Для правильной усеченной пирамиды вводится понятие «апофема». В этом разделе также решается много задач на вычисление площади боковой и полной поверхности усеченной пирамиды, особо выделяются задачи на вычисление площади боковой и полной поверхности **правильной** усеченной пирамиды. Задачи на усеченную пирамиду можно разбить на такие же группы, как и задачи по теме «Призма».

4. Правильные многогранники. Раздел о правильных многогранниках носит описательный характер. На его изучение целесообразно отвести отдельный урок, к которому необходимо изготовить картонные модели всех пяти видов правильных многогранников. Кроме того, желательно иметь проволочные модели правильных многогранников вместе с сопряженными им многогранниками.

Материал о правильных многогранниках существенно дополняет и логически завершает раздел. Фактически здесь продолжается классификация многогранников; из выпуклых многогранников выделяются правильные. Правильные многогранники — яркий пример геометрических фигур, имеющих центр, оси и плоскости симметрии.

Понятие правильного многогранника вводится как обобщение уже известных учащимся понятий правильной призмы и правильной пирамиды. Кроме того, в курсе планиметрии было введено понятие правильного многоугольника, изучались некоторые его свойства. Учитель строит всю работу так, чтобы новое понятие «правильный многогранник» формировалось именно на основе этих же уже сложившихся представлений учащихся.

Как правило, во всех школьных учебниках формулируется определение правильного многогранника. Однако, как показывает анализ, нет единого решения в выборе определяющих признаков. Педагогически целесообразно, чтобы определение правильного многогранника сочеталось с принятым в курсе планиметрии определением правильного многоугольника.

В большинстве школьных учебников по геометрии в качестве одного из определяющих правильный многогранник свойств выделяется следующее: все его грани — равные правильные многоугольники. В учебном пособии А. В. Погорелова [134] это свойство заменено другим: грани рассматриваемого выпуклого многогранника — правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон. Ясно, что эти свойства эквивалентны. Но первое яснее и проще и поэтому легче запоминается.

В качестве второго определяющего свойства выбирается одно из следующих:

а) в каждой вершине сходится одно и то же число ребер;

б) в каждой вершине сходится одно и то же число граней;

в) все многогранные углы равны;

г) все двугранные углы равны.

Свойства а) и б) непосредственно «срабатывают», когда мы хотим проверить, является или нет данный многогранник правильным. Свойства в) и г) дают возможность решать содержательные задачи на правильный многогранник.

Выбор той или иной формулировки должен определяться целями изучения правильных многогранников. Поскольку в настоящее время этот материал носит ознакомительный характер, то предпочтение следует отдать определениям с использованием свойств а) и б).

После введения определения правильного многогранника учитель на моделях показывает его элементы.

Учащимся без доказательства сообщается, что существует только пять видов правильных многогранников.

Доказательство этой теоремы входит в содержание соответствующего факультативного курса.

В основе доказательства лежат два утверждения:

1. В правильном n-угольнике градусная мера угла α_n вычисляется по формуле $\alpha_n=\frac{n-2}{n}\cdot 180°$.

2. Сумма градусных мер плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Имеем $\alpha_3=60°$, $\alpha_4=90°$, $\alpha_5=108°$, $\alpha_6=120°$ и т. д.

Многогранный угол может состоять, самое меньшее, из трех плоских углов. Несложная проверка:

$$\alpha_3\cdot 3<360°,\ \alpha_4\cdot 3<360°,\ \alpha_5\cdot 3<360°,\ \alpha_6\cdot 3\not<360°-$$

позволяет сделать вывод, что гранями трехгранных углов правильного многогранника могут быть правильный треугольник, правильный четырехугольник и правильный пятиугольник. Получаем соответственно правильный тетраэдр, куб и додекаэдр.

Аналогично для четырехгранного угла правильного многогранника получаем, что он может быть составлен из плоских углов правильных треугольников. Таковы четырехгранные углы октаэдра.

Наконец, убеждаемся, что гранями пятигранного угла правильного многогранника могут быть только правильные треугольники. Икосаэдр как раз имеет такие многогранные углы.

В этом факультативном курсе можно рассмотреть полуправильные многогранники — изогоны и изоэдры.

Среди задач для учащихся надо выделить следующие:

а) вычислить площадь поверхности правильного многогранника, если задана длина его ребра;

б) вычислить двугранный угол правильного тетраэдра, куба и октаэдра;

в) вычислить длины диагоналей октаэдра;

г) доказать, что центры граней правильного тетраэдра являются вершинами правильного тетраэдра;

д) доказать, что центры граней куба (октаэдра) являются вершинами октаэдра (куба);

е) сделать соответствующий вывод относительно икосаэдра и додекаэдра, принять его без доказательства;

ж) вычислить радиусы вписанной и описанной около правильного многогранника сферы, если его ребро равно 1;

з) указать центр, оси и плоскости симметрии, если они есть, каждого из правильных многогранников.

Вопросы для беседы с учащимися по теме «Пирамиды»

1. Укажите среди окружающих вас предметов те, которые имеют форму пирамиды, усеченной пирамиды.

2. Какой многогранник называют пирамидой, усеченной пирамидой?

3. Назовите основные элементы пирамиды, дайте им определение. Сколько вершин, ребер и граней имеет: а) n-угольная пирамида; б) n-угольная усеченная пирамида?

4. Докажите, что число ребер: а) пирамиды кратно 2; б) усеченной пирамиды кратно 3.

5. Сколько плоских, двугранных и многогранных углов: а) в тетраэдре; б) в четырехугольной пирамиде; в) в усеченной треугольной пирамиде?

6. Докажите, что число плоских углов в пирамиде кратно 4.

7. Дайте определение правильной пирамиды. Назовите ее основные элементы.

8. Всегда ли правильная пирамида имеет: а) ось симметрии; б) плоскость симметрии?

Покажите на моделях.

9. Какой фигурой является ортогональная проекция на плоскость основания: а) пирамиды; б) правильной пирамиды?

10. Дана пирамида. На каком расстоянии от ее вершины надо провести сечение, параллельное основанию, чтобы получился многоугольник: а) со стороной, в 2 раза меньшей, чем соответствующая сторона основания; б) площадь которого в 2 раза меньше площади основания?

11. В правильной треугольной пирамиде площадь основания равна площади сечения, проведенного через высоту и боковое ребро. Какой должна быть высота этой пирамиды?

12. Площадь основания пирамиды равна 4. На каком расстоянии от вершины надо провести сечение пирамиды, параллельное основанию, чтобы площадь полученного многоугольника равнялась 1?

13. Докажите, что в правильной пирамиде существует точка, одинаково удаленная от всех вершин,— центр сферы, описанной около пирамиды. Где находится эта точка?

14. Докажите, что в правильной пирамиде существует точка, одинаково удаленная от всех ее граней,— центр вписанной в пирамиду сферы. Где расположена эта точка?

15. Дана треугольная пирамида $SABC$, в основании которой прямоугольный треугольник ABC; $SA=SB=SC$. Изобразите высоту пирамиды.

16. Будет ли правильной пирамида, если: а) ее боковые ребра равны; б) в ее основании правильный многоугольник; в) плоские углы при ее вершине равны; г) боковые грани равны и в основании правильный многоугольник?

17. Докажите, что в правильном тетраэдре противоположные ребра перпендикулярны.

18. Докажите, что в сечении тетраэдра плоскостью, параллельной двум противоположным ребрам, получается параллелограмм.

19. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой: а) две смежные боковые грани перпендикулярны основанию; б) две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию; в) три боковые грани перпендикулярны основанию?

20. Дан тетраэдр $ABCD$. 1) $\angle ACD = \angle DCB = \angle CAB = 90°$. Докажите, что грань DAB тоже прямоугольный треугольник. 2) $\angle ACD = \angle BCD = \angle ACB = 90°$. Может ли грань ADB быть прямоугольным треугольником?

Глава 14. ОКРУЖНОСТЬ. КРУГ. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Фигуры вращения: окружность, круг, цилиндр, конус, шар, сфера — традиционно изучаются в школьном курсе геометрии.

§ 48. Окружность. Круг

В соответствии с действующей программой изучение окружности и круга распределено по всему курсу планиметрии. В VI классе вводится определение окружности и ее элементов, доказываются некоторые ее свойства. Основная цель изучения этого материала в VI классе — сформировать у учащихся умения решать простейшие задачи на построение с помощью циркуля и линейки. В связи с этим требованием материал об окружности отнесен в геометрические построения. В дальнейшем окружность выступает как геометрическая фигура, для изучения свойств которой эффективно применение различных методов. Так, координатный метод применяется при исследовании случаев взаимного расположения прямой и окружности, метод геометрических преобразований позволяет обнаружить и обосновать многие свойства окружности. Метод геометрических мест дает возможность по-разному трактовать понятие окружности.

Метрические свойства окружности традиционно связываются с изучением правильных многоугольников, вписанных в окружность или описанных около нее.

В связи с тем что пространственные аналоги многих понятий, определений, свойств окружности и круга будут в дальнейшем изучаться в курсе стереометрии, необходимо добиваться хорошего их понимания в планиметрии.

Изучение окружности связано с обучением владению циркулем.

Естественно, не все свойства окружности и круга рассматриваются в теоретической части курса. Многие из них отнесены в задачи. Поэтому решение задач по теме имеет большое значение.

Во всех школьных учебниках окружность определяется как фигура, состоящая из всех точек плоскости, одинаково удаленных от данной точки. Затем вводятся элементы окружности: центр, радиус, хорда, диаметр.

При рассмотрении окружности, описанной около треугольника и окружности, вписанной в треугольник, решаются, по существу, вопросы о способах задания окружности: а) тремя точками, не лежащими на одной прямой, и б) тремя касательными. Важно понимать, что вопрос о существовании и единственности здесь не ставится, так как ответ на каждый из них для учащихся очевиден. Достаточно, если учащиеся знают, где находится центр окружности, могут обосновать, что указанная ими точка одинаково удалена от всех вершин (сторон) треугольника. Понятие окружности, ее свойства находят применение при решении простейших задач на построение. Изученные ранее основные свойства откладывания отрезков и углов становятся реализуемыми практически и позволяют строить треугольник по трем сторонам и угол, равный данному, делить угол и отрезок пополам, строить прямую, перпендикулярную данной, и др.

Интересна трактовка дуг окружностей как геометрического места точек, состоящего из A и B, и точек, из которых данный отрезок AB виден под углом α или $180° - \alpha$. При этом: а) если $\alpha = 90°$, то отрезок AB — диаметр окружности; б) если $\alpha \neq 90°$, то AB — отличная от диаметра хорда этих окружностей.

Понятие центрального угла окружности вводится в связи с рассмотрением соотношения между длиной дуги окружности и градусной мерой соответствующего ей центрального угла. При этом центральный угол окружности рассматривается как плоский угол с вершиной в ее центре.

Круг, его определение, элементы, свойства изучаются в связи с рассмотрением вопроса о площади круга и его частей.

§ 49. Тела вращения

Значение изучения в школе свойств тел вращения трудно переоценить. Важную роль играет знакомство с ними в связи с подготовкой школьников к практической жизни, к труду. Учителю следует подчеркнуть, что форму тел вращения имеют многие детали машин, приборов. Такую же форму имеют архитектурные сооружения, предметы быта. При обработке металла или дерева на токарном станке в промышленности очень быстро и с высокой степенью точности изготавливают детали, имеющие форму цилиндра, конуса или шара. Телами вращения являются и изделия гончарного производства; так, гончар помещает кусок глины на середину вращающегося рабочего стола и, прижимая к нему деревянный или металлический шаблон, придает этому куску глины нужную форму (рис. 137).

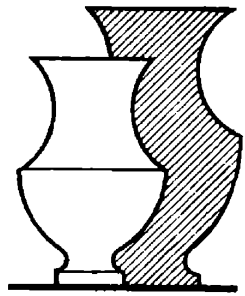
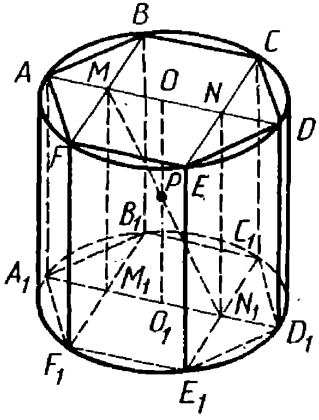
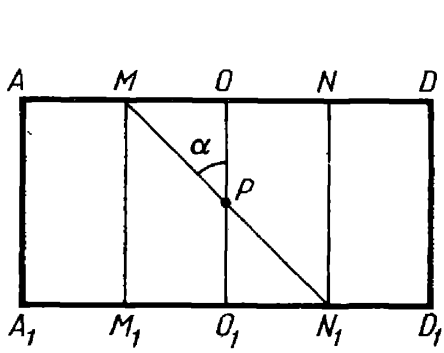


Рис. 137

Обычно теоретический материал раздела о телах вращения по объему бывает невелик. Однако тут вводится много новых понятий, способы их введения, методы изучения тоже весьма различны.





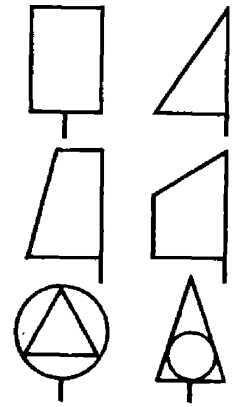


Рис. 138 Рис. 139

При изучении фигур вращения очень велико значение чертежа. Чертеж является основным средством иллюстрации, развития пространственного воображения. При этом необходимо помнить, что чертеж, который появляется на доске постепенно и сопровождается комментариями учителя, имеет большую педагогическую ценность. Учитель должен показать учащимся, не вдаваясь в подробности, как изобразить на плоскости фигуру вращения, то или иное ее сечение. Для изображения каждого из изучаемых в школе тел вращения, их отдельных элементов, сечений необходимо напомнить учащимся об изображении окружности (учащиеся знакомы с этим из курса черчения).

В ходе решения некоторых задач возникает необходимость в решении планиметрической задачи. На примере нескольких, специально подобранных задач учитель убеждает в целесообразности изображения в ряде случаев не всей фигуры вращения, а лишь ее осевого сечения. В других случаях планиметрический чертеж будет дополнять изображение тела вращения.

З а д а ч а. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма (рис. 138). Найти угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

Задача сводится к определению угла α между пересекающимися прямыми MN_1 и OO_1. Полезно перейти к рассмотрению осевого сечения AA_1D_1D. Правильно выполненный чертеж ($AO=OO_1$) подсказывает, что $\alpha=45°$. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев треугольник OPM.

Хорошим подспорьем в работе учителя служат различные шаблоны, штампы и др. для изображения тел вращения или их частей — эллипсов, овалов. Они удобны для быстрой подготовки материалов к самостоятельной работе учащихся.

Для демонстрации тел вращения можно воспользоваться центробежной машиной, она имеется в кабинете физики; для демонстрации фигур вращения надо изготовить набор рамок (рис. 139) из стальной проволоки (набор рамок может быть весьма разнообразным).

Учитель должен хорошо знать, с каким запасом представлений о телах вращения учащиеся приступают к их изучению. При организации повторения он в необходимом объеме включает соответствующий материал в урок, заранее планирует формы и методы повторения.

При изучении тел вращения закрепляются и развиваются полученные знания об основных фигурах на плоскости, особенно об окружности, круге, многоугольнике, вписанном и описанном, их основных свойствах.

Тема «Тела вращения» усваивается учащимися неплохо. Однако анализ состояния знаний учащихся показывает, в частности, недостаточно сформированные навыки в решении стереометрических задач, ошибки и недочеты как в выполнении графической части задания (неумение выполнить чертеж рассматриваемого тела вращения), так и в неумении проводить теоретические обоснования отдельных этапов решения, не всегда корректное использование теоретического материала, неаккуратно выполненные записи. Отрицательно сказывается на результатах работы отсутствие прочных вычислительных навыков у учащихся, утрата основных знаний и умений по курсу планиметрии.

Все это требует от учителя постоянного внимания к организации систематического повторения при изучении цилиндра, конуса и шара (тем более что это одна из итоговых тем курса геометрии), к организации вычислений в ходе решения задач и т. п.

Отдельные сведения о цилиндре, конусе, шаре, полученные учащимися из повседневной практики, предшествующего обучения математике, изучения других школьных дисциплин, синтезируются, оформляются логически, систематизируются.

Включенные в рассматриваемый раздел вопросы дают возможность учителю показать применение полученных результатов при решении часто встречающихся практических задач.

Весь круг вопросов по теме «Тела вращения» можно условно разделить на две группы:

1. Цилиндр и конус: а) определение, поверхность, симметрия, касательная плоскость, сечение осевое и перпендикулярное оси, вписанные и описанные многогранники; б) объем; в) площадь боковой поверхности.

2. Шар и сфера: а) определение, симметрия, сечение, касательная плоскость; б) объем шара; в) площадь сферы.

При планировании следует учитывать, что цилиндр и конус изучаются по единому плану и общий подход при рассмотрении основных понятий один и тот же. Подчеркивая общее и выявляя различия в свойствах цилиндра и конуса, учитель добивается осознанного усвоения материала учащимися.

В настоящее время тела вращения изучаются во втором полугодии X класса. Всего на тему отводится 19 ч, при этом предусмотрено проведение двух контрольных работ. Анализ содержания темы, методов изложения отдельных вопросов дает возможность считать целесообразным проведение первой контрольной работы после

изучения вопросов 1, а и 2, а и второй — после изучения метрических вопросов 1, б, в и 2, б, в.

Обычно цилиндр, конус, шар и сфера изучаются в курсе стереометрии после многогранников. При этом такие понятия, как «тело», «поверхность», «ограниченность» и т. п., вводится в теме «Многогранники». И сама трактовка фигур вращения (тело или поверхность) согласуется с тем, как понимается многогранник. В пробном учебнике геометрии Л. С. Атанасяна и др. [32], например, цилиндр — это тело, а многогранник — поверхность, хотя авторы и отмечают, что «...тело, ограниченное многогранником, часто называют также многогранником». Последовательность изучаемых тел вращения: цилиндр, конус, шар — соответствует обычно последовательности: призма, пирамида, правильные многогранники. Цилиндр (цилиндрическая поверхность) и призма (поверхность призмы) имеют очень много общих свойств. Аналогичное замечание можно сделать и относительно понятий пирамиды и конуса. Во всех школьных учебниках выделяется для изучения поверхность шара — сфера. Цилиндрическая поверхность рассматривается только в пробном учебнике Л. С. Атанасяна и др. [32]. Коническая поверхность отдельно не рассматривается.

В пробном учебнике А. Д. Александрова и др. [15] тема «Пространственные фигуры и тела» изучается перед темой «Многогранники». В первой рассматриваются такие общие понятия, как: опорная плоскость, размеры фигур, ограниченные фигуры, диаметр фигуры, расстояние от точки до фигуры, выпуклые фигуры, тела, граница и внутренность фигуры в пространстве, замкнутая область, выпуклые тела и др. Эти понятия находят непосредственное применение как при изучении тел вращения, так и при изучении многогранников. В этом учебнике тела вращения изучаются в порядке: шар, цилиндр, конус, так как понятия сферы и шара находят широкое применение при введении и изучении основных понятий темы. Трактовка цилиндра и конуса также отличается от принятой в большинстве школьных учебников. Так, цилиндром называется объединение параллельных отрезков, идущих из всех точек некоторой плоской фигуры до плоскости, параллельной плоскости этой фигуры.

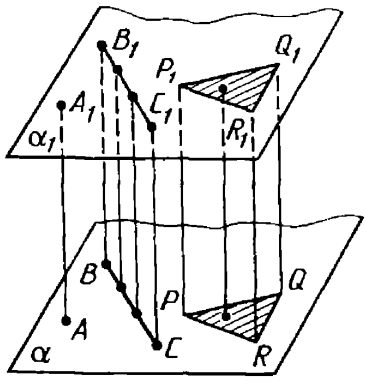


Рис. 140

Таким образом, цилиндр может иметь своим основанием точку, отрезок, треугольник, круг, прямую, полуплоскость и т. д. (рис. 140). Далее вводится понятие прямого кругового цилиндра или цилиндра вращения. Такое расширенное понятие цилиндра, а затем и конуса, усеченного конуса приводит к тому, что не всегда каждая из этих фигур является телом. Для этого необходимо, чтобы основанием каждого из них служила ограниченная замкнутая область.

Возможны и другие варианты изложения теории как по организации учебного материала, расстановке акцентов при рассмотрении понятий, так и по методам изложения отдельных вопросов.

Если сравнить трактовки цилиндра (конуса) в школьных курсах геометрии, то видно, что:

1) строгого определения цилиндра (конуса) в школьных курсах нет, дается лишь его описание;

2) во всех учебниках под цилиндром (конусом) понимается геометрическое тело, т. е. ограниченная пространственная область с границей. При этом можно выделить три основных различных методических подхода к понятию цилиндра (конуса).

В учебном пособии А. В. Погорелова [134] цилиндр трактуется как тело, образованное заключенными между двумя параллельными плоскостями отрезками всех параллельных прямых, пересекающих круг в одной из плоскостей.

В курсе геометрии Л. С. Атанасяна и др. [32] сначала вводится граница — цилиндрическая поверхность и два круга, расположенных определенным образом относительно этой поверхности — ограниченной пространственной области, а уже затем цилиндр как тело, ограниченное рассмотренной поверхностью. Аналогичный подход реализован в курсе стереометрии Н. А. Глаголева и др.

Третий подход заключается в том, что цилиндр сразу вводится как тело вращения. Примером такого изложения может служить учебное пособие под редакцией З. А. Скопеца [99].

Следует добавить, что в некоторых курсах вводится прямой круговой цилиндр.

Каждый из путей имеет свои преимущества: при наглядности первого второй более «рабочий» в том смысле, что в дальнейшем широко используется понятие боковой поверхности цилиндра. Трактовка цилиндра как тела вращения обязательно должна быть рассмотрена при любом изложении темы. Именно этот путь представляет широкие возможности для показа связи теории с практикой.

Цилиндр. Перед введением понятия цилиндра учитель напоминает, что с телами вращения — цилиндром, конусом, шаром учащиеся уже встречались в курсе черчения восьмилетней школы, что форму цилиндра имеют многие предметы техники и быта: детали, выточенные на токарном станке, труба, бак, кастрюля, стакан, карандаш, стержень шариковой ручки и т. п.; архитектурные сооружения: колонны, пьедесталы некоторых памятников. При этом полезно использовать демонстрационные модели, изображения цилиндра, имеющиеся в кабинете.

Цилиндр обычно из всех тел вращения рассматривается первым. На этапе введения определения понятия целесообразно использовать демонстрационный ящик. На нижнюю плоскость учитель помещает вырезанный из бумаги круг радиусом R (рис. 141). При помощи нескольких спиц и модели второй плоскости, параллельной первой, он демонстрирует рассматриваемую конфигурацию. Желательно выделить цветом спицы, «прокалывающие» границу круга, т. е. модели образующих цилиндра.

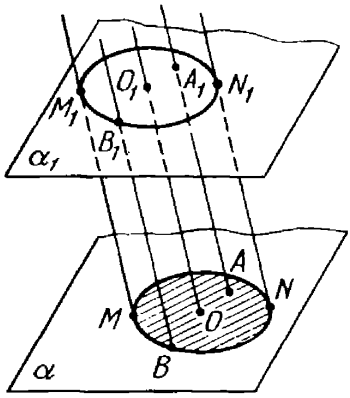


Рис. 141

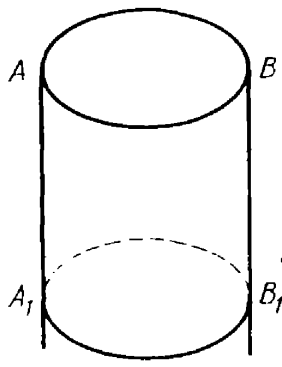


Рис. 142

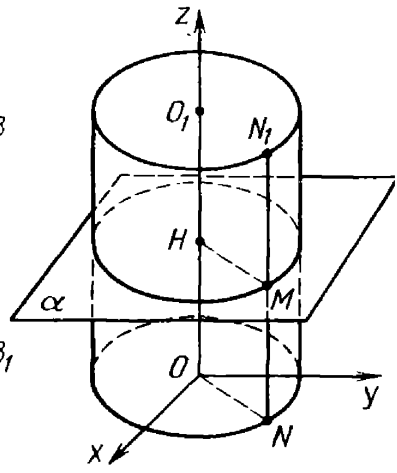


Рис. 143

В определении цилиндра (кругового), данном, например, в учебном пособии А. В. Погорелова [134], важное значение имеет родовое понятие «тело». Фигура, определенная как «геометрическое место заключенных между двумя параллельными плоскостями отрезков всех параллельных прямых, пересекающих круг в одной из плоскостей», не является телом (а значит, и цилиндром); это цилиндр без оснований. В связи с этим учитель следит за правильностью формулировок и своевременно делает необходимые замечания.

Затем рассматриваются **элементы цилиндра** (кругового), формулируются соответствующие определения, демонстрируются на модели образующие цилиндра, его поверхность, основания, боковая поверхность, его высота. Аналогичная работа проводится по изображению цилиндра.

Сначала устанавливается, что все **образующие цилиндра** равны между собой как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями. Когда один конец отрезка BB_1 ($BB_1 \parallel OO_1$) — точка B описывает окружность в плоскости α, второй его конец — точка B_1 описывает окружность того же радиуса в плоскости α_1. Получается поверхность, которую называют **боковой поверхностью цилиндра.**

Прежде чем перейти к введению понятия основания цилиндра, учащиеся устанавливают, какая фигура получается в пересечении рассматриваемых параллельных прямых с плоскостью α_1. Для этого достаточно рассмотреть параллельный перенос плоскости α в направлении BB_1, совмещающий точку B с B_1. При этом плоскость α совместится с плоскостью α_1 — через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и при этом только одну. Данная в плоскости α окружность C перейдет в равную ей окружность C_1 в плоскости α_1. А так как все образующие равны и параллельны между собой ($BB_1 = MM_1 = NN_1 = \ldots$), то концы всех образующих в плоскости α_1 как раз и образуют эту окружность C_1.

Необходимо объяснить, как изображают прямой круговой цилиндр на плоскости.

1. Рисуют (от руки или по шаблону) эллипс (овал), изобра-

жающий верхнее или нижнее основание цилиндра (рис. 142).

2. Через точки A и B проводят две параллельные касательные. Для наглядности — это два вертикальных луча.

3. На этих касательных от точек A и B откладывают равные отрезки AA_1 и BB_1.

4. Рисуют эллипс, равный первому, касающийся AA_1 и BB_1 в точках A_1 и B_1.

Можно предложить учащимся: а) изобразить цилиндр; б) провести три любые образующие цилиндра; в) указать высоту цилиндра.

Непосредственно после этого целесообразно рассмотреть свойство сечения боковой поверхности цилиндра плоскостью, параллельной его основаниям.

Можно предложить учащимся на рисунке, который они получили, выполняя последнее задание, изобразить сечение цилиндра плоскостью, параллельной его основаниям, и сравнить это сечение с основаниями. Это свойство можно доказать по-разному.

Первый способ основан на применении параллельного переноса, он изложен выше.

Второй способ основан на применении координатного метода. Поместим начало координат в центр одного из оснований цилиндра и совместим ось z с осью OO_1 цилиндра (рис. 143). Обозначим радиус цилиндра R. Уравнение окружности основания, лежащего в плоскости xy, имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (1)$$

Пусть точка $M(x; y; z)$ принадлежит пересечению плоскости α с поверхностью цилиндра, плоскость α параллельна плоскости xy. Опустим перпендикуляр из точки M на ось z. Получим точку $H(0; 0; z)$, которая тоже лежит в плоскости α. Вычислим расстояние между точками H и M. Получим:

$$HM^2=x^2+y^2. \qquad (2)$$

Через точку M проведем образующую NN_1 цилиндра. Тогда $HM \parallel ON$ и $HM=ON=R$ как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми OH и MN. Следовательно, уравнение (2) принимает вид:

$$R^2=x^2+y^2. \qquad (3)$$

Таким образом, геометрическое место точек M в плоскости α — окружность, эта окружность равна окружности основания цилиндра (сравните уравнения (1) и (3)).

Вводятся понятия **радиуса, высоты** и **оси** цилиндра, **прямого** цилиндра. Весьма целесообразно связать понятия оси прямого цилиндра с возможностью получения его вращением прямоугольника вокруг его стороны на оси.

Введя понятие **осевого сечения** цилиндра, необходимо установить его свойства, которые затем используются в задачах:

а) осевое сечение цилиндра — прямоугольник;

б) любые два осевых сечения цилиндра равны между собой.

Пусть плоскость α проходит через ось цилиндра OO_1 (рис. 144). Эта плоскость проходит через точки O и O_1, значит, она пересекает основания цилиндра по диаметрам AB и A_1B_1, причем $AB \| A_1B_1$ и $AB = A_1B_1$. Соединим точки A и A_1, B и B_1. Докажем, что AA_1 и BB_1 — образующие цилиндра, по которым он пересекается с плоскостью α. Отрезки AA_1 и BB_1 лежат в плоскости α. Вместе с тем $AA_1 \| OO_1$ и $BB_1 \| OO_1$. Значит, AA_1 и BB_1 — образующие цилиндра. Следовательно, его осевое сечение — прямоугольник. Равенство любых двух осевых сечений следует из равенства их измерений.

Часто в задачах фигурирует сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси. Воспользовавшись осевым сечением, параллельным этой плоскости, нетрудно установить, что рассматриваемое сечение — прямоугольник, противоположные стороны которого — образующие цилиндра и две равные и параллельные хорды его оснований. В ходе решения таких задач обычно можно ограничиться изображением одного из оснований цилиндра.

В качестве необязательного материала учитель может предложить учащимся, интересующимся геометрией, вывести уравнение **цилиндрической** поверхности (рис. 145). Предварительно надо пояснить, что под этим понимается поверхность, образованная прямыми, проведенными через каждую точку окружности перпендикулярно плоскости этой окружности. Окружность в данном случае называется **направляющей**, а каждая прямая — **образующей** цилиндрической поверхности. Прямая l, параллельная образующим и проходящая через центр O направляющей, называется **осью** цилиндрической поверхности. Очевидно, цилиндрическую поверхность можно получить вращением одной из образующих вокруг оси.

Пусть дана цилиндрическая поверхность с осью l и направляющей c. Рассмотрим систему координат, где ось z параллельна l (рис. 146). Пусть точка $M(x; y; z)$ принадлежит цилиндрической поверхности с направляющей c радиуса R, с центром в точке $S(a; b; O)$. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось l цилиндрической поверхности. Точка H имеет координаты a, b, z. Для того чтобы точка M принадлежала рассматриваемой цилиндрической поверхности, необходимо и доста-

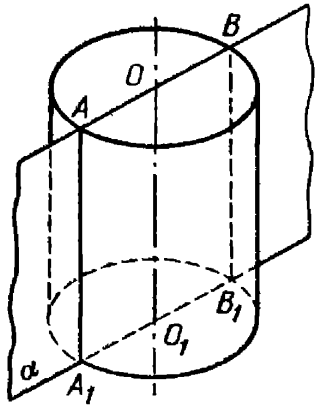


Рис. 144

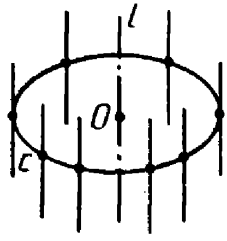


Рис. 145

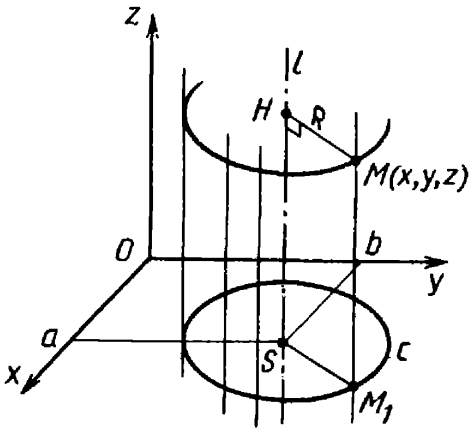


Рис. 146

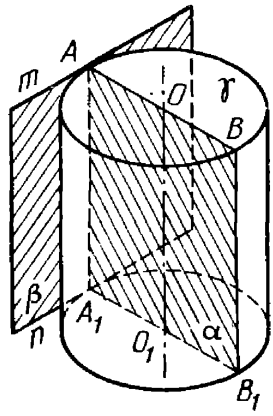


Рис. 147

точно, чтобы расстояние от M до оси, т. е. MH, равнялось R, или

$$MH^2=R^2;\ (x-a)^2+(y-b)^2=R^2;$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0. \qquad (4)$$

Необходимо предупредить возможную ошибку учащихся: считать уравнение (4) уравнением окружности c. На самом деле окружность c задается двумя условиями: $z=0$ и $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$. Уравнение (4) принимает вид $x^2+y^2=R^2$ в случае, когда ось цилиндрической поверхности совпадает с осью z системы координат.

С различными сечениями цилиндра плоскостью целесообразно ознакомить учащихся на моделях.

В задачах на описанные около цилиндра призмы применяется понятие **плоскости, касательной к цилиндру.** Перед введением этого понятия полезно вспомнить определение касательной к окружности, которое изучалось в курсе планиметрии и в соответствии с которым обычно определяется плоскость, касательная к цилиндру.

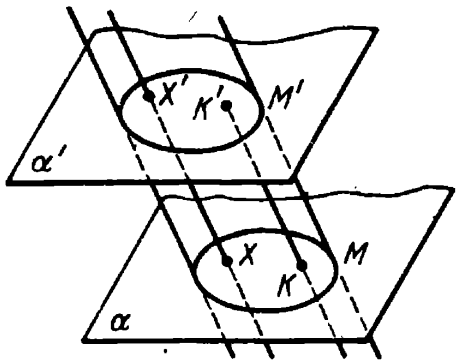
Окружность	Цилиндр
1а. Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется **касательной к окружности.**	1б. **Плоскость,** проходящая через образующую цилиндра перпендикулярно к осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется **касательной к цилиндру.**
2а. Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной к окружности.**	2б. Плоскость, имеющая с цилиндром только одну общую образующую, называется **касательной к цилиндру.**

Очевидно, предпочтение надо отдать определению 1 б, так как оно содержит свойство, которое может быть эффективно использовано при доказательстве теорем и в решении задач.

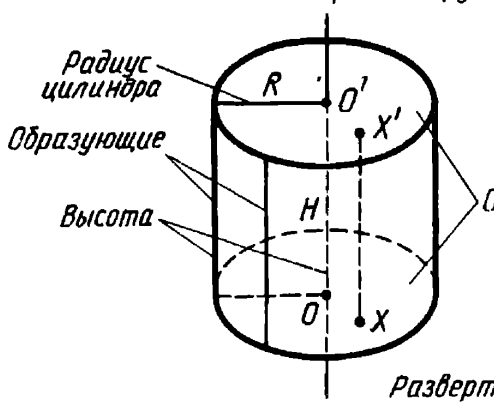
Учителю необходимо показать на модели расположение касательной плоскости β к цилиндру, проходящей через его образующую AA_1 (рис. 147).

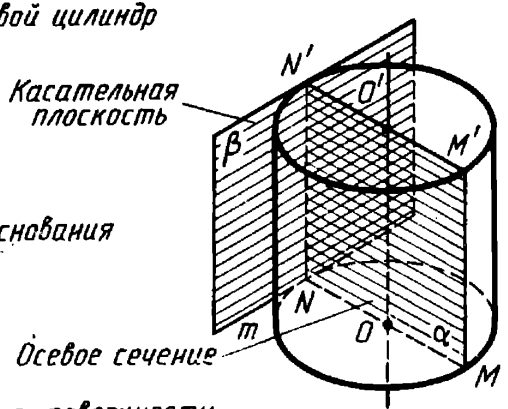
ЦИЛИНДР

Круговой цилиндр

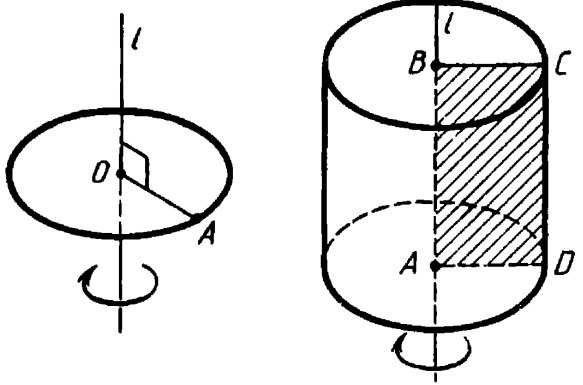


Прямой круговой цилиндр

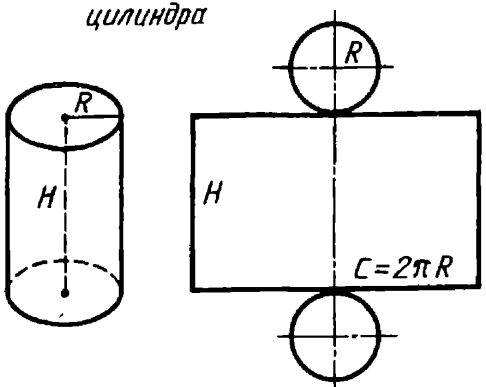




Цилиндр – тело вращения



Развертка поверхности цилиндра



При этом учащиеся должны уметь четко комментировать производимые действия, например так:

1. Рассмотрим образующую AA_1, через которую надо провести плоскость, касательную к цилиндру.

2. Через образующую AA_1 проведем осевое сечение AA_1B_1B.

3. Через образующую AA_1 проведем плоскость, перпендикулярную плоскости AA_1B.

В задачах касательная плоскость к цилиндру выступает поразному. В одних случаях это плоскость, отстоящая от оси цилиндра на расстояние, равное его радиусу, в других — плоскость, задаваемая парой касательных к окружностям оснований в концах одной из образующих и т. п. Учитель подводит учащихся к выводу: каждая из прямых m и n, лежащих в плоскостях оснований и касающихся окружностей оснований в точках A и A_1, лежит в касательной плоскости к цилиндру, проходящей через образующую AA_1. Для этого достаточно рассмотреть пересечение плоскостей α и β с плоскостью γ одного из оснований, например верхнего. По определению касательной плоскости к цилиндру плоскости α и β перпендикулярны, причем β проходит через образующую AA_1 (линию пересечения α и β) цилиндра. Из определения перпендикулярных плоскостей следует, что плоскость γ пересекает α и β по перпендикулярным прямым AB и m. При этом прямая m проходит через точку A, лежащую на окружности верхнего основания, и $m \perp AB$. По определению m — касательная к окружности верхнего основания в точке A_1.

Кроме того, $m \perp AB$ и $n \perp AB$, значит, $m \parallel n$.

Это свойство используется при введении понятия «призма, описанная около цилиндра».

Описанная около цилиндра призма может быть определена как:

1) призма, основания которой — равные многоугольники, описанные около оснований цилиндра;

2) призма, основания которой лежат в плоскостях оснований цилиндра, а плоскости боковых граней которой касаются боковой поверхности цилиндра.

Приняв первое предложение в качестве определения, ученик сразу может использовать в задачах свойства многоугольника, описанного около окружности. При этом необходимо обратить внимание учащихся на второе предложение, которое при таком подходе выступает как свойство призмы, описанной около цилиндра. Именно в нем выражено характеристическое свойство многогранников, описанных около тел вращения.

При изучении темы полезно использовать ее графический конспект. Учащиеся в классе под руководством учителя размечают лист чертежной бумаги (формат 11), заполняют его дома или в классе по мере изучения понятий, связанных с цилиндром (см. табл. 1). Учитель может по-разному организовать работу учеников с конспектом в классе и дома: при объяснении нового материала, выполнении устных упражнений, проведении текущего и итогового повторения и т. п.

Вопросы для беседы с учащимися по теме «Цилиндр»

1. Укажите в природе, технике, архитектуре, среди окружающих вас предметов объекты, имеющие цилиндрическую форму.

2. Объясните, что называют цилиндром, круговым цилиндром. Назовите его основные элементы, дайте им определение.

3. Дайте определение прямого цилиндра. Назовите его основные элементы.

4. Что такое осевое сечение цилиндра?

5. Сколько осевых сечений цилиндра проходит через каждую его образующую?

6. Определите вид осевого сечения цилиндра. Ответ обоснуйте.

7. Может ли осевое сечение цилиндра быть: а) прямоугольником; б) квадратом; в) трапецией?

8. Имеет ли цилиндр: а) центр симметрии; б) ось симметрии; в) плоскость симметрии? Укажите их в каждом случае. Сколько их? Покажите на модели.

9. Пусть AA_1B_1B и MM_1N_1N — два осевых сечения цилиндра. Сравните их площади.

10. Какая плоскость называется касательной к цилиндру?

11. Сколько касательных плоскостей проходит через образующую цилиндра?

12. Пусть MM_1N_1N — осевое сечение цилиндра. Каково взаимное расположение касательных плоскостей, проходящих через образующие MM_1 и NN_1?

13. Пусть NN_1 — образующая цилиндра, m — касательная к окружности основания в точке N. Докажите, что плоскость, определяемая прямыми NN_1 и m, является касательной к цилиндру.

14. Цилиндр катится по плоскости. Какая фигура получается при движении его оси?

15. Отметим две точки на модели цилиндра. Как вычислить расстояние между ними, если измерения производить только на поверхности цилиндра?

16. Как найти радиус цилиндра, если основания модели цилиндра недоступны для измерения?

17. Какой фигурой надо заменить прямоугольник $ABCD$, чтобы при ее вращении вокруг прямой AB получился: а) полый цилиндр; б) стакан; в) форма для выпечки кекса (без крышки)?

18. Какие из следующих утверждений верны:

а) любое сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси, есть окружность, равная окружности основания;

б) любое сечение цилиндра плоскостью есть окружность, равная окружности основания;

в) плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его по кругу, равному основанию цилиндра;

г) сечением цилиндра плоскостью могут быть круг, прямоугольник и эллипс?

19. Сформулируйте и докажите теорему о сечении цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси.

20*. Имеет ли цилиндрическая поверхность центр симметрии, ось симметрии, плоскость симметрии? Сколько их?

21*. Цилиндр пересечен двумя параллельными плоскостями, не пересекающими его основания. Какими свойствами обладают полученные сечения?

22. Какие геометрические фигуры могут быть получены в пересечении цилиндра с плоскостью? Покажите на модели взаимное расположение цилиндра и секущей плоскости в каждом случае.

23. Каково взаимное расположение касательной плоскости к цилиндру и его оси? Докажите.

24. Дайте определение призмы: а) вписанной в цилиндр; б) описанной около цилиндра.

25. Цилиндр имеет единственную общую образующую с каждой из двух перпендикулярных плоскостей. Каково расстояние между линией пересечения плоскостей и осью цилиндра?

При изучении темы учитель должен уделить особое внимание подбору и решению задач с практическим содержанием на материале различных отраслей промышленности, сельскохозяйственного производства, бытовой практики.

Приведем пример такой задачи.

З а д а ч а. Имеется цилиндрическая заготовка большого диаметра (рис. 148). Как вычислить диаметр этой заготовки, пользуясь штангенциркулем?

Для используемого штангенциркуля h известно или может быть найдено, l получается при измерении. Из прямоугольного треугольника OAB можем выразить радиус r заготовки через известные h и l. Получаем $2r=h+\frac{l^2}{4h}$, или $d=h+\frac{l^2}{4h}$ (d — диаметр заготовки).

Конус. Конус изучается по той же схеме, что и цилиндр. Трактовки этих фигур в одном учебнике обычно совпадают.

На рисунке проведем касательные из точки S к эллипсу, изображающему основание конуса (рис. 149). Обозначим через K_1 и K_2 точки касания. Распространенная ошибка заключается в том, что

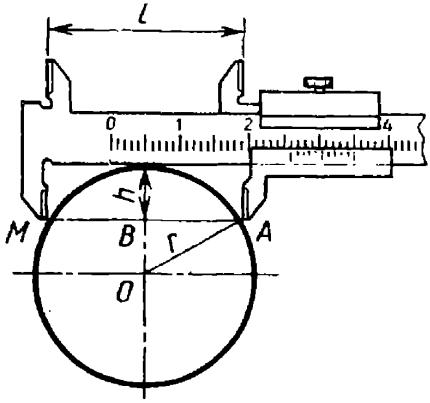


Рис. 148

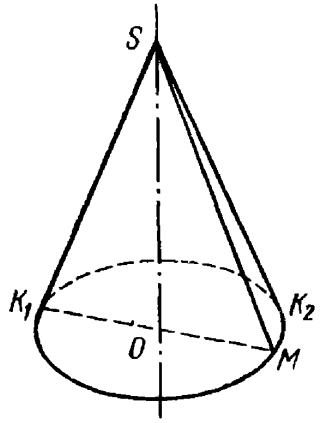


Рис. 149

учащиеся принимают треугольник SK_1K_2 за изображение осевого сечения конуса. Однако хорда K_1K_2 не проходит через центр O основания конуса. Для построения изображения осевого сечения, проходящего через образующую SK_1, достаточно построить изображение диаметра K_1M и соединить полученную точку M с вершиной S конуса. SK_1 и SK_2 — изображения крайних образующих, т. е. они отделяют видимые образующие (их изображения получаются, если соединить произвольную точку дуги K_1MK_2 эллипса с вершиной S) от невидимых.

Аналогичные замечания необходимо сделать и относительно изображения усеченного конуса (рис. 150). K_1M_1PQ — осевое сечение усеченного конуса.

Чтобы получить изображение конуса:

1. Рисуют эллипс (изображение основания конуса), отмечают его центр.

2. Отмечают точку (обычно ее обозначают буквой S) — изображение вершины конуса.

3. Из точки S к эллипсу проводят две касательные (изображения крайних образующих).

4. В случае усеченного конуса рисуют эллипс, гомотетичный первому относительно вершины конуса, касающийся его крайних образующих.

Вводятся понятия образующей, вершины, основания, высоты конуса. Рассматривая сечения конуса плоскостью, следует выделить два случая:

1. Секущая плоскость проходит через вершину конуса.

2. Секущая плоскость параллельна основанию конуса.

В первом случае следует рассмотреть пересечение секущей плоскости с окружностью основания конуса.

1а. Если они пересекаются в двух точках, то в сечении конуса получаем равнобедренный треугольник, основание которого — отрезок с концами в этих точках. Из всех таких сечений следует особо выделить осевое сечение. Оно получается, если рассматриваемые точки пересечения — концы диаметра основания ко-

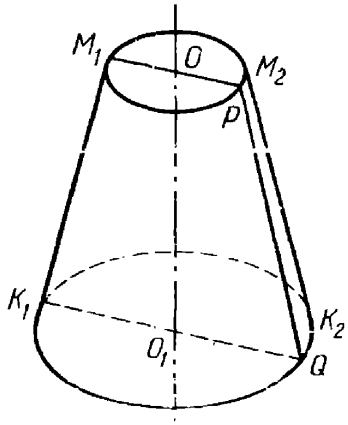


Рис. 150

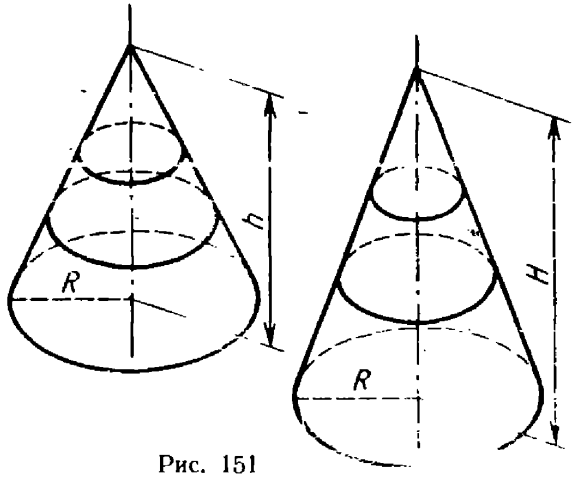


Рис. 151

нуса. Среди конусов выделяется равносторонний (осевое сечение его — равносторонний треугольник). Если R — радиус его основания, то образующая равностороннего конуса равна $2R$.

1б. Если они имеют только одну общую точку, то рассматриваемая плоскость — касательная к конусу.

Касательная плоскость к конусу может быть определена по-разному.

Определение 1. Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую.

Определение 2. Плоскость, имеющая с конусом только одну общую образующую.

Трактовка плоскости, касательной к конусу и плоскости, касательной к цилиндру, должна быть одна и та же в одном учебнике. Следует отметить, что, приняв одно из предложений 1 или 2 в качестве определения, необходимо ознакомить учащихся с другим как свойством касательной плоскости к конусу.

1в. Продолжая рассмотрение плоскости, проходящей через вершину конуса, приходим к случаю: если плоскость и окружность основания не имеют общих точек, то рассматриваемая плоскость с конусом имеют только одну общую точку — вершину конуса.

Очень важно, чтобы ученики хорошо понимали смысл выражений «пирамида вписана в конус» и «пирамида описана около конуса». Принятые для этих понятий определения должны соответствовать аналогичным определениям призмы, вписанной в цилиндр или описанной около него.

Понятие пирамиды, вписанной в конус или описанной около него, дает возможность решать задачи, где используются понятия угла наклона прямой к плоскости, угла между двумя гранями, угла между прямыми и т. п.

Рассмотрение сечения, перпендикулярного оси конуса, позволяет эффективно применять метод гомотетии по аналогии с сечением пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Установив форму и расположение сечения, вводят понятие усеченного конуса.

Изображая усеченный конус, удобно сначала нарисовать тот конус, из которого получается усеченный конус.

При доказательстве теоремы о сечении конуса плоскостью, параллельной его основанию, целесообразно получить следующие выводы:

1. Рассматриваемое сечение — круг.

2. Обозначив через R и r соответственно радиус конуса и рассматриваемого сечения и через H и h высоту данного и отсеченного конуса, получаем, что $\frac{R}{r}=\frac{H}{h}=k$, где k — коэффициент подобия данного и отсеченного конусов.

В качестве примера рассмотрим два конуса с равными основаниями и различными высотами (рис. 151). Высота каждого конуса разделена на три равные части, и через точки деления про-

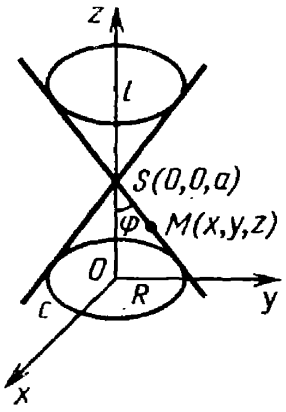


Рис. 152

ведены плоскости, параллельные основаниям. Оказывается, что площади полученных сечений соответственно равны:

$\frac{1}{3}\pi R^2$ — для верхних сечений,

$\frac{2}{3}\pi R^2$ — для нижних, где R — радиус оснований конусов.

Иными словами, результат не зависит от высоты рассматриваемых конусов.

В качестве дополнительного материала можно рекомендовать рассмотрение уравнения **конической поверхности,** пояснив предварительно, что под этим понимается. Пусть дана окружность $C\,(0;\ R)$ и точка S на прямой l, проходящей через точку O и перпендикулярной окружности C, точки S и O различны (рис. 152). Поверхность, образованная прямыми, проходящими через точку S и имеющими с окружностью C общую точку, называется конической. При этом рассматриваемая окружность носит название **направляющей,** а каждая прямая — **образующей** конической поверхности. Прямая l называется **осью** конической поверхности.

Ясно, что коническая поверхность может быть получена вращением одной из направляющих вокруг оси (угол φ направляющей с осью должен оставаться постоянным).

Пусть в прямоугольной системе координат вершина конической поверхности — точка $S\,(0;\ 0;\ a)$, ось z совпадает с осью конической поверхности. Необходимое и достаточное условие принадлежности точки $M\,(x;\ y;\ z)$ рассматриваемой конической поверхности состоит в том, что угол между прямыми SM и SO должен быть равен φ. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{SM}$ и $\overrightarrow{OS}$:

$$\overrightarrow{SM}=(x;\ y;\ z-a),\ \overrightarrow{OS}=(0;\ 0;\ a).$$

Имеем:

$$\cos^2\varphi=\frac{(z-a)^2}{x^2+y^2+(z-a)^2},\quad \text{или}\quad (x^2+y^2+(z-a)^2)\cos^2\varphi-(z-a)^2=0.$$

А так как $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$, то $x^2+y^2-(z-a)^2\operatorname{tg}^2\varphi=0.$

Это уравнение имеет вид: $x^2+y^2-(z-a)^2m^2=0,$ (1)
где a и m — действительные числа.

Обратно: если же нам дано уравнение вида

$$x^2+y^2-(z-a)^2m^2=0,$$

то, каким бы ни было m^2, существует острый угол φ, такой, что $\operatorname{tg}\varphi=|m|$, и тогда $x^2+y^2-(z-a)^2\operatorname{tg}^2\varphi=0,$

или

$$\cos^2\varphi=\frac{(z-a)^2}{x^2+y^2+(z-a)^2},$$

откуда следует, что точка M с координатами x, y, z принадлежит конической поверхности с осью z, вершиной $S(0; 0; a)$ и углом φ между осью и образующей.

Делаем вывод: уравнение (1) является уравнением конической поверхности с осью z и вершиной $S(0; 0; a)$.

Пример 1. Коническая поверхность с осью z, вершиной $s(0; 0; \sqrt{3})$ и углом $\varphi=\frac{\pi}{6}$ имеет уравнение $x^2+y^2-(z-\sqrt{3})^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}=0$, или $x^2+y^2-\frac{1}{3}(z-\sqrt{3})^2=0$.

Пример 2. Коническая поверхность с осью x, вершиной $s(7; 0; 0)$ и углом $\varphi=\frac{\pi}{3}$ имеет уравнение $y^2+z^2-(x-7)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}=0$, или $3(x-7)^2-y^2-z^2=0$.

Пример 3. Коническая поверхность с осью y, вершиной $s(0; -4; 0)$ и углом $\varphi=\frac{\pi}{4}$ имеет уравнение $x^2-(y+4)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}+$ $+z^2=0$, или $x^2-\frac{1}{2}(y+4)^2+z^2=0$.

Двум-трем учащимся, интересующимся математикой, могут быть предложены доклады на темы «Конические сечения», «Вращение прямой около оси» и др. Учитель дает список литературы, с которой следует ознакомиться при подготовке сообщения. Например, по первой теме можно рекомендовать одноименную статью из книги: «Энциклопедический словарь юного математика». Сообщение должно быть рассчитано на 15—20 мин. При подготовке ученику поможет план, который он составляет сам или с помощью учителя.

Так, по теме «Конические сечения» может быть рекомендован следующий план:

1. Коническая поверхность.
2. Конические сечения: а) эллипс; б) парабола; в) гипербола.
3. Конические сечения в природе, науке и технике
4. Из истории вопроса.

Доклад вызовет больший интерес у слушателей, если будет сопровождаться демонстрацией моделей, рисунков, плакатов и т. п.

Для второго доклада следует подготовить центробежную машину и набор из трех рамок (рис. 153). Первая рамка (рис. 153 *а*) представляет собой два металлических, жестко скрепленных стержня l и m, один из которых (m) изображает ось вращения и закрепляется в центробежную машину; вторая (рис. 153 *б*) — два параллельных, жестко скрепленных стержня m и k; третья (рис. 153 *в*) — два жестко скрепленных скрещивающихся стержня m и n. При вращении рамок получаются соответственно коническая и цилиндрическая поверхности, в третьем случае получаем гиперболоид.

Как в первом, так и во втором докладе совершенно естественно выступают элементы диалектики при наблюдении учащимися объектов в их взаимосвязи, в процессе изменения отношений между ними.

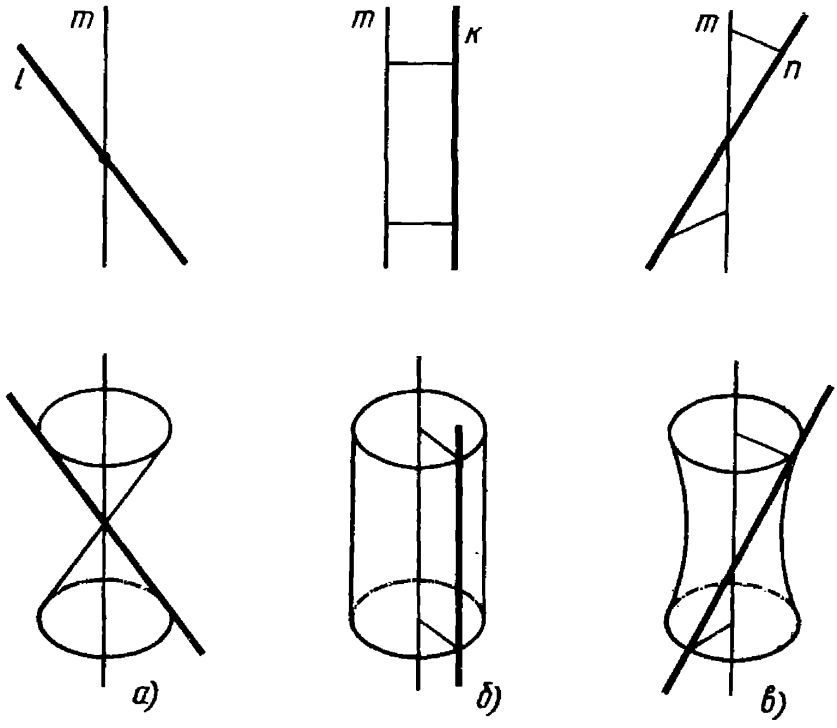


Рис. 153

Вопросы для беседы с учащимися по теме «Конус»

1. Приведите примеры предметов, имеющих форму конуса или усеченного конуса.

2. Какой фигурой является ортогональная проекция конуса:
а) на плоскость его основания;
б) на плоскость осевого сечения;
в) на касательную плоскость?

3. На каком расстоянии от вершины конуса надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы в сечении цилиндра получился круг, площадь которого в 2 раза меньше площади основания?

4. Какой должна быть высота конуса, осевое сечение которого имеет ту же площадь, что и его основание?

5. Существует ли сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, площадь которого равна осевому сечению?

6. Имеем конус, радиус основания которого и высота соответственно R и H, и касательную плоскость α. Найдите расстояние от наиболее удаленной от α точки конуса до этой плоскости, если: а) $R=1$, $H=1$; б) $R=1$, $H=\sqrt{3}$; в) $R=1$, $H=2\sqrt{2}$.

7. Два равных конуса имеют общую вершину и образующую.
1) Найдите расстояние между центрами их оснований, если известен радиус основания r и образующая l каждого конуса.

2) Докажите, что общая образующая и центры оснований лежат в одной плоскости.

8. Заполните таблицу:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
l		5		2,5	2	2,5				$\sqrt{6}$		
r	1,5					2	10					3
h	2	3						6				
S			$25\sqrt{3}$	1								4,5
α			30°		$\frac{\pi}{6}$				45°	$\frac{\pi}{4}$		
C								45	24		120	
β							200°				180°	

l — образующая конуса, r — радиус его основания, h — высота, S — площадь осевого сечения, α — угол образующей с осью, C — длина окружности основания, β — центральный угол развертки боковой поверхности.

9. Даны три луча с общим началом S. Существует ли конус с вершиной S, образующие которого лежат на данных лучах? Как его построить?

10*. Задана ли коническая поверхность, если известны: а) ось и две точки на поверхности; б) направляющая и ось; в) направляющая и точка поверхности?

11*. Даны две пересекающиеся прямые m и n. Какую поверхность образуют оси конических поверхностей, для которых m и n — образующие?

12. Имеет ли конус центр симметрии, ось симметрии, плоскость симметрии? Сколько их? Покажите на модели.

13*. Имеет ли коническая поверхность центр симметрии, ось симметрии, плоскость симметрии? Сколько их?

14*. Дано уравнение $x^2+y^2-(z-1)^2=0$. Докажите, что оно является уравнением конической поверхности. Укажите вершину, ось и угол между осью и образующей.

15. В усеченном конусе через середину высоты провели сечение, параллельное основаниям. Какое из утверждений верно: 1) площадь сечения равна среднему арифметическому площадей оснований; 2) площадь сечения равна среднему геометрическому площадей оснований?

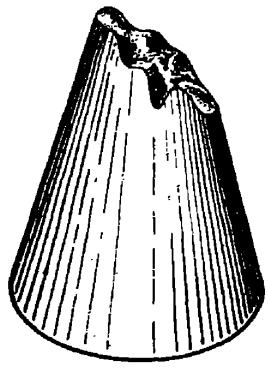


Рис. 154

16. Модель конуса разбита (рис. 154). Ка-

кие измерения надо произвести, чтобы определить его высоту, образующую, угол между образующей и осью?

Шар. Сфера. Если цилиндр и конус изучаются обычно по единой схеме, то шар (сфера) занимает особое место среди тел вращения. Именно при изучении шара и его поверхности наиболее полно используются знания учащихся о круге и окружности, полученные из курса планиметрии и других школьных дисциплин (черчение, география, астрономия и др.). В связи с этим основная роль учителя состоит в такой организации учебного процесса, когда ученики сами формулируют необходимые утверждения.

В отличие от понятий цилиндра и конуса понятия шара и сферы трактуются как пространственные аналоги круга и окружности. Шар определяется как тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Сфера вводится как поверхность шара. На разъемной модели и на изображении шара (сферы) учащиеся показывают основные элементы: центр, радиус, диаметр, диаметрально противоположные точки шара. Необходимо выполнить несколько упражнений в изображении основных элементов шара (сферы).

Учащиеся легко устанавливают, что шар (сфера) может быть получен вращением полукруга (полуокружности) вокруг его диаметра как оси.

Прежде чем изучать форму и размеры сечения шара плоскостью, целесообразно вспомнить различные случаи взаимного расположения прямой и круга (окружности) в последовательности, соответствующей рассмотрению взаимного расположения шара (сферы) с плоскостью.

При рассмотрении пересечения шара с плоскостью целесообразно сначала рассмотреть пересечение этой плоскости с поверхностью шара, т. е. со сферой. Нетрудно установить, что это пересечение — окружность, центр которой — основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, а радиус равен $\sqrt{R^2-H^2}$, где R — радиус сферы, H — расстояние от центра сферы до секущей плоскости. Рассматривая затем общие точки шара и секущей плоскости, легко получить вывод: сечение шара плоскостью — круг, границей которого служит рассмотренная выше окружность.

Аналитическое выражение радиуса r рассматриваемого круга $r=\sqrt{R^2-H^2}$ дает возможность получить следствия:

1. В сечении шара плоскостью получается круг, радиус которого r равен радиусу шара R, если расстояние H от центра шара до секущей плоскости равно 0, т. е. если секущая плоскость проходит через центр шара. Обычно это сечение носит название большого круга.

2. В сечении шара плоскостями получаются равные круги тогда и только тогда, когда эти плоскости находятся на одном и том же расстоянии от центра шара.

Если $H_1=H_2$ и $H_1<R$, то $R^2-H_1^2=R^2-H_2^2$.

Если $\sqrt{R^2-H_1^2}=\sqrt{R^2-H_2^2}$, то $H_1=H_2$.

3. Радиус круга, полученного в сечении шара плоскостью, уменьшается по мере удаления секущей плоскости от центра и становится равным нулю, когда $H=R$. Так подходим к понятию касательной плоскости к шару.

Аналогично определению касательной к окружности и кругу понятие касательной плоскости к шару (сфере) может быть определено по-разному:

1) как плоскость, имеющая с поверхностью шара лишь одну общую точку;

2) как плоскость, проходящая через точку шаровой поверхности и перпендикулярная к радиусу, проведенному в эту точку.

Выбрав одно из определений, другое доказывают как свойство касательной плоскости.

Доступным, интересным и поучительным является применение аналитических методов для изучения свойств сферы.

Вопросы для беседы с учащимися по теме «Шар. Сфера»

1. Укажите в природе, технике, среди окружающих вас предметов объекты, имеющие форму шара.

2. Что называется шаром, сферой?

3. Что такое радиус шара, диаметр шара?

4. Какие точки шара называются диаметрально противоположными?

5. Цилиндр и конус были определены как тела, образованные отрезками, определенным образом расположенными в пространстве. Сформулируйте аналогичное определение шара.

6. Докажите теорему о сечении плоскостью: а) сферы; б) шара.

7. Есть ли у шара: а) центр симметрии; б) ось симметрии: в) плоскость симметрии? Сколько их? Покажите на модели.

8. Сформулируйте определение плоскости, касательной к шару.

9. Сколько общих точек имеют шар и касательная к нему плоскость? Докажите.

10. Чему равно расстояние между двумя параллельными касательными плоскостями к шару?

11. На столе лежат два шара, имеющие общую точку. Каково расстояние от нее до плоскости стола, если: а) радиусы шаров равны; б) радиусы шаров различны?

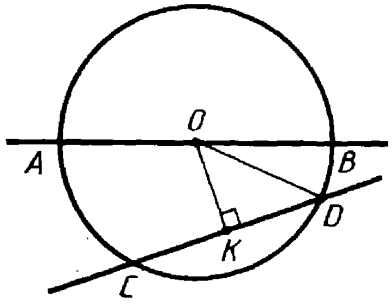
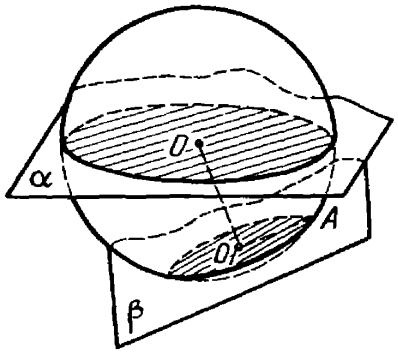
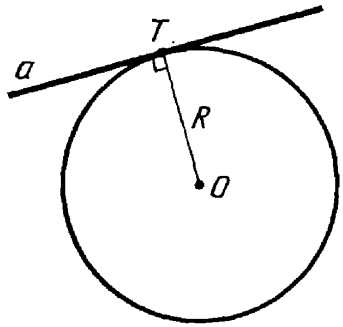
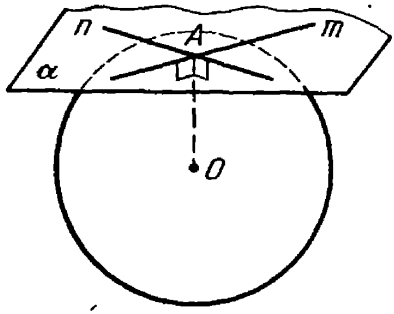
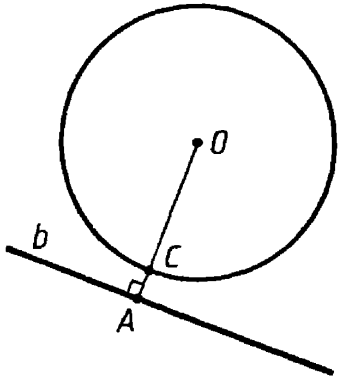
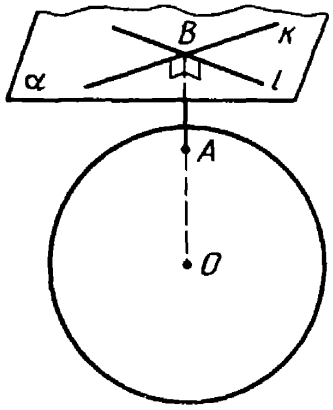
12. Как построить касательную плоскость к шару, проходящую через точку вне его?

13. Можно ли описать около шара: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед с неравными измерениями; в) правильный тетраэдр; г) правильную четырехугольную пирамиду; д) правильную треугольную призму; е) наклонный параллелепипед?

14. Каково уравнение сферы? Выведите его.

15. Используя графический конспект, расскажите о различных случаях взаимного расположения прямой и круга на плоскости и плоскости и шара в пространстве (табл. 2).

Таблица 2

Круг (окружность) и прямая	Шар (сфера) и плоскость
	
	
	

Глава 15. КООРДИНАТЫ, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ВЕКТОРЫ

Хорошо известно, что, как бы ни строился курс школьной геометрии, в нем обязательно присутствуют различные методы доказательства теорем, решения задач. Среди таких методов особо важное место занимают такие методы, как метод координат,

метод геометрических преобразований, векторный метод. Сами эти методы тесно связаны между собой.

В зависимости от концепции, раскрываемой авторами учебников геометрии для средней школы, тот или иной метод может занимать доминирующее значение. Так, в учебном пособии по геометрии под редакцией А. Н. Колмогорова [101] ведущую роль играл метод преобразований, который служил фундаментом построения теоретической части курса. В пособии под редакцией З. А. Скопеца [99] весьма широкое применение находил векторный метод. В пособии А. В. Погорелова [134] активную роль играет метод координат.

Перейдем к описанию методики изучения и применения указанных методов.

§ 50. Метод координат

Здесь мы рассмотрим следующие вопросы: о методе координат; уравнения фигур; использование метода координат.

О методе координат. В настоящее время большое число специалистов из разных областей знания имеет представление о прямоугольных декартовых координатах, так как эти координаты дают возможность наглядно-геометрически при помощи графика изобразить зависимость одной величины от другой. Так, врач строит график температуры больного в процессе болезни, экономист — график роста производства и т. д.

Область приложения координатного метода в геометрии весьма обширна. Сила метода координат в его алгоритмичности: в отличие от так называемого синтетического метода, основанного на непосредственном рассмотрении данных фигур и их составлении, при котором каждая задача требует обычно своего особого подхода, метод координат сводит геометрические задачи к алгебраическим, которые по своей природе легче алгоритмируются, т. е. приводятся к последовательности вычислений.

Геометрия, в которой основными средствами исследования служат метод координат и методы элементарной алгебры, называется аналитической.

Аналитическую геометрию можно охарактеризовать как представление точек n-мерного пространства упорядоченными системами n (или более) чисел — координатами этих точек. Например, любую точку Земли можно полностью охарактеризовать широтой, долготой и высотой над уровнем моря.

Хорошей иллюстрацией этой ситуации в одномерном случае является термометр. Пусть некоторой точке прямой ставится в соответствие число 0; положительные целые числа 1, 2, 3, ... располагаются на равных расстояниях друг от друга с одной стороны от 0, отрицательные целые числа -1, -2, -3, ... — с противоположной стороны, а дробные числа вставляются между ними естественным образом. Смещение точки x' относительно другой точки x есть положительное или отрицательное число $x'-x$.

В двумерном случае положение точки на плоскости может быть определено ее расстоянием до двух фиксированных перпендикулярных прямых — осей.

Прямоугольные координаты употреблялись в геометрии еще до начала нашей эры. Древний математик александрийской школы Аполлоний Пергский (живший в III—II вв. до н. э.) уже фактически пользовался прямоугольными координатами. Он определял при помощи них тщательно изучавшиеся и хорошо известные в то время кривые: параболу, гиперболу и эллипс. Аполлоний задавал их уравнениями:

$$y^2 = px \text{ (парабола)};$$

$$y^2 = px + \frac{p}{q}x^2 \text{ (гипербола)};$$

$$y^2 = px - \frac{p}{q}x^2 \text{ (эллипс)}$$

(p и q положительны).

Аполлоний, конечно, не выписывал уравнения в этой алгебраической форме, так как в те времена не существовало еще алгебраической символики. Он описывал уравнения, пользуясь геометрическими понятиями: y^2 в его терминологии есть площадь квадрата со сторонами y; px есть площадь прямоугольника со сторонами p и x и т. д. С этими уравнениями связаны названия кривых. Парабола (в переводе с греч.— «равенство»): квадрат y^2 имеет площадь, равную площади прямоугольника px. Гипербола по-гречески означает избыток: площадь квадрата y^2 превосходит площадь прямоугольника px. Эллипс по-гречески означает недостаток: площадь квадрата y^2 меньше площади прямоугольника px.

Впервые идея координатного метода была систематически развита Пьером Ферма (1601—1665) и Рене Декартом (1596—1650). В их формулировках расстояния до координатных осей могли быть только положительными числами или нулем. Важная идея о том, что одно или оба эти расстояния можно также считать и отрицательными, принадлежит Исааку Ньютону (1643—1727). Г. В. Лейбниц (1646—1716) первым назвал эти расстояния «координатными».

Таким образом, открытие декартовых координат не принадлежит Декарту. Декарт построил аналитическую геометрию, а в ней, как в фокусе, сошлись математические открытия медленно, с трудом слагавшиеся в течение тысячелетий. Работа Декарта «La Geometric», в которой излагались основные идеи аналитической геометрии на плоскости, была опубликована в 1637 г.

Значение аналитической геометрии состоит прежде всего в том, что она установила тесную связь между геометрией и алгеброй. Эти две ветви математики ко времени Декарта достигли уже высокой степени совершенства. Но развитие их в течение тысячелетий шло независимо друг от друга, и ко времени появления аналитической геометрии между ними намечалась лишь довольно слабая связь.

В соответствии с программой по математике для средней общеобразовательной школы (V—XI классы) [4] координаты впервые появляются в V—VI классах при изучении алгебраического материала: «Изображение чисел на прямой, координаты точки. Формула расстояния между двумя точками с заданными координатами. Прямоугольная система координат на плоскости, абсцисса и ордината точки».

Согласно этой программе в геометрии координаты изучаются в следующем объеме: «Координатная плоскость. Формула расстояния между двумя точками плоскости с заданными координатами. Уравнения прямой и окружности».

В отличие от других школьных учебников по геометрии в учебном пособии А. В. Погорелова [134] координаты заняли одно из центральных мест. Они вводятся и используются начиная с VII класса.

Учащиеся знакомятся с двумя важными формулами: формулой для нахождения координат середины отрезка при условии, что координаты концов отрезка известны; формулой для нахождения расстояния между двумя точками с заданными координатами.

При нахождении координат середины отрезка рассматриваются два случая возможного расположения этого отрезка: отрезок AB не параллелен оси y, т. е. $x_1 \neq x_2$ (x_1 и x_2 — абсциссы концов отрезка AB), и $x_1 = x_2$, т. е. отрезок AB параллелен оси y.

В первом случае с помощью теоремы Фалеса доказываем, что точка C_1 является серединой отрезка A_1B_1 ($AA_1 \parallel y$, $BB_1 \parallel y$), C — середина AB (рис. 155). А окончательное получение нужных формул связано с тем, что учащиеся должны понимать, что из того, что $A_1C_1 = C_1B_1$, следует, что $|x - x_1| = |x - x_2|$. Это обстоятельство должно быть известно учащимся из курса алгебры.

Формулы для вычисления расстояния между точками, координаты которых известны, также рассматриваются для различных случаев расположения этих точек.

Ищем расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$.

Вначале рассматриваем случай, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ (рис. 156). В этом случае получаем, что расстояние между точками A и A_1 равно $|y_1 - y_2|$, а расстояние между точками A и A_2 равно $|x_1 - x_2|$. Тогда по теореме Пифагора получаем искомое расстояние:

$$A_1A_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

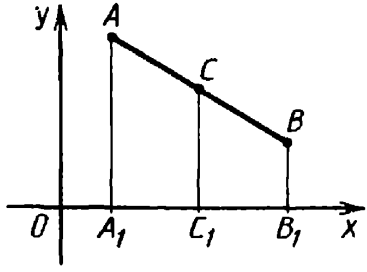


Рис. 155

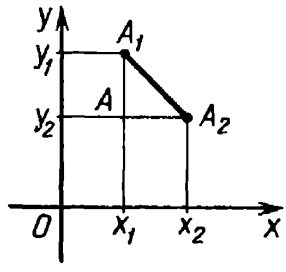


Рис. 156

После этого рассматриваем другие возможные случаи:

1) $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$;
2) $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$;
3) $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Убеждаемся, что полученная нами формула верна для каждого из этих случаев.

Как уже было сказано выше, в других учебных пособиях по геометрии координаты занимают другое положение. Так, в учебном пособии под редакцией А. Н. Колмогорова [101] координаты специально не изучались, были только некоторые пункты: «Перемещения в координатах», «Координаты вектора». В пробном учебнике Л. С. Атанасяна и др. [31] координатам посвящена отдельная глава в VIII классе, причем этот материал изучается после темы «Векторы» в отличие от пособия А. В. Погорелова. В пробных учебниках А. Д. Александрова и др. координаты появляются лишь в X классе. В главе VI рассматривается система прямоугольных координат, формула для расстояния между точками, задание сферы и шара в системе координат, задание фигур уравнениями и неравенствами, уравнение плоскости, другие системы координат.

Изучение координат в пространстве в разных пособиях у разных авторов осуществляется по-разному, однако координаты в пространстве и формула для расстояния между точками в пространстве рассматриваются всегда. В учебном пособии А. В. Погорелова [134] рассматриваются в пространстве и формулы нахождения координат середины отрезка.

Уравнения фигур. В курсе алгебры исходя из уравнения $y = f(x)$, где $f(x)$ — заданная функция, строили кривую, определяемую этим уравнением, т. е. строили график функции $y = f(x)$. Таким образом, шли как бы «от алгебры к геометрии». При изучении метода координат мы выбираем обратный путь: исходя из геометрических свойств некоторых кривых выводим их уравнение, т. е. идем как бы «от геометрии к алгебре».

В VII классе рассматриваются уравнения окружности и прямой, а в IX — уравнения плоскости и сферы. При этом обращается внимание на общее понятие «уравнение фигуры»: «Уравнением фигуры на плоскости в декартовых координатах называется уравнение с двумя неизвестными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры. И обратно: любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры» [134].

Уравнение фигуры на плоскости в общем виде можно записывать так: $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — функция двух переменных x и y. В пространстве уравнение фигуры можно записать так: $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ — функция трех переменных.

В некоторых пособиях, например в пробном учебнике А. Д. Александрова и др., рассматривается и возможность задания фигур с помощью неравенства:

«Фигура F в пространстве задается в некоторой системе координат x, y, z неравенством $\Phi(x, y, z) \geqslant 0$ или $F(x, y, z) > 0$,

если она представляет собой множество точек, координаты которых удовлетворяют этому неравенству».

Рассмотрим примеры, в которых по данному уравнению или неравенству надо определить задаваемую им геометрическую фигуру.

Пример 1. Уравнение $x^2+y^2+1=0$ определяет на плоскости пустое множество точек, неравенство $x^2+y^2+1<0$ также определяет пустое множество точек, а неравенство $x^2+y^2+1>0$ определяет всю плоскость.

Пример 2. Уравнение $x^2+y^2-1=0$ определяет на плоскости окружность, неравенство $x^2+y^2-1<0$ — внутреннюю область этой окружности, а $x^2+y^2-1>0$ — внешнюю область.

Пример 3. Уравнение $x^2+y^2=0$ определяет на плоскости одну точку, а в пространстве прямую, ось z.

Пример 4. Алгебраическое уравнение с одной переменной, например уравнение $F(x)=0$, определяет на плоскости множество прямых, параллельных координатной оси (в данном случае оси y), а в пространстве множество плоскостей, параллельных координатной плоскости (в данном случае плоскости yz). Необходимо заметить, что это множество (прямых или плоскостей) может оказаться и пустым, так как данное уравнение может и не иметь действительных решений, как, например, в случае уравнения $x^2+1=0$.

Естественно рассмотреть задачу, обратную той, которая была рассмотрена: для данной геометрической фигуры составить уравнение, которое определяло бы эту фигуру.

Именно с решения такой задачи начинают в действующем учебном пособии А. В. Погорелова, когда выводят уравнения окружности и прямой.

Рассмотрим другие примеры.

Пример 5. Составим уравнение отрезка AB, являющегося частью полуоси Ox в декартовой системе координат xy, при $A=O$.

Так как $AB=AM+MB$, то, полагая $AB=a$, $M(x, 0)$, найдем, что координаты x; y произвольной точки отрезка AB связаны уравнением $x+\sqrt{(x-a)^2}=0$.

Пример 6. Составим уравнение поверхности октаэдра.

Выберем начало прямоугольной декартовой системы координат центре октаэдра O, а оси проведем соответственно через три вершины A, B, C некоторой его грани (рис. 157). Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка поверхности октаэдра, то объем V октаэдра можно выразить двумя различными способами:

1) $V=8V_{OABC}=\frac{8}{3}OA\cdot S_{OBC}$;

2) $V=8(V_{OBMC}+V_{OAMC}+V_{AOMB})=\frac{8}{3}(|x|+|y|+|z|)\cdot S_{OBC}$.

Приравнивая эти два выражения объема, получаем искомое уравнение $|x|+|y|+|z|=a$, где $OA=a$.

В обязательную программу восьмилетней школы входят, как уже указывалось, уравнения окружности и прямой.

Составление уравнения окружности с центром в точке $A_0(a, b)$

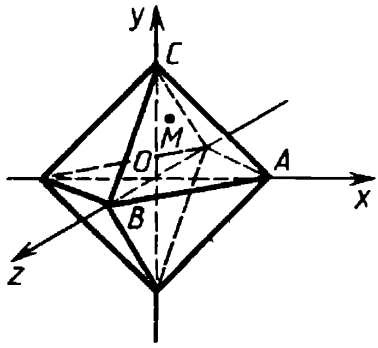


Рис. 157

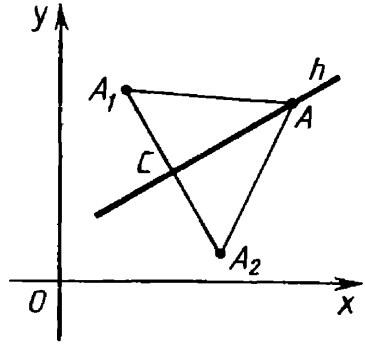


Рис. 158

и радиусом R начинается с того, что, используя геометрическое определение окружности, получаем уравнение окружности. Замечаем, что координаты x, y каждой точки A окружности удовлетворяют уравнению

$$(x-a)^2+(y-b)^2=h^2. \qquad (1)$$

Затем рассматриваем обратную задачу: покажем, что любая точка A, координаты которой удовлетворяют уравнению (1), принадлежат окружности, а это очевидно.

Таким образом, мы действительно показали, что уравнение (1) есть уравнение фигуры — окружности.

Вывод уравнения прямой проводится по той же схеме, что и уравнения окружности.

В учебном пособии А. В. Погорелова предлагается оригинальный способ получения уравнения произвольной прямой h на плоскости.

В системе координат изобразим прямую h и проведем прямую, ей перпендикулярную, причем $CA_1=CA_2$, $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2)$ (рис. 158). Воспользуемся свойством серединного перпендикуляра: любая точка $A(x, y)$ прямой h равноудалена от точек A_1 и A_2. Поэтому координаты ее удовлетворяют уравнению

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(x-x_2)^2+(y-b_2)^2. \qquad (2)$$

Обратное доказательство провести несложно. Преобразовав уравнение (2), получим, что уравнение прямой имеет вид:

$$ax+by+c=0.$$

После вывода уравнения прямой мы должны выяснить ее расположение на плоскости в зависимости от значений, которые могут принимать коэффициенты a, b, c. Это исследование практически ничем не отличается от исследования линейной функции в курсе алгебры. Здесь внимание обращается на геометрическое изображение прямой в системе координат в зависимости от значения коэффициентов. Проиллюстрируем это исследование на рисунке 159.

Дальнейшее исследование уравнения прямой проводится для случая $a\neq 0$, когда уравнение принимает вид $y=kx+q$, где k называется угловым коэффициентом прямой.

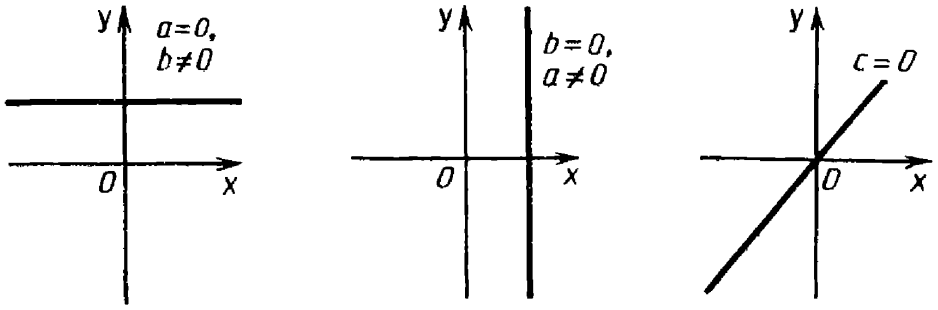


Рис. 159

Если точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ принадлежат данной прямой, то $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\operatorname{tg}\alpha$, где α — острый угол, который образует данная прямая с осью x (рис. 160).

Итак, делается вывод: коэффициент k в уравнении прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью x.

В курсе геометрии средней школы в пространстве рассматриваются уравнения плоскости и сферы.

Уравнение плоскости выводится с широким применением векторного аппарата.

Учащиеся убеждаются в том, что уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz+d=0$, причем коэффициенты a, b и c являются координатами вектора, перпендикулярного этой плоскости.

Кроме того, здесь учащиеся по-новому подходят к заданию прямой в пространстве.

Так как любая прямая полностью определяется, если заданы две плоскости, проходящие через эту прямую, то отсюда следует, что любая прямая в пространстве задается двумя линейными уравнениями — уравнениями плоскостей, проходящих через эту прямую:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \end{cases}$$

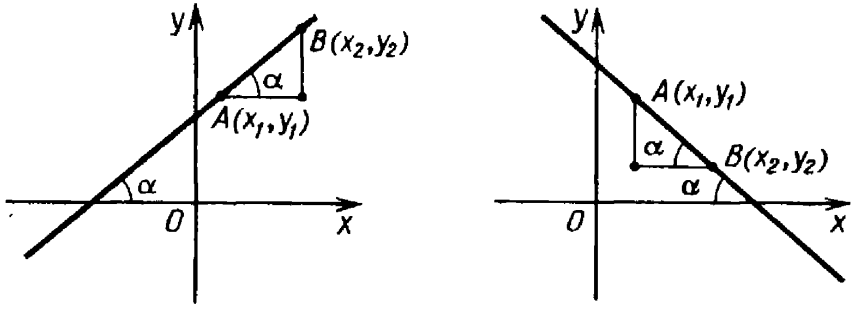


Рис. 160

Уравнение сферы выводится так же, как и уравнение окружности. Сфера с центром в точке A с координатами a, b и c и радиусом R задается уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Кроме того, доказывается теорема: «Линия пересечения двух сфер есть окружность».

Доказательство этой теоремы — типичный пример использования метода координат.

Выбираем систему координат (примем прямую, соединяющую центры сфер, за ось x) и рассматриваем систему уравнений, задающих данные сферы:

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2+z^2=R_1^2,\\(x-b)^2+y^2+z^2=R_2^2,\end{cases}$$

где центр первой сферы имеет координаты $(a, 0, 0)$ и радиус R_1, а центр второй сферы имеет координаты $(b, 0, 0)$ и радиус R_2.

Убеждаемся, что точки пространства, координаты которых удовлетворяют этой системе, образуют окружность.

Использование метода координат. Здесь можно говорить об использовании метода координат при построении школьного курса геометрии, в частности при решении геометрических задач, при изучении различных разделов школьной математики и математики вообще.

Сразу же после рассмотрения основных понятий, связанных с введением координат на плоскости и уравнений окружности и прямой, с учащимися изучаются такие вопросы: пересечение двух окружностей, пересечение прямой и окружности, определение синуса, косинуса и тангенса любого угла от 0° до 180°. Это есть первые приложения метода координат, с которыми знакомятся учащиеся.

Следует сразу обратить внимание учащихся, что основную роль в вопросах приложений метода координат занимает рациональный выбор расположения осей координат.

Типичным примером геометрической задачи, решаемой методом координат, является задача, рассматриваемая в пособии [134]: «При каком условии окружности с центрами O и O_1 и радиусами a и b и расстоянием между центрами c пересекаются?»

Решение задачи начинается с выбора системы координат.

Выберем ее так: начало координат — точка O — центр одной окружности; положительная полуось оси x — полупрямая OO_1.

После этого без труда получаем уравнения обеих окружностей:

$$x^2+y^2=a^2,\ (x-c)^2+y^2=b^2.$$

Решение задачи сводится к решению системы

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\(x-c)^2+y^2=b^2.\end{cases}\qquad(1)$$

Если окружности пересекаются, то координаты x, y точки пересечения удовлетворяют обоим уравнениям системы. И обратно: если

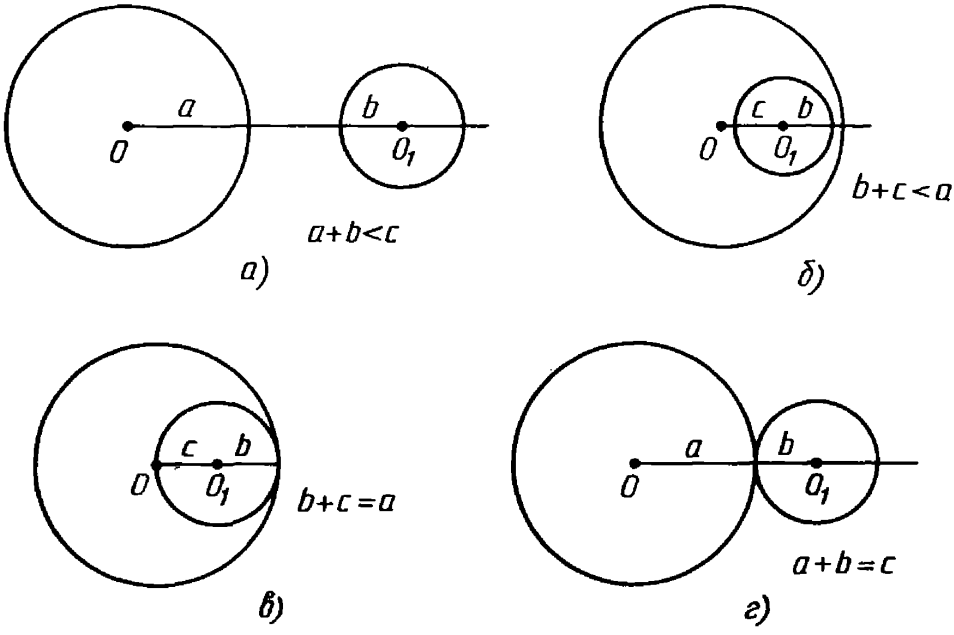


Рис. 161

система уравнений (1) имеет решение, т. е. существуют x и y, удовлетворяющие обоим уравнениям, то они являются координатами точки пересечения окружностей. Число точек пересечения, если окружности пересекаются, равно числу решений системы.

Решение системы — это уже задача курса алгебры. Здесь следует проследить только за тем, чтобы этот материал уже был пройден учащимися в курсе алгебры.

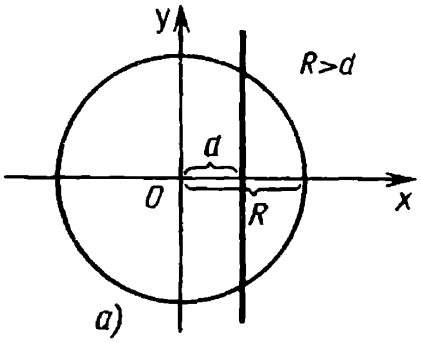
В заключение получаем такой вывод: если одно из чисел a, b, c больше суммы двух других, то окружности не пересекаются (рис. 161 *а, б*); если одно из этих чисел равно сумме двух других, то окружности касаются (рис. 161 *в, г*); если каждое из этих чисел меньше суммы двух других, то окружности пересекаются в двух точках (рис. 161 *д*).

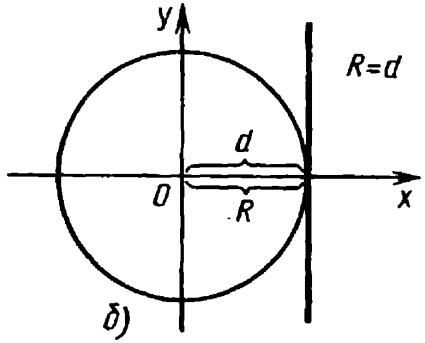
В случае рассмотрения вопроса о пересечении прямой с окружностью поступаем так.

Пусть R — радиус окружности и d — расстояние от центра окружности до прямой. Примем центр окружности за начало координат, а прямую, перпендикулярную к данной,— за ось x (рис. 162).

В этой системе координат прямая и окружность будут заданы уравнениями

$$x=d,\ x^2+y^2=R^2.$$





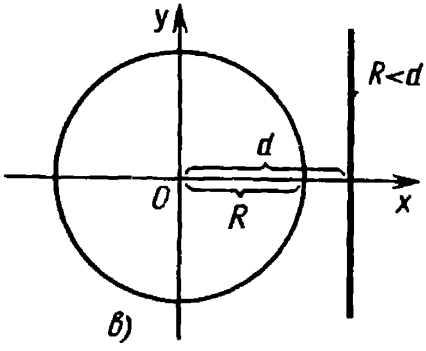


Рис. 162

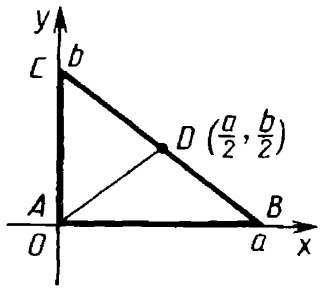
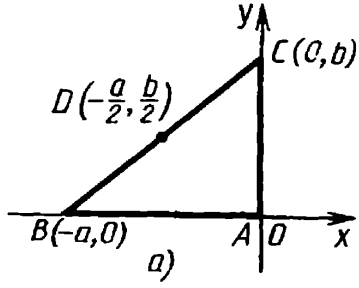


Рис. 163



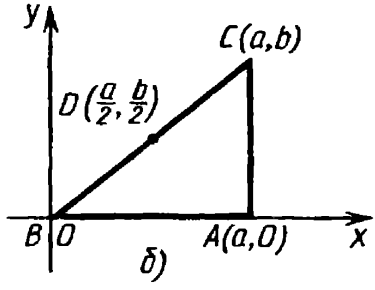


Рис. 164

Таким образом, прямая и окружность пересекаются, если система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ x=d \end{cases}$ имеет решение. И обратно: всякое решение этой системы дает координаты x, y точки пересечения прямой с окружностью.

Решая систему, приходим к выводу: окружность и прямая имеют две точки пересечения, если $R>d$ (рис. 162 *а*); прямая и окружность касаются, если $R=d$ (рис. 162 *б*); прямая и окружность не пересекаются, если $R<d$ (рис. 162 *в*).

Мы уже говорили о том, что выбор системы координат имеет очень важное значение при применении метода координат.

Изучим этот вопрос подробнее. Рассмотрим такую теорему: «Середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин».

Первым шагом при применении метода координат является такой выбор осей и начала координат, при котором алгебраические выкладки становятся более простыми. Для нашей задачи удачный выбор системы координат показан на рисунке 163. Таким образом, начало координат помещаем в точку A, а оси проводим через точки B и C так, чтобы эти точки лежали на положительных лучах осей. Следовательно, $B(a, 0)$ и $C(0, b)$. Поэтому по формуле середины отрезка $D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Теперь $AD=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2}$, $BD=$ $=\sqrt{\left(0-\frac{a}{2}\right)^2+\left(0+\frac{b}{2}\right)^2}$. Поэтому $AD=BD$. А так как по определению середины отрезка $BC=CD$, то теорема доказана.

Можно выбрать систему координат и по-другому (рис. 164 *а, б*). Если выбрать оси совсем случайно, то легкую задачу можно превратить в очень трудную.

Чтобы начать доказательство исходя из рисунка 165, нужно найти способ, позволяющий выразить алгебраически, что $\triangle ABC$ имеет при вершине A прямой угол. Сделать это можно, но будет это не очень просто.

Если дан параллелограмм $ABCD$, то помещаем начало координат в вершину A, а оси проводим так, чтобы вершина B принадлежала положительному лучу оси x, а вершины C и D — верхней полуплоскости (рис. 166). Тогда $\frac{e-c}{d-b}=0$, следовательно, можем на рисунке заменить e на c. Мы также утверждаем, что $d=a+b$. Если стороны AD и BC не вертикальны, то $\frac{e-0}{b-0}=\frac{c-0}{d-0}$, т. е. $b=$ $=d-a$ и $d=a+b$. Если стороны AD и BC вертикальны, то $d=$ $=a+0=a+b$, $b=0$, $d=a$.

Пользуясь этими соотношениями, можно легко доказать теоремы о параллелограммах.

Приведем пример.

Т е о р е м а. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дано, что $AC=BD$. По формуле расстояний между точками это означает, что

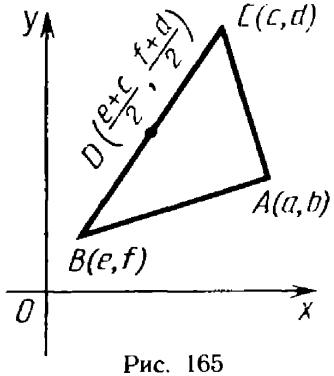


Рис. 165

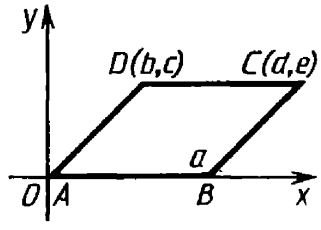


Рис. 166

$$\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2}=\sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2},$$

или

$$(a+b)^2+c^2=(a-b)^2+c^2,$$

или, наконец, $a^2+2ab+b^2+c^2=a^2-2ab+b^2+c^2$.

Значит, $4ab=0$.

Так как $a>0$, то отсюда следует, что $b=0$, а это означает, что точка D принадлежит оси y. Поэтому $\angle DAB$ — прямой угол и $ABCD$ — прямоугольник.

Приведем примеры некоторых геометрических задач, решаемых методом координат.

Задача 1. Два предприятия A и B производят продукцию с одной и той же ценой m за одно изделие. Однако автопарк, обслуживающий предприятие A, оснащен более современными и более мощными грузовыми автомобилями. В результате транспортные расходы на перевозку одного изделия составляют для предприятия A 10 к. на 1 км, а для предприятия B 20 к. на 1 км. Расстояние между предприятиями 300 км. Как территориально должен быть разделен рынок сбыта между двумя предприятиями для того, чтобы расходы потребителей при покупке изделий были минимальными?

Решение. Для решения данной задачи воспользуемся методом координат. Систему координат выберем так, чтобы ось x проходила через пункты A и B, а ось y — через точку A.

Пусть N — произвольная точка, s_1 и s_2 — расстояния от точки до предприятий A и B (рис. 167).

При доставке груза из пункта A расходы равны $m+10s_1$.

При доставке груза из пункта B расходы равны $m+20s_2$.

Если для пункта N выгоднее доставлять груз с предприятия A, то $m+10s_1<m+20s_2$, откуда $s_1<2s_2$, в обратном случае получим $s_1>2s_1$.

Таким образом, границей области для каждой точки, до которой расходы на перевозку груза из пунктов A и B равны, будет множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$s_1=2s_2. \qquad (1)$$

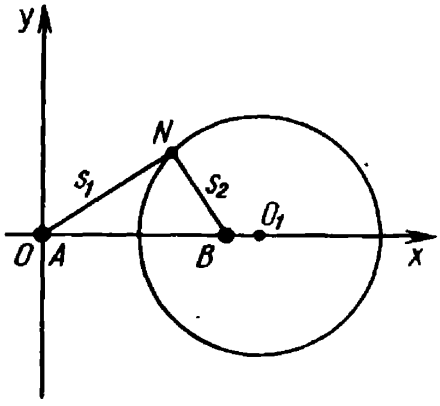


Рис. 167

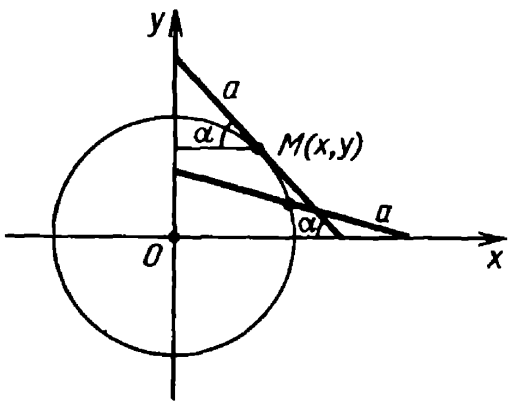


Рис. 168

Выразим s_1 и s_2 через координаты:

$$s_1=\sqrt{x^2+y^2},\ s_2=\sqrt{(300-x)^2+y^2}.$$

Имея в виду (1), получим $(x-400)^2+y^2=200^2$.

Это есть уравнение окружности. Следовательно, для всех пунктов, попадающих во внутреннюю область круга, выгоднее привозить груз из пункта B, а для всех пунктов, попадающих во внешнюю часть круга,— из пункта A.

Задача 2. Лестница, стоящая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз. По какой линии движется котенок, сидящий на середине лестницы?

Решение. Выберем прямоугольную систему координат, где ось x находится на полу, а ось y — на стене.

Допустим, что лестница имеет длину, равную $2a$. Тогда из рисунка 168 видно, что точка $M(x, y)$, находясь все время в середине лестницы, имеет координаты

$$x=a\cos\alpha,\ y=a\sin\alpha.$$

После преобразования получим:

$$x^2+y^2=a^2.$$

Следовательно, котенок будет двигаться по дуге окружности.

Задача 3. Два наблюдаемых пункта находятся в точках $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Пункт наблюдения O находится на прямой AB и удален от точки A на расстояние a км, а от B на расстояние c км ($c>a$). Наблюдатель для безопасности должен идти по такому пути, чтобы расстояние от него до пункта A все время оставалось в два раза больше, чем расстояние от него до пункта B. По какой линии должен идти наблюдатель?

Решение. Примем за начало координат наблюдательный пункт и направление оси x через пункты A и B (по условию задачи эти три точки находятся на одной прямой).

Пусть наблюдатель находится в точке $M(x, y)$. Вычислим расстояние от наблюдателя до пунктов A и B (рис. 169):

$$MA=\sqrt{(x-a)^2+y^2},\ MB=\sqrt{(c-x)^2+y^2}.$$

По условию задачи имеем:

$MA=2MB$, т. е.

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=2\sqrt{(c-x)^2+y^2}.$$

Решая это уравнение, получим:

$$(x-a)^2+y^2=4\left((c-x)^2+y^2\right).$$

Раскроем скобки:

$$3y^2+3\left(x+\frac{a-4c}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{2}{3}(a^2-6c+8c^2),$$

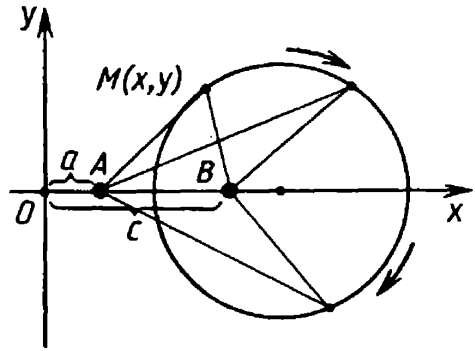


Рис. 169

или окончательно $y^2+\left(x+\frac{a-4c}{3}\right)^2=\frac{2}{3}(a^2-6c+8c^2)$.

Следовательно, наблюдатель должен идти по окружности с центром $\left(\frac{4c-a}{3}, 0\right)$ и радиусом $\sqrt{\frac{2}{3}(a^2-6c+8c^2)}$.

В последующих разделах мы покажем, как координаты используются при изучении преобразований, особенно параллельного переноса, а также рассмотрим использование координат при изучении векторов.

§ 51. Преобразования плоскости и пространства

О методе преобразований. Под преобразованием в геометрии понимают, например, в случае плоскости отображение всей плоскости на себя, при котором каждая точка X отображается в единственную точку X_1, а каждой точке Y_1 соответствует единственная точка Y. Идея преобразований имеет основополагающее значение во многих областях математики; например, при нахождении значений функции $y=f(x)$, отображаем множество значений переменной x на множество соответствующих значений y.

У разных авторов школьных учебных пособий по геометрии преобразования занимают разное по объему и по уровню строгости положение. Так, например, в учебнике А. П. Киселева [91] о преобразованиях вообще не говорилось. В учебном пособии под редакцией А. И. Колмогорова преобразования занимали центральное место, именно они служили основой доказательства многих теорем, их обоснованию была посвящена специальная аксиома подвижности.

В пробном учебнике Л. С. Атанасяна и др. рассматривается специальная глава «Перемещения, равенство фигур», где вводятся понятия центральной и осевой симметрии и изучаются простейшие свойства фигур, имеющих центр и ось симметрии. Затем рассматриваются параллельный перенос и поворот фигур и вводится понятие перемещения фигуры. На этой основе дается определение равенства фигур.

В курсе геометрии А. В. Погорелова не вдаются в подробности математического определения понятия «преобразования». Оно вводится на наглядном, интуитивном уровне: «Если каждую точку данной фигуры сместить каким-нибудь способом, то мы получим новую фигуру. Говорят, что эта фигура получена преобразованием из данной» [134].

В отличие от самого понятия преобразования конкретные виды преобразований в этом пособии четко определяются.

Есть одна особенность, которая связана с тем, что симметрия относительно прямой, симметрия относительно точки, гомотетия определяются как преобразования с соответствующими свойствами, параллельный перенос определяется как преобразование в координатной форме, а поворот определяется уже как движение.

В пространстве рассматривается еще одно преобразование — симметрия относительно плоскости.

В учебном пособии А. В. Погорелова [134] определения преобразований и способ построения фигур при преобразованиях как бы слиты воедино, именно здесь проявляется целесообразность проводимой в этом пособии линии конструктивных определений.

Обязательная программа не предусматривает широкого изучения различных свойств этих преобразований. Вопрос использования преобразований при решении геометрических задач следует вынести в основном на факультативные занятия и внеклассную работу.

Движения и их свойства. Равенство фигур. Среди преобразований выделим два вида: движения и преобразования подобия. Рассмотрим движения и его свойства.

Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называется движением, если оно сохраняет расстояние между точками, т. е. переводит любые две точки X и Y фигуры F в точки X_1 и Y_1 фигуры F_1 так, что $XY=X_1Y_1$.

Доказательство того, что симметрия относительно точки есть движение, в пособии А. В. Погорелова проводится с использованием признака равенства треугольников.

Тот факт, что осевая симметрия есть движение, доказывается с привлечением координатного метода. Система координат выбирается так: ось симметрии выбирается за ось y.

Рассмотрев две произвольные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и их образы при осевой симметрии $A_1(-x_1, y_1)$ и $B_1(-x_2, y_2)$ и убедившись, что расстояния AB и A_1B_1 равны, получаем то, что требовалось доказать.

В геометрии часто рассматривают последовательное выполнение двух и более преобразований. Результат последовательного выполнения преобразований называется композицией преобразований. В обязательной программе предусмотрено изучение только одного свойства композиций преобразований: два движения, выполненные последовательно, дают снова движение.

Изучается также преобразование, обратное данному.

Пусть преобразование фигуры F в фигуру F_1 переводит различные точки фигуры F в различные точки фигуры F_1. Пусть произвольная точка X фигуры F при этом преобразовании переходит в точку X_1 фигуры F_1. Преобразование фигуры F_1 в фигуру F, при котором точка X_1 перейдет в точку X, называется преобразованием, обратным данному.

Доказывается, что преобразование, обратное движению, является также движением.

Если до доказательства свойств движения мы могли при преобразованиях оперировать только с точками, то теперь можем подвергать преобразованиям отрезки, лучи, прямые, углы и точно знать, что они перейдут в одноименные фигуры и, более того, отрезки перейдут в равные отрезки, а углы — в равные углы.

В пространстве определение движения и указанные выше свойства формулируются и доказываются так же.

Движение используется для определения равенства фигур. Равенство фигур при различиях подхода к построению школьного курса геометрии вводится по-разному. Иногда общего определения «равных фигур» вообще не дается, иногда оно вводится сразу. В пособии А. В. Погорелова [134] сначала вводятся понятия равенства отрезков, углов, треугольников, а затем общее определение равенства фигур. Так же обстоит дело и в пробном учебнике Л. С. Атанасяна и др.

Общее определение равенства фигур дается с использованием понятия движения:

две фигуры называются равными, если они движением переводятся одна в другую.

Здесь перед учащимися ставится важная задача — доказать, что:

равенство треугольников, определяемое через их совмещение движением, и равенство, как мы его понимали до сих пор, выражают одно и то же.

Фактически это доказательство равносильности двух определений, т. е. нужно доказать, что из первого следует второе, и наоборот.

Мы исходили из того, что в записи равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ предполагается, что совмещаемые при движении вершины стоят на соответствующих местах.

После этого доказательство в одну сторону следует сразу же из определения движения, т. е. при движении сохраняются расстояния и углы.

А как быть, если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$?

Могут ли в таком случае эти треугольники быть совмещены движением (причем вершина A перешла бы в вершину A_1, B — в B_1, C — в C_1)?

Решение задачи зависит от расположения треугольников. Но и для случая, который изображен на рисунке 170, возможны различные решения.

1. На рисунке 170 *а* изображено одно из возможных решений. $\triangle A_1B_2C_2$ получен из треугольника ABC при симметрии относи-

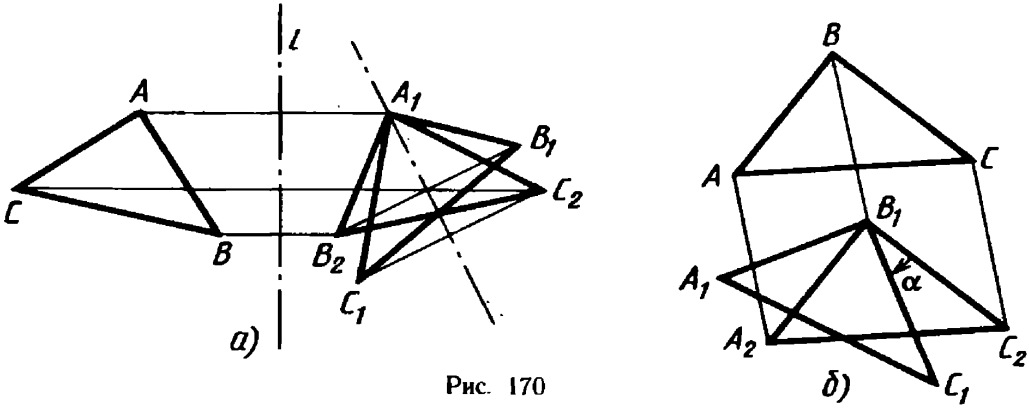


Рис. 170

тельно серединного перпендикуляра к отрезку AA_1 — прямой l. $\triangle A_1B_1C_1$ получен из треугольника $A_1B_2C_2$ при симметрии относительно прямой, соединяющей точку A_1 с серединой отрезка B_2B_1. Известно, что последовательное выполнение движений есть движение. Таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ получен из треугольника ABC движением.

2. На рисунке 170 *б* изображен другой вариант решения. $\triangle A_2B_1C_2$ получен из треугольника ABC параллельным переносом в направлении, заданном лучом AA_2 на расстояние AA_2. $\triangle A_1B_1C_1$ получен из треугольника $A_2B_1C_2$ поворотом на угол α по часовой стрелке.

Доказательство в учебном пособии А. В. Погорелова не связано с конкретным расположением треугольников, поэтому в случае выполнения второй симметрии в первом варианте решения образ точки C_2 — точка C_3 может оказаться лежащей по разные стороны с точкой C_1 относительно прямой A_1B_1, а тогда нужна еще одна симметрия относительно прямой A_1B_1.

Преобразование подобия. Подобные фигуры. Как указывалось в первом разделе, в геометрии важную роль играют преобразования подобия. В первом разделе мы привели один пример преобразования подобия — гомотетию.

Определение преобразования подобия похоже на определение движения: преобразование фигуры F в фигуру F_1 называется преобразованием подобия, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз. Это значит, что если произвольные точки A и B фигуры F при этом преобразовании переходят в точки A_1 и B_1 фигуры F_1, то $A_1B_1 = kAB$.

Число k называется коэффициентом подобия.

После введения определения преобразования подобия доказываем, что:

гомотетия есть преобразование подобия.

Теорема доказывается с применением метода координат. Имеем гомотетию с центром O и коэффициентом k.

Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром гомотетии, k — данный коэффициент гомотетии.

Рассмотрим преобразование, при котором произвольная точка (x, y) переходит в точку (kx, ky). Докажем, что это преобразование и есть гомотетия.

Рассмотрим произвольную точку A некоторой фигуры F, и пусть ее координаты (x_1, y_1). Она переходит в точку A' (kx_1, ky_1).

Прямая OA проходит через начало координат, а значит, имеет уравнение $ax + by = 0$. Ему удовлетворяют координаты точки A, т. е. $ax_1 + by_1 = 0$. Покажем, что и координаты точки A' удовлетворяют этому уравнению:

$$a(kx_1) + b(ky_1) = k(ax_1 + by_1) = 0,$$

а значит, точка A' тоже лежит на прямой OA.

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}; \qquad OA' = \sqrt{(kx_1)^2 + (ky_1)^2} = k\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Следовательно, $OA' = kOA$, а значит, по определению гомотетии наше преобразование есть гомотетия с центром O и коэффициентом k.

Докажем, что это преобразование является преобразованием подобия, для этого доказываем, что $A'B' = kAB$, где A и B — данные точки, а A' и B' — это точки, в которые точки A и B перейдут в данной гомотетии.

Так же как и для движения, доказывается, что при преобразовании подобия три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, переходят в три точки A_1, B_1, C_1, также лежащие на одной прямой. Причем если точка B лежит между точками A и C, то B_1 лежит между точками A_1 и C_1. Отсюда следует, что преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки.

С использованием гомотетии доказывается, что при преобразовании подобия сохраняются углы между полупрямыми.

В заключение изучения преобразований подобия рассматривается такое его свойство: не всякое преобразование подобия является гомотетией.

На рисунке 171 фигура F_1 получена из фигуры F гомотетией с коэффициентом k, а F_2 получена из F_1 при помощи симметрии с осью l. Совершенно очевидно, что фигуры F и F_2 не гомотетичны, однако они могут быть получены одна из другой преобразованием подобия, так как при этом преобразовании сохраняются отношения расстояний между соответствующими точками.

С помощью преобразования подобия дается определение подобных фигур.

Подобие фигур в различных курсах геометрии рассматривается по-разному. Иногда вообще не дается общее определение подобных фигур, а рассматривается только подобие треугольников или многоугольников.

Но и когда вводится понятие подобия фигур, можно поступить по-разному. Можно сразу дать определение подобных фигур, а затем рассматривать подобие треугольников. Именно так поступают в учебном пособии А. В. Погорелова [134]. А, например, в пробном учебнике Л. С. Атанасяна и др. [30], [31] сначала изучаются подобные многоугольники, а уже затем дается общее определение подобных фигур. Следует отметить, что определение подобия фигур мало чем отличается в разных пособиях: «Две фигуры F и F_1 называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия».

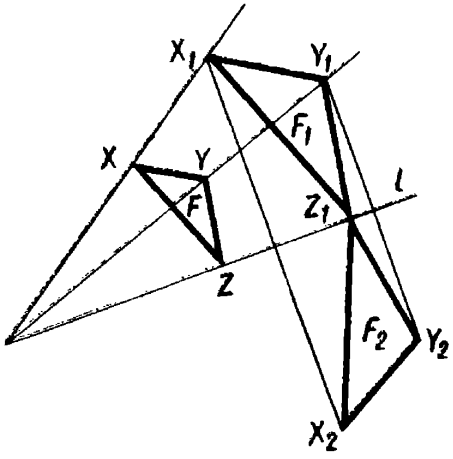


Рис. 171

В записи подобия треугольников $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ предполагается, что вершины, совмещае-

мые преобразованием подобия, стоят на соответствующих местах, т. е. A переходит в A_1, B — в B_1, C — в C_1.

Из свойств преобразования подобия следует, что у подобных многоугольников соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны. В частности, у подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=$ $=\frac{BC}{B_1C_1}=k$. Сформулируем признаки подобия треугольников.

Два треугольника подобны:

1) если два угла одного соответственно равны двум углам другого;

2) если две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, лежащие между этими сторонами, равны;

3) если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого.

Эти признаки часто доказываются с использованием гомотетии.

Прежде всего если у нас есть два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, подобие которых надо доказать, то следует найти коэффициент подобия. Этот коэффициент находим как отношение соответственных сторон: $k=\frac{AB}{A_1B_1}$.

Этапы доказательства, например, первого признака можно указать такие:

1) Выполняем гомотетию $\triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом k, центр гомотетии выбираем произвольно. Полученный при гомотетии треугольник обозначим $A_2B_2C_2$.

2) Доказывается, что $\triangle A_2B_2C_2=\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2\infty\triangle A_1B_1C_1$.

3) Так как $\triangle A_1B_1C_1$ может быть получен из $\triangle ABC$ в результате последовательного выполнения преобразования подобия и движения, то они подобны.

Следует дополнительно пояснить, почему последовательное выполнение преобразования подобия и движения есть преобразование подобия. Это легко устанавливается, если вспомнить определение движения и преобразования подобия.

Так же как и на плоскости, определяются гомотетия и преобразование подобия в пространстве. Так же доказывается, что гомотетия в пространстве является преобразованием подобия.

Использование метода преобразований. Мы уже частично касались применений метода преобразований при рассмотрении различных теоретических вопросов курса геометрии: применение движений при определении равенства фигур, применение преобразований подобия при изучении подобных треугольников. В следующем разделе, посвященном векторному методу, будет показана та огромная роль, которую при изучении векторов играет параллельный перенос.

В этом разделе остановимся на показе применений метода преобразований при решении разного рода геометрических задач.

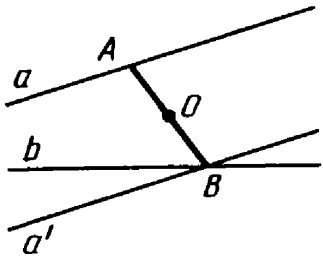


Рис. 172

Как уже говорилось, на уроках геометрии мы глубоко не знакомим учащихся с методом преобразований при решении задач. Этот вопрос выносится на внеклассную работу, на факультативные занятия.

1. Использование метода преобразований при решении **задач на построение**. Хорошо известны этапы решения задач на построение: 1) поиск решения; 2) выполнение построения; 3) доказательство правильности решения; 4) исследование решения.

Наибольшие трудности при решении задач на построение вызывает поиск решения. Он начинается с предположения, что задача решена, т. е. искомая фигура построена. Затем изучают построенную фигуру и ее связи с данными задачи. Вот здесь и могут помочь различные виды преобразований фигур для выяснения последовательности выполнения построений искомой фигуры.

Рассмотрим примеры решения задач на построение с использованием различных преобразований фигур:

а) *Симметрия относительно точки*

З а д а ч а 1. Построить отрезок AB с заданной серединой O и концами на двух данных прямых a и b.

Р е ш е н и е. Ясно, что расположение прямых и точки O влияет на существование решения и число решений.

Но нас сейчас интересует, как поможет центральная симметрия в отыскании решения. Рассмотрим один из возможных случаев (рис. 172). Предположим, что отрезок построен. Мы видим, что искомый отрезок центрально-симметричен относительно точки O. Это наталкивает на мысль, что один конец отрезка получим, если построим прямую a', симметричную прямой a относительно точки O. Для нахождения точки A следует продолжить OB до пересечения с прямой a. Проведение исследования выявит те условия, при которых задача не имеет решений.

б) *Симметрия относительно прямой*

З а д а ч а 2. Даны две концентрические окружности. Построить ромб, отличный от квадрата, чтобы: 1) две вершины принадлежали одной окружности, а две другие вершины — другой; 2) три вершины принадлежали одной окружности, а одна — другой.

Р е ш е н и е. 1) Построим любой диаметр AB одной окружности и перпендикулярный ему диаметр CD другой окружности (рис. 173 *а*). Четырехугольник $CBDA$ — ромб. У него диагонали в точке пересечения делятся пополам, а значит, он параллелограмм. Кроме того, его стороны равны: $CB=DB$, $CA=DA$, так как AB — ось симметрии; $AC=BC$, $BD=AD$, так как CD — ось симметрии.

2) Диаметр AB меньшей окружности продолжим до пересечения в точке C с большей окружностью. Построим оси симметрии отрезков AC и BC (рис. 173 *б*). Получим два ромба, удовлетворяющие условию задачи, $BMCM_1$ и $AKCK_1$ (доказательство проведите самостоятельно).

в) *Поворот*

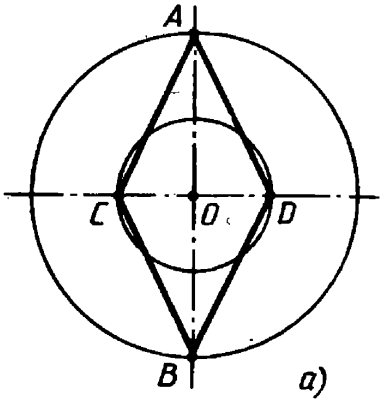
З а д а ч а 3. Построить такой равносторонний треугольник, чтобы одна его вершина совпала с данной точкой O, а две другие принадлежали двум данным окружностям (рис. 174).

Р е ш е н и е. Выполним поворот окружности с центром в точке O_1 на угол 60° вокруг центра по часовой стрелке. Эта окружность перейдет в окружность с центром в точке O_3. Полученная окружность с центром O_3 может не пересечь, касаться или пересечь в двух точках окружность с центром в точке O_2. Точка касания или точка пересечения окружностей с центрами O_3 и O_2 будет являться второй вершиной искомого равностороннего треугольника.

г) *Параллельный перенос*

З а д а ч а 4. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и прямая a. Построить отрезок $AB=d$ с концами на данных окружностях, параллельный прямой a.

Р е ш е н и е. Ситуация, рассматриваемая в этой задаче, очень похожа на ситуацию в задаче 1. Предположим, что задача решена и отрезок построен (рис. 175). Можно заметить, что если окружность ω_1 перенести параллельным переносом в направлении, параллельном прямой a, на расстояние d, получим точку B — точку пересечения



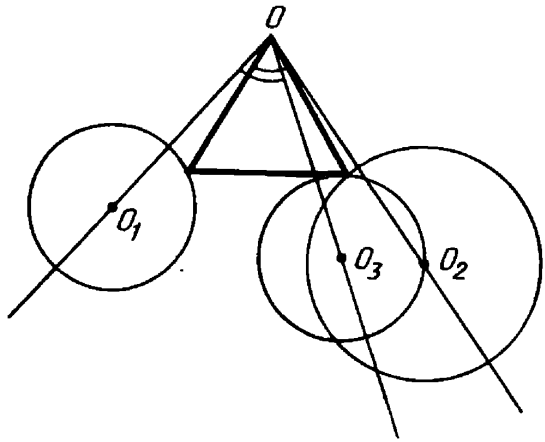


Рис. 174

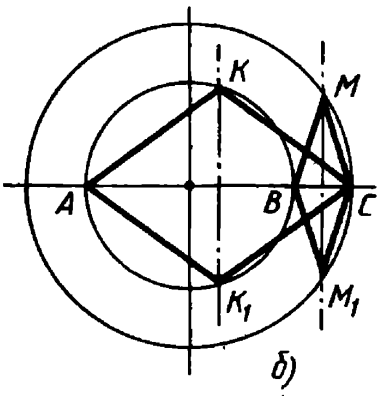


Рис. 173

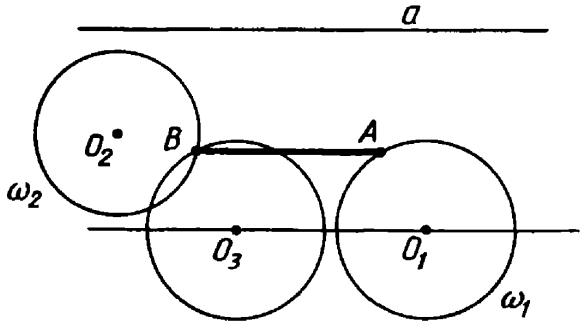


Рис. 175

окружности ω_2 и окружности, в которую перейдет окружность ω_1 при этом параллельном переносе. Точка B является одним из концов искомого отрезка. Получить другой конец A отрезка можно, отложив на прямой, параллельной a и проходящей через точку B, от точки A отрезок длиной d. Исследование покажет, при каких условиях задача имеет решение.

д) *Гомотетия*

З а д а ч а 5. В данный сегмент вписать квадрат так, чтобы две его вершины принадлежали дуге, а две другие — основанию сегмента.

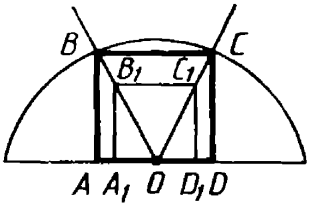


Рис. 176

Р е ш е н и е. Следует заметить, что, если квадрат расположить так, как показано на рисунке 176, т. е. так, чтобы одна его сторона находилась на основании сегмента и середина этой стороны совпадала с серединой основания сегмента, то

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{A_1B_1}{A_1O}=\frac{AB}{AO}=2.$$

Итак, все квадраты, построенные таким образом, гомотетичны. Для получения искомого квадрата следует провести луч OB, составляющий с OA угол α, такой, что $\operatorname{tg}\alpha=2$, до пересечения его с окружностью. Точка пересечения B и есть одна из вершин искомого квадрата.

2. Метод преобразований широко применим к решению так называемых геометрических **задач на максимум и минимум** (задачи школьного курса математики, которые связаны с понятиями наибольшего, наименьшего, наилучшего, наиболее выгодного, в том числе с понятием экстремума). (Подробнее о задачах на экстремум см. [62].)

Сущность применения метода преобразований для решения таких задач состоит в следующем.

Пусть требуется найти наибольшие или наименьшие значения элемента x фигуры F, однозначно определенного элементами x, a_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$. Метод нахождения наибольшего или наименьшего значения элемента x состоит в следующем:

1) Дадим элементу x определенное значение $x=c$ и решим задачу на построение фигуры F' по заданным элементам x и a_i.

2) Решив эту задачу, считаем элемент c переменным. Затем, применяя те или иные преобразования, замечаем те особенности, которые возникают при достижении элементом x максимального или минимального значения. Выделение указанной особенности позволяет сделать заключение о наибольшем или наименьшем значении элемента x фигуры F.

З а д а ч а 1. Из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине найти треугольник, имеющий максимальный периметр.

Р е ш е н и е. Предположим, что $P_{ABC}=a+AC_1+BC_1$ (рис. 177). Как видим, величина периметра зависит от длин двух сторон AC_1 и BC_1.

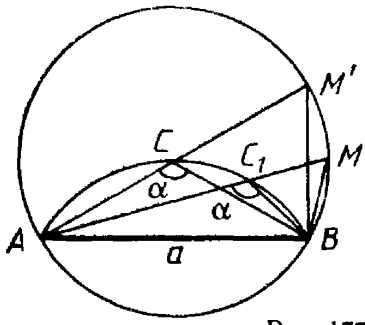


Рис. 177

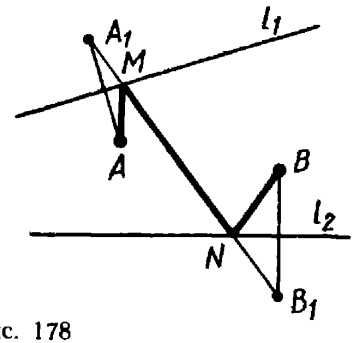


Рис. 178

Обозначим через x сумму AC_1+BC_1, максимум которой нас интересует. Дадим x некоторое значение, например $x=e$, и построим треугольник AC_1B, в котором $AB=a$, $\angle AC_1B=\alpha$. Так как каждая из сторон AC_1 и BC_1 неизвестна, а сумма их равна e, то ломаную AC_1B нужно «выпрямить». Для этого выполним поворот на угол $180°-\alpha$. Далее вместе с данной фигурой рассматриваем $\triangle BC_1M$, где M принадлежит AC_1. Рассматривая $\triangle AMB$, замечаем, что в нем известны две стороны и угол, прилежащий к одной из них, т. е. $AM=e$, $AB=a$ и $\angle AMB=0{,}5\alpha$, а поэтому легко такой треугольник построить.

Решив эту задачу, AM считаем переменным, т. е. $AM=x$. Из рисунка 177 можно заметить, что если точка M перемещается по окружности, то AB и $\angle AMB$ считаются постоянными, а сторона AM изменяется и принимает наибольшее значение тогда, когда она проходит через центр C дуги сегмента, вмещающего угол α, т. е. занимает положение AM'.

Таким образом, вершина C совпадает с центром C: $AC=CM'=R$. Далее доказывается, что треугольник ABC, которому отвечает наибольший периметр, равнобедренный.

Задачи, решаемые этим методом, распределим по виду тех движений, которые чаще всего используются при их решении.

1) При решении геометрических задач на максимум и минимум часто используется осевая симметрия.

Задача 2. На плане местности (рис. 178) отмечены пункты A и B, которые расположены между двумя прямолинейными дорогами l_1 и l_2. Найдите точки M и N, такие, чтобы сумма $AM+MN+NB$ была наименьшей, если M лежит на дороге l_1, а N — дороге l_2.

Решение. Построим точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно соответственно прямых l_1 и l_2. A_1B_1 пересекает прямые l_1 и l_2 соответственно в точках M и N. Ломаная $AMNB$ имеет наименьшую длину.

Задача 3. Объекты A, B и C расположены между двумя прямолинейными дорогами l_1 и l_2 (рис. 179). Соедините между собой эти объекты замкнутой дорогой кратчайшей длины с заходом на прямолинейные дороги l_1 и l_2.

Решение. Построим B_1 и C_1, симметричные точкам B и C относительно прямых l_1 и l_2. AC_1 пересекает l_2 в точке D, а AB_1

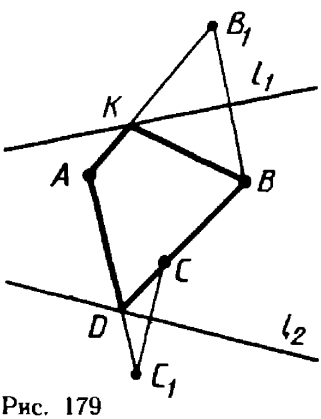


Рис. 179

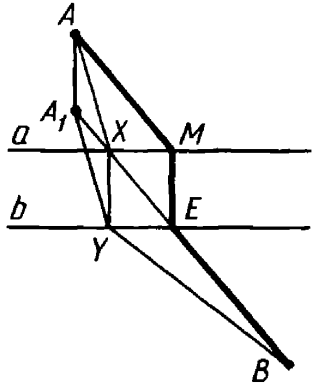


Рис. 180

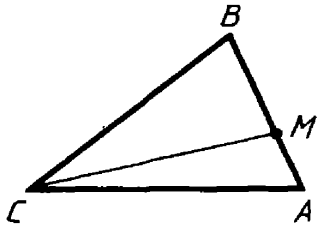


Рис. 181

пересечет l_1 в точке K. Ломаная $AKBCDA$ имеет наименьшую длину.

2) Параллельный перенос применяют чаще всего при решении задач на нахождение кратчайшего расстояния между данными и искомыми точками, которое зависит от расположения соответствующего отрезка.

Это положение можно сформулировать в виде вопроса практического характера.

З а д а ч а 4. Где нужно строить мост через реку с параллельными берегами, чтобы соединить пункты A и B, расположенные по разные стороны реки, кратчайшим путем?

Решая эту задачу, ученики очень часто представляют себе, что точки пересечения отрезка AB с прямыми a и b определяют положение моста.

С целью устранения ошибок при решении задачи и приближения ее содержания к действительности нужно указать направление строительства моста.

Вся трудность в решении задачи заключается в том, чтобы заметить особенности, при которых искомая ломаная может принять наименьшую длину. Потребность в использовании параллельного переноса не видна (скрыта).

Для того чтобы ученикам облегчить понимание решения задачи 4, освободить их от запоминания рецептов решения, предлагаем им представить, что один из берегов реки вместе с одним из населенных пунктов перенесен параллельно отрезку, составляющему с берегом реки угол 90°, к другому берегу так, чтобы края реки слились в одну прямую (рис. 180). Точка A переносится вдоль направления моста на расстояние, равное его длине.

Ломаная $AMEB$ будет кратчайшим путем от точки A до точки B (через мост ME). Длина пути равняется сумме длин отрезков A_1B и ME.

При любом другом положении моста путь из точки A в точку B будет длиннее. Покажем это. Пусть мост проходит через две другие точки X и Y, тогда путь из точки A в точку B представит собой ломаную $AXYB$. Чтобы сравнить длину ломаной

$AXYB$ с длиной ломаной $AMEB$, «перенесем» один из берегов реки так, чтобы края берегов реки слились в одну прямую. При этом точка X перейдет в точку Y, точка A — в точку A_1, отрезок AX — в отрезок A_1Y. Длина пути из точки A в точку B будет равняться длине ломаной A_1YB и длине моста. Длина ломаной A_1YB больше длины отрезка A_1B, и, следовательно, путь из точки A в точку B через мост XY будет длиннее, чем через мост ME.

3) Рассмотрим решение задач на максимум и минимум с использованием поворота вокруг точки. В задачах этого цикла поворот плоскости вокруг точки имеет тот же характер, что и параллельный перенос, т. е. он сближает части фигуры в положение, удобное для рассмотрения, и вообще сводит решение данной задачи к рассмотрению новой фигуры. В большинстве случаев рассматривается только часть переводимой фигуры вместе с данной фигурой.

Задача 5. Проектировщикам линии связи нужно соединить три пункта A, B и C. Как построить эту линию?

При ознакомлении с данной проблемой у учащихся должен возникнуть вопрос: «Как надо представлять себе линию связи, о которой говорится в задаче?» Ожидаемый ответ: «Нужно все три точки соединить отрезками так, чтобы сумма всех отрезков линии связи была кратчайшей, так как в этом случае будет использовано меньше материала».

Останавливаемся на вопросе: «Как же строить линию связи для трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой?» (Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то минимальной линией связи будет отрезок, соединяющий крайние точки.)

Ученики часто предлагают считать линией связи сумму $AB+BC+AC$. Но легко показать, что любая точка M, принадлежащая стороне AB, образует линию связи $AM+BC+MC<AB+BC+AC$ (рис. 181).

В этом случае у учеников появляется предположение, что нужно найти точку M, такую, чтобы сумма $AM+BM+CM$ была минимальной.

Построенная система вопросов привела учащихся к математической задаче, известной под названием «проблемы Штейнера», которая формулируется следующим образом.

В плоскости даны три точки A, B и C (рис. 182 $а$). Найти четвер-

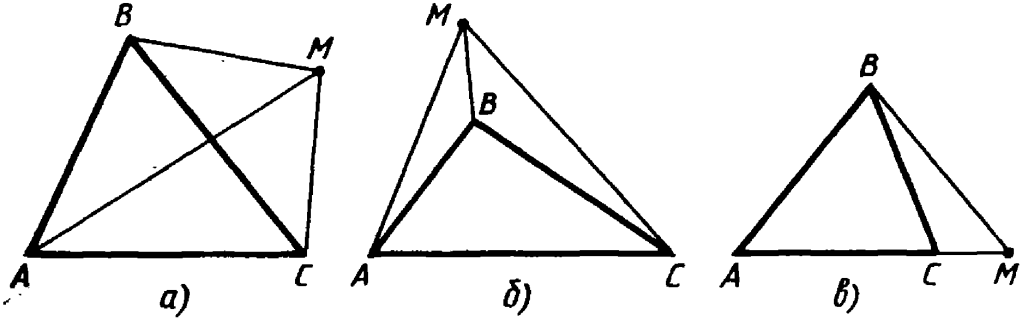


Рис. 182

тую точку плоскости M так, чтобы сумма $AM+BM+CM$ была минимальной (M — точка Торричелли).

Поиски решения этой задачи приводят к рассмотрению таких случаев:

1) точка M лежит вне треугольника ABC (рис. 182 *а, б*);

2) точка M принадлежит продолжению какой-либо стороны треугольника (рис. 182 *в*);

3) точка M лежит внутри треугольника.

Учащиеся убеждаются, что следует выбрать третий случай.

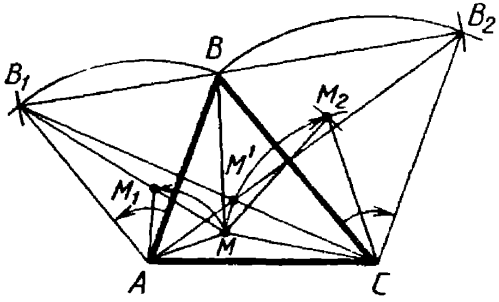


Рис. 183

Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 183). Пусть M — искомая точка, сумма расстояний от которой до вершин A, B и C должна быть наименьшей.

Применим поворот на 60° вокруг точки A, а затем вокруг точки C, тогда:

1) Точка B_1 получится из точки B при повороте ее относительно точки A на угол 60°, а тогда $AB=AB_1$; точка M перейдет в точку M_1, при этом

$$AM=AM_1=MM_1;\quad BM=M_1B_1;\quad AM+BM+CM=MM_1+B_1M_1+CM\geqslant B_1C.$$

Знак равенства будет, если точки M и M_1 будут принадлежать B_1C.

2) Точка B_2 получится из точки B при повороте ее относительно точки C на угол 60°, а тогда $BC=B_2C$; точка M перейдет в точку M_2, при этом

$$MC=M_2C=MM_2;\quad BM=B_2M_2;\quad AM+BM+CM=AM+B_2M_2+MM_2\geqslant AB_2.$$

Знак равенства будет, если M и M_2 принадлежат AB_2.

$$\angle AMB=\angle BMC=\angle AMC=120°.$$

Пересечение B_1C и AB_2 полностью определяет единственную точку M', сумма расстояний от которой до вершин треугольника будет наименьшей.

Построение.

1) Построим $\angle BAB_1=60°$, $AB=AB_1$.

2) Построим $\angle BCB_2=60°$, $BC=B_2C$.

3) Построим M' — точку пересечения B_1C и AB_2. M' —искомая точка, а сумма $AM'+BM'+CM'$ минимальная.

§ 52. Векторы

В этом параграфе мы рассмотрим три основных вопроса: о трактовке понятия вектора; операции над векторами; применение векторов к доказательству теорем и решению задач.

О трактовке понятия вектора. Одними из фундаментальных понятий современной математики являются вектор и его обобщение — тензор. Эволюция понятия вектора осуществлялась благодаря широкому использованию этого понятия в различных областях математики, механики, а также в технике. Работы Г. Весселя, Ж. Аргана, К. Ф. Гаусса по теории комплексных чисел установили связь между арифметическими операциями над комплексными числами и геометрическими операциями над векторами в двумерном пространстве — на плоскости.

В середине прошлого столетия в работах В. Гамильтона, Г. Грассмана, Ф. Мебиуса понятие вектора нашло широкое применение при изучении свойств трехмерного и многомерного пространств.

Конец прошлого и начало текущего столетия ознаменовались широким развитием векторного исчисления и приложений. Были созданы векторная алгебра и векторный анализ, теория поля, тензорный анализ, общая теория многомерного векторного пространства. Эти теории были использованы при построении специальной и общей теорий относительности, которые играют исключительно важную роль в современной физике.

В математике в настоящее время на векторной основе излагаются линейная алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрии. С понятием векторной величины учащиеся впервые встречаются в курсе физики (скорость, сила, ускорение, напряженность магнитного поля и т. п.).

Так, уже в VI классе [133] учащиеся изучают пункт «Сила — векторная величина», где сказано: «Величины, которые, кроме числового значения (модуля), имеют направление, называют векторными величинами. Сила — векторная величина. ...На чертеже силу изображают в виде отрезка прямой со стрелкой на конце».

Поэтому у учащихся обычно складывалось неправильное представление о том, что вектор — понятие физическое. Между тем вектор — понятие математическое, которое находит применение в физике или других прикладных науках и которое позволяет упростить рассмотрение некоторых вопросов, а также решение задач этих наук.

Одним из ведущих понятий современной математики является понятие векторного пространства. Оно имеет широкие приложения в математике, в таких ее разделах, как «Линейная алгебра», «Линейное программирование», «Функциональный анализ» и т. д., а также во многих разделах физики. В рамках теории трехмерного векторного пространства может быть построен курс стереометрии, отличающийся от традиционного курса евклидовой геометрии большим изяществом и компактностью (хотя и менее наглядный, и менее доступный для первоначального изучения).

Подробные сведения о векторном пространстве читатель может найти в книге Ю. М. Колягина и др. [104].

Так как элементы векторного пространства могут быть элементами самой разнообразной природы, то примеры векторных прост-

ранств весьма многочисленны. В частности, векторными пространствами (с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на действительное число) являются:

а) множество многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами;

б) множество всех векторов плоскости, отложенных от начала координат;

в) множество «свободных» векторов;

г) упорядоченный набор n действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется n-мерным вектором (числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются координатами вектора, а число n — его размерностью). Определим сложение двух векторов $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ следующим образом: $A+B=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$, а умножение на число λ так: $\lambda A=(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$, тогда множество n-мерных векторов образует n-мерное векторное пространство;

д) множество всех параллельных переносов плоскости образует двумерное векторное пространство, а параллельные переносы пространства можно рассматривать как элементы трехмерного векторного пространства.

Концепция векторного пространства и рассмотрение векторов как элементов этого пространства, являясь наиболее общей и широко используемой в математике и ее приложениях, не может быть прямо перенесена в школу в рамках действующих программ. Необходима серьезная перестройка всего стиля изложения школьной математики для введения в нее понятия «векторное пространство».

В соответствии с требованиями программы по математике для средней школы понятие вектора стало одним из ведущих понятий школьного курса математики.

Уже на первых уроках физики в VIII классе изложение материала ведется с широким привлечением векторного аппарата. Понятно, что это заставляет задуматься прежде всего над тем, как наиболее естественно ввести в курс математики восьмилетней школы понятие вектора, как эффективнее применять это понятие при изложении теории и решении задач, как рассматривать основные действия над векторами.

Известно, что существуют различные подходы к введению этого понятия.

В физике при помощи векторов изображаются различные направленные величины: сила, скорость, ускорение, перемещение материальной точки и т. п. При этом часто векторные величины называют векторами. Иногда такая направленная величина оказывается существенно связанной с определенной точкой (точкой ее приложения) или прямой.

В математике же обычно имеют дело с так называемым свободным вектором (вектором, не связанным ни с какой прямой и ни с какой фиксированной точкой).

Так, в учебном пособии под редакцией А. Н. Колмогорова [101] понятие вектора вводилось в конце VII класса и предшествовало

применению векторов в курсе физики VIII класса, а в учебном пособии А. В. Погорелова [134] векторы появляются в начале VIII класса и изучаются параллельно с применением их в курсе физики VIII класса.

Весьма обстоятельный обзор различных подходов к введению понятия вектора при изучении математики и физики дан в статье А. Д. Александрова [10].

В этой статье в качестве наиболее удачного предлагается такое определение вектора: «Вектором в геометрии называется направленный отрезок, рассматриваемый с точностью до выбора его начала, т. е. равные друг другу направленные отрезки считаются представителями или изображениями одного и того же вектора. Данный вектор — это любой из таких отрезков». Заметим при этом, что в пробном учебнике по геометрии для VII класса А. Д. Александрова и др. [13] это определение в явном виде не формулируется.

В указанной статье А. Д. Александрова говорится еще о том, что «определять вектор как направленный отрезок, т. е. «данный вектор — это данный направленный отрезок», неправильно. Точно так же неправильно определять вектор как параллельный перенос».

В учебных пособиях по геометрии последних лет встречаем такие определения вектора:

В пособии под редакцией А. Н. Колмогорова [101]: «В геометрии параллельные переносы имеют и другое название — их называют векторами».

В пособии А. В. Погорелова [134] написано так: «Направленный отрезок называется вектором».

В пробном учебнике Л. С. Атанасяна и др. [30], [31] сказано: «Вектором называется направленный отрезок».

В учебном пособии под редакцией З. Л. Скопеца [99] дано такое определение вектора: «Вектором (параллельным переносом), определяемым парой (A_1B) несовпадающих точек, называется преобразование пространства, при котором каждая точка M отображается на такую точку M_1, что луч MM_1 сонаправлен с лучом AB и расстояние MM_1 равно расстоянию AB».

Не следует думать, что все указанные определения неверны с точки зрения статьи А. Д. Александрова, так как все авторы в той или иной степени стремятся дать определение свободного вектора. Это делается у различных авторов по-разному. А. Д. Александров по этому поводу пишет так: «Дело в том, что если понимать вектор как любой из равных направленных отрезков, то нужно только определить, что значит, что эти отрезки одинаково направлены, а это можно определить достаточно просто, через сонаправленные лучи, например, как сделано в учебнике под редакцией А. Н. Колмогорова. (Но в этом учебнике транзитивность сонаправленности не доказана.) В учебнике Л. С. Атанасяна и др. полного определения нет, а у А. В. Погорелова оно опирается на понятие параллельного переноса, определение которого сложно, поскольку использует координаты».

Заключая разговор об определении понятия вектора, дадим опять цитату из статьи А. Д. Александрова: «Определение вектора как направленного отрезка, рассматриваемого с точностью до выбора начала, может показаться несколько расплывчатым и не подходящим под установившиеся стандарты определений. Но оно выражает то, как в действительности понимают вектор, и потому на самом деле применяют, а не так, что дается определение, заучивается, а затем применяется другое определение.

Определения нужны не для заучивания, а для уточнения понимания. Нужно добиваться не пустого заучивания, а действенного, т. е. работающего в применениях понимания».

Как уже указывалось, отличительной чертой изложения векторов в пособии А. В. Погорелова [134] является широкое использование координатного метода. При этом широко применяются свойства параллельного переноса, который сам вводится с использованием координат.

Параллельный перенос есть движение. Действительно, две произвольные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ переходят в точки

$$A_1(x_1+a,\ y_1+b),\ B_1(x_2+a_1,\ y_2+b_1) \text{ и } AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$
$$A_1B_1^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Отсюда $AB=A_1B_1$. Таким образом, преобразование сохраняет расстояние $AB=A_1B_1$, а значит, является движением.

Название «параллельный перенос» оправдывается тем, что при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

При доказательстве этого свойства параллельного переноса поступаем так же, как и при доказательстве того, что параллельный перенос есть движение.

Отсюда получаем, что при параллельном переносе прямые переходят в параллельные прямые (или в себя).

Мы рассматриваем еще одно свойство параллельного переноса: преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос. Два параллельных переноса, выполненные один за одним, дают снова параллельный перенос.

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка (x, y, z) фигуры переходит в точку $(x+a, y+b, z+c)$, где a, b, c — постоянные. Параллельный перенос в пространстве задается формулами

$$x'=x+a,\ y'=y+b,\ z'=z+c.$$

Все свойства параллельного переноса, сформулированные нами выше, имеют место и в пространстве.

В пространстве можно доказать еще одно свойство параллельного переноса: при параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

В учебном пособии по геометрии А. В. Погорелова [134] параллельный перенос, как уже говорилось, очень широко исполь-

зуется при изучении векторов. С его помощью вводятся такие важные понятия, как «одинаково направленные векторы», «равенство векторов»:

Две полупрямые называются одинаково направленными, если они совмещаются параллельным переносом; векторы одинаково направлены, если они принадлежат одинаково направленным полупрямым.

Два вектора называются равными, если они совмещаются параллельным переносом.

Следует расшифровать определение равенства векторов. Оно означает следующее: существует параллельный перенос, который переводит начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора.

Определив абсолютную величину вектора (абсолютной величиной (модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор) и одинаковую направленность векторов, можно получить такое следствие:

Равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине и обратно: если векторы равны по абсолютной величине и одинаково направлены, то они равны.

Доказательство этого следствия также проводится с использованием параллельного переноса и его свойств.

Говоря о координатном методе в начале этой главы, мы указывали на широкое использование координат при изложении понятия «векторы». Во-первых, координаты входят в определение параллельного переноса, который широко используется в теме «Векторы», а, во-вторых, сразу же после введения понятия вектора определяются его координаты. Причем координаты задают не вектор как направленный отрезок, а свободный вектор, т. е. у всех равных векторов координаты одни и те же.

Абсолютная величина вектора, заданного координатами a и b, равна $\sqrt{a^2+b^2}$.

У этого подхода к введению векторов есть и достоинства, и недостатки. К достоинствам можно отнести отсутствие трудностей, связанных с введением операций над векторами и законов векторной алгебры, о чем будет сказано далее. К недостаткам следует отнести то, что геометрический смысл этих операций отодвигается на второй план, а приложения векторов в физике и в геометрии практически не рассматриваются.

Операции над векторами. Операции над векторами, которые изучаются в средней школе, следующие: сложение векторов (вычитание), умножение вектора на число, скалярное произведение векторов.

Чаще всего эти операции вводятся в геометрической форме.

Отличительной чертой учебного пособия по геометрии А. В. Погорелова является то, что все операции над векторами вводятся в координатной форме.

Это позволяет очень легко получить свойства этих операций, так называемые законы векторной алгебры. А соответствующие

геометрические правила выполнения этих операций (правила треугольника и параллелограмма для сложения векторов, построение произведения вектора на число, правило нахождения скалярного произведения) доказываются. Рассмотрим эти вопросы более подробно.

1) *Сложение векторов*

Суммой векторов $\bar{a}(a_1, a_2)$ и $\bar{b}(b_1, b_2)$ называется вектор $\bar{c}(a_1+b_1, a_2+b_2)$, т. е.

$$\bar{a}(a_1, a_2)+\bar{b}(b_1, b_2)=\bar{c}(a_1+b_1, a_2+b_2).$$

Из этого определения без труда выводятся следующие законы: для любых векторов $\bar{a}(a_1, a_2)$, $\bar{b}(b_1, b_2)$, $\bar{c}(c_1, c_2)$

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a},\ \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$

После этого можно доказать теорему:

Каковы бы ни были точки A, B, C, имеет место векторное равенство $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ (правило треугольника для сложения векторов).

Как указывалось выше, это правило иногда принимают в качестве определения сложения векторов.

В форме задачи дается «правило параллелограмма» для сложения векторов. Эта задача формулируется так: $ABCD$ — параллелограмм. Докажите векторное равенство $AB+AD=AC$.

Разностью векторов $\bar{a}(a_1, a_2)$ и $\bar{b}(b_1, b_2)$ называется такой вектор $\bar{c}(c_1, c_2)$, который в сумме с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$: $\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}$. Отсюда находятся координаты вектора $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$, $c_1=a_1-b_1$, $c_2=a_2-b_2$. После этого можно доказать следующее утверждение:

Даны векторы с общим началом $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Докажите, что $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.

Сложение векторов в пространстве определяется так же, как и на плоскости:

суммой векторов $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется вектор $\bar{c}(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

Рассмотрим для примера задачу на сложение векторов в пространстве.

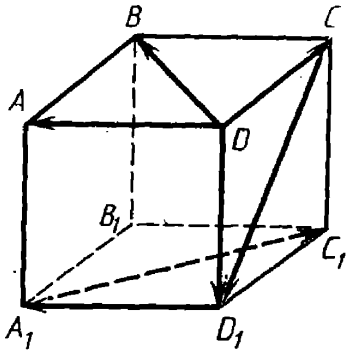


Рис. 184

Задача 1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Указать такой вектор $\bar{y}$, начало и конец которого являются парой вершин этого параллелепипеда, что $\overline{DC}+\overline{D_1A}+\overline{CD_1}+\bar{y}+\overline{A_1C_1}=\overline{DB}$ (рис. 184).

Решение. $\overline{DC}+\overline{CD_1}=\overline{DD_1}$, $\overline{DD_1}+\overline{D_1A}=\overline{DA_1}$, $\overline{DA_1}+\bar{y}+\overline{A_1C_1}=\overline{DB}$, $\overline{DC_1}+\bar{y}=\overline{DB_1}$, $\bar{y}=\overline{DB_1}-\overline{DC_1}=\overline{C_1B_1}$.

Рассмотрим физическую задачу, при решении которой используется сложение векторов.

Задача 2. Лодка движется от одного берега к другому со скоростью v_1, скорость течения реки v_2. Какова истинная скорость движения лодки?

Решение. Изобразим условия задачи с помощью векторов (рис. 185). Тогда решением задачи будет $v_{\text{ист}} = v_1 + v_2$.

2) *Умножение вектора на число*

Определение этой операции сформулировано в координатной форме:

Произведением вектора $(\overline{a_1, a_2})$ на число λ называется вектор $(\overline{\lambda a_1, \lambda a_2})$, т. е. $\lambda(\overline{a_1, a_2}) = (\overline{\lambda a_1, \lambda a_2})$.

Из этого определения следует:

Для любого вектора $\bar{a}$ и чисел λ, μ

$$(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}.$$

Для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и числа λ

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}.$$

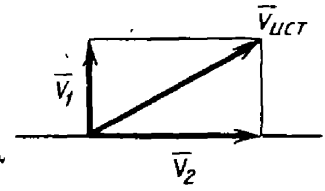


Рис. 185

Далее доказывается теорема о произведении вектора на число. Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda|\,|\bar{a}|$. Направление вектора $\lambda\bar{a}$ при $\bar{a} \neq 0$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda < 0$.

Доказательство этой теоремы широко использует метод координат, в частности уравнение прямой, проходящей через начало координат. Это доказательство состоит из следующих шагов:

1) строим векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, равные соответственно $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$, O — начало координат, замечаем, что точка A имеет координаты a_1, a_2, а точка B — λa_1, λa_2;

2) рассмотрим уравнение прямой OA, т. е. прямой, проходящей через начало координат и точку A, оно имеет вид $\alpha x + \beta y = 0$;

3) докажем, что точка B принадлежит этой прямой (координаты точки A удовлетворяют этому уравнению по построению, а точка B имеет координаты λa_1, λa_2, подставив их в уравнение прямой, видим, что они ему удовлетворяют);

4) рассматриваем положение точки B на прямой OA в зависимости от знака числа λ;

5) находим абсолютную величину вектора $\lambda\bar{a}$.

Важным для приложений векторов является тот факт, что любой вектор $\bar{a}(a_1, a_2)$ допускает разложение в виде $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2$, где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — единичные векторы (их абсолютная величина равна 1), имеющие направления положительных координатных полуосей, их называют координатными векторами или ортами.

В пространстве умножение вектора на число определяется так же, как на плоскости, там имеет место разложение вектора по трем координатным векторам — ортам:

$$\bar{a}(a_1, a_2, a_3) = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3,$$

где $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ — единичные векторы, имеющие направления положительных координатных полуосей.

В векторном исчислении и его приложениях большое значение имеет представление (разложение) вектора в виде суммы нескольких векторов, называемых составляющими данного вектора.

З а д а ч а. Разложить вектор $\bar{c}$ по двум неколлинеарным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Пусть заданы три неколлинеарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Для того чтобы разложить вектор $\bar{c}$ по двум векторам (неколлинеарным) $\bar{a}$ и $\bar{b}$, надо представить $\bar{c}$ в виде суммы двух векторов, коллинеарных соответственно $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Для этого от точки O отложим векторы, равные $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ (рис. 186).

Через точку C проведем прямые, параллельные отрезкам OB_1 и OA_1. Получим параллелограмм, в котором OC — диагональ. В этом параллелограмме $\overline{OC}=\overline{OA_1}+\overline{OB_1}$, причем $\overline{OA_1}$ коллинеарен $\bar{a}$, $\overline{OB_1}$ коллинеарен $\bar{b}$. Значит, можно найти такие числа x и y, что $\overline{OA_1}=x\bar{a}$, $\overline{OB_1}=y\bar{b}$. А тогда $\bar{c}=x\bar{a}+y\bar{b}$, т. е. мы представили $\bar{c}$ в виде суммы двух векторов $x\bar{a}$ и $y\bar{b}$, соответственно коллинеарных $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Докажем теперь единственность разложения вектора $\bar{c}$. Доказательство проведем методом от противного.

Допустим, что вектор $\bar{c}$ можно разложить двумя способами: $\bar{c}=x\bar{a}+y\bar{b}$ и $\bar{c}=x_1\bar{a}+y_1\bar{b}$, где $x\neq x_1$, $y\neq y_1$.

Так как $\bar{c}$ — один и тот же вектор, то, применяя свойства сложения векторов и умножения вектора на число, имеем:

$$x_1\bar{a}+y_1\bar{b}=x\bar{a}+y\bar{b},\quad x_1\bar{a}-x\bar{a}=y\bar{b}-y_1\bar{b},$$

$$(x_1-x)\,\bar{a}=(y-y_1)\,\bar{b},\quad \bar{a}=\frac{y-y_1}{-(x-x_1)}\,\bar{b}.$$

Следовательно, $\bar{a}$ коллинеарен $\bar{b}$. Получили противоречие с условием. И потому $x_1=x$, $y_1=y$.

Итак, установлено существование и единственность такого разложения.

З а д а ч а. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Р е ш е н и е. Пусть O_1, O_2, O_3 соответственно середины отрезков MN, PQ, RS (рис. 187). Тогда

$$2\,\overline{OO_1}=\overline{OM}+\overline{ON}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}),$$

$$2\,\overline{OO_2}=\overline{OP}+\overline{OQ}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}),$$

$$2\,\overline{OO_3}=\overline{OR}+\overline{OS}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}).$$

Очевидно, что $O_1=O_2=O_3$ и $\frac{MO}{NO}=\frac{PO}{OQ}=\frac{RO}{OS}$.

3) *Скалярное умножение векторов*

Скалярным произведением векторов $\bar{a}\,(a_1, a_2)$ и $\bar{b}\,(b_1, b_2)$ называется число $a_1b_1+a_2b_2$.

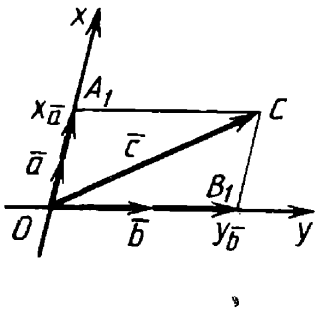


Рис. 186

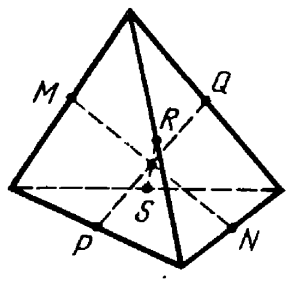


Рис. 187

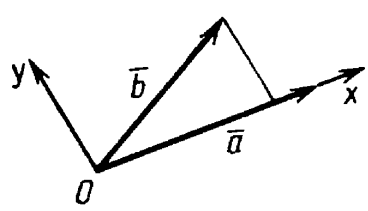


Рис. 188

Из этого определения получаем следующий закон для любых векторов $\bar{a}(a_1, a_2)$, $\bar{b}(b_1, b_2)$, $\bar{c}(c_1, c_2)$:

$$(\bar{a}+\bar{b})\,\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}.$$

После этого доказываем важную для применения векторов теорему о скалярном произведении векторов: «Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними».

Доказательство этой теоремы является ярким примером применения метода координат.

Вначале доказываем, что скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не зависит от выбора системы координат, т. е. скалярное произведение не изменяется, если систему координат выбрать специальным образом. Далее выбираем систему координат так.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ откладываем от одной точки O, ее и выберем за начало координат, а направление положительной полуоси оси x возьмем совпадающим с направлением вектора $\bar{a}$ (рис. 188). После этого получим необходимое выражение для скалярного произведения.

Из этой теоремы следует: если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю и, обратно, если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

Рассмотрим еще некоторые свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ (коммутативность);

2) $m\bar{a}\cdot n\bar{b}=(mn)\,\bar{a}\cdot\bar{b}$, т. е. числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения;

3) выражение $\bar{a}\cdot\bar{a}$ будем обозначать $\bar{a}^2$ и называть скалярным квадратом вектора $\bar{a}$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, т. е. $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$;

4) косинус угла между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение числовых значений длин векторов, т. е.

$$\cos\angle(\bar{a}, \bar{b})=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

Скалярное произведение векторов в пространстве определяется аналогично: скалярным произведением векторов $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется число

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Точно так же доказывается, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между векторами.

Пусть вектор $\bar{a}$ задан координатами, т. е. $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$. Тогда числовое значение его длины $|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, а косинусы углов между направлениями вектора $\bar{a}$ и положительными направлениями осей координат (т. е. ортами) вычисляются по формулам

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\bar{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{|\bar{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_3}{|\bar{a}|}.$$

Эти косинусы называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$.

Пример. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\bar{a}=(-2, 3, -5)$.

Решение. Находим длину вектора:

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{38}.$$

Далее:

$$\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{38}},\quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{38}},\quad \cos\gamma=\frac{-5}{\sqrt{38}}.$$

Применение векторов к доказательству теорем и решению задач. Понятие вектора, которое нашло широкое распространение в прикладных науках, явилось плодотворным и в геометрии. Аппарат векторной алгебры позволил упростить изложение некоторых сложных геометрических понятий, доказательства некоторых теорем школьного курса геометрии, позволил создать особый метод решения различных геометрических задач.

1. Применение векторов при доказательстве теорем

Рассмотрим доказательство некоторых теорем с помощью векторов.

Теорема 1. Средняя линия треугольника параллельна его третьей стороне и равна половине этой стороны.

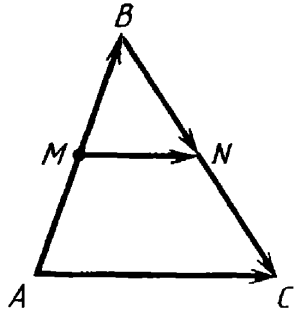


Рис. 189

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 189). Пусть $\overline{AB}=\bar{c}$, $\overline{BC}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$, тогда по определению суммы векторов $\bar{c}+\bar{a}=\bar{b}$. Пусть M и N — середины сторон AB и BC $\triangle ABC$, тогда

$$\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}=$$

$$=\frac{\bar{c}}{2}+\frac{\bar{a}}{2}=\frac{1}{2}(\bar{c}+\bar{a})=\frac{1}{2}\bar{b}.$$

Так как $\overline{AC}=\bar{b}$ и $\overline{MN}=\frac{1}{2}\bar{b}$, то $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$.

Значит, $\overline{MN}$ и $\overline{AC}$ сонаправлены, следовательно, $AC \| MN$.

Так как $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$, то $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$.

Теорема 2. Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 190). Положим, $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$ ($|\overline{AB}|=|\overline{DC}|=a$, $|\overline{AD}|=|\overline{BC}|=b$). По определению суммы и разности векторов $\overline{AC}=\bar{a}+\bar{b}$, $\overline{DB}=\bar{a}-\bar{b}$. Используя свойства скалярного квадрата, получим:

$$\overline{AC}^2+\overline{DB}^2=(\bar{a}+\bar{b})^2+(\bar{a}-\bar{b})^2=\bar{a}^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2+\bar{a}^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2=$$
$$=2\bar{a}^2+2\bar{b}^2, \text{ т. е. } AC^2+DB^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2,$$

так как $\overline{AC}^2=AC^2$, $\overline{DB}^2=DB^2$.

Теорема 3. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный ромб (рис. 191).

Введем обозначения: $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{BC}=\bar{b}$. Из определения ромба $\overline{AB}=\overline{DC}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\overline{BC}=\bar{b}$.

По определению суммы и разности векторов $\overline{AC}=\bar{a}+\bar{b}$, $\overline{DB}=\bar{a}-\bar{b}$.

Рассмотрим $\overline{AC}\cdot\overline{DB}=(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}^2-\bar{b}^2$ (по свойствам скалярного произведения).

Так как стороны ромба равны, то $\bar{a}=\bar{b}$. Следовательно, $\overline{AC}\cdot\overline{DB}=0$. Из последнего получаем $\overline{AC}\perp\overline{DB}$, т. е. $DB\perp AC$.

Теорема 4. Диагонали в прямоугольнике имеют равные длины.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник (рис. 192).

1) Введя обозначения $\overline{AB}=\bar{a}$ и $\overline{BC}=\bar{b}$, получим:

$$\overline{AC}=\bar{a}+\bar{b}, \quad \overline{DB}=\bar{a}-\bar{b}.$$

2) Найдем квадраты длин диагоналей, используя свойство скалярного произведения: $\overline{AC}^2=AC^2=(\bar{a}+\bar{b})^2=\bar{a}^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2=a^2+b^2$, так как $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, ибо в прямоугольнике $\bar{a}\perp\bar{b}$.

Итак, $AC^2=a^2+b^2$. Далее $\overline{DB}^2=DB^2=(\bar{a}-\bar{b})^2=\bar{a}^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2=a^2+b^2$, так как $\bar{a}\perp\bar{b}$.

Следовательно, $AC^2=DB^2=a^2+b^2$, т. е. $AC=DB$.

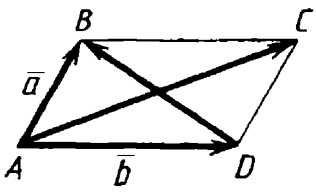


Рис. 190

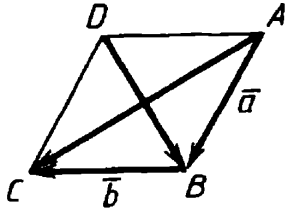


Рис. 191

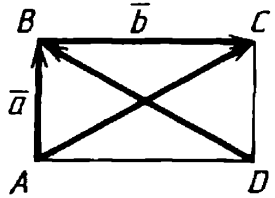


Рис. 192

2. Методика решения геометрических задач с помощью векторов

Введенный в среднюю школу векторный аппарат дает новый эффективный метод для решения геометрических задач. Подробнее об этом методе сказано в [74]. По значимости его можно уподобить методу составления уравнения.

Так как этот метод является новым для учащихся, необходимо:

а) заинтересовать учащихся, показав им эффективность его использования на специально подобранных задачах;

б) обучать учащихся некоторым эвристикам (системе определенных правил, помогающих найти ключ к решению задачи), которые помогут создать у них навык в его применении;

в) обучать этому методу на достаточно простых задачах, не отвлекая внимание на трудности чисто геометрического содержания.

Следует иметь в виду, что векторный метод не является универсальным, к решению некоторых задач он неприменим или малоэффективен.

Можно выделить следующие эвристики:

Что требуется доказать (на геометрическом языке)	Что достаточно доказать (на векторном языке)
1) $a \parallel b$	$\overline{AB}=k\overline{CD}$, где отрезки AB и CD принадлежат соответственно прямым a и b, k — число. В зависимости от выбора AB и CD возникают различные векторные соотношения, среди которых выбирают подходящие
2) Точки A, B и C принадлежат прямой a.	а) установить справедливость одного из следующих равенств: $AB=kBC$ или $\overline{AC}=k\overline{AB}$; б) доказать равенство $\overline{QC}=p\overline{QA}+q\overline{QB}$, где $p+q=1$ и Q — произвольная точка; в) доказать равенство $\alpha\overline{QA}+\beta\overline{QB}+\gamma\overline{QC}=0$, где $\alpha+\beta+\gamma=0$ и Q — произвольная точка
3) Точка C принадлежит отрезку AB, где $AC:AB=m:n$ (деление отрезка в данном отношении)	$\overline{AC}=\frac{m}{n}\overline{CB}$ или $\overline{QC}=\frac{n}{m+n}\overline{QA}+\frac{m}{m+n}\overline{QB}$ для некоторой точки Q.
4) $a \perp b$	$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$, где точки A и B принадлежат прямой a, а точки C и D — прямой b.
5) Вычислить длину отрезка	а) выбрать два неколлинеарных базисных вектора (или три некомпланарных), у которых известны длины и угол между ними; б) разложить по ним вектор, длина которого вычисляется; в) найти скалярный квадрат этого вектора, используя формулу $\bar{a}^2=\lvert\bar{a}\rvert^2$.
6) Вычислить величину угла	а) выбрать два неколлинеарных базисных вектора, для которых известны отношение длин и угол между ними; б) выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам; в) вычислить $\cos\angle(\bar{a},\bar{b})=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert\,\lvert\bar{b}\rvert}$

Глава 16. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

§ 53. Задачи преподавания геометрии в школе

Курс геометрии занимает большое место и играет важную роль в школьном математическом образовании. На него приходится около 40% учебного времени, отводимого на математику в VI—X классах, причем геометрия изучается на протяжении всего времени обучения в школе.

Основное содержание школьного курса геометрии сохраняется стабильным почти 200 лет и своими истоками имеет «Начала» Евклида. В геометрии на плоскости (планиметрии) изучают взаимное расположение прямых; свойства треугольников, четырехугольников и окружности; отношения равенства (конгруэнтности) и подобия фигур; измерение длин, величин углов и площадей. В геометрии в пространстве (стереометрии) изучают взаимное расположение прямых и плоскостей; многогранники (в основном призмы и пирамиды); тела вращения — цилиндр, конус, шар; объемы тел и площади их поверхностей.

В последние годы наряду с традиционными методами геометрии, использующими равенство и подобие треугольников, тригонометрию и алгебру (уравнения), в школьном курсе геометрии последовательно применяются аксиоматический метод, метод геометрических преобразований, координатный и векторный методы, методы математического анализа. Предпочтение, отдаваемое тем или иным методам, в основном и отличает различные подходы к построению школьного курса геометрии в настоящее время.

Каковы задачи преподавания систематического курса геометрии в школе? Наиболее полный и обстоятельный ответ на этот вопрос дает академик А. Д. Александров [11, с. 56—57]:

«Особенность геометрии, выделяющая ее не только среди остальных частей математики, но и среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга...

Утверждения геометрии высказываются и доказываются для идеальных геометрических объектов, но воспринимаются как утверждения об объектах наглядно представимых и применяются к реальным вещам, в которых идеальные объекты геометрии реализуются нередко очень условно... При всей своей абстрактности геометрия возникла из практики. Поэтому преподавание геометрии обязательно должно связывать ее с реальными вещами, с другими дисциплинами, особенно с физикой...

Таким образом, преподавание геометрии должно включать три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление, применение к реальным вещам.

Этот «треугольник» составляет, можно сказать, душу преподавания геометрии...

Задача преподавания геометрии — развить у учащихся три качества: пространственное воображение, практическое понимание и логическое мышление.

Разумеется, в задачи курса геометрии входит: дать учащимся, как это принято говорить, основные знания и умения в области геометрии. Однако все же главные, глубинные задачи преподавания геометрии заключаются в трех указанных элементах...»

Таким образом, А. Д. Александров указывает на три основные задачи преподавания геометрии в средней школе: наряду (точнее, посредством) с изучением основных геометрических фактов и развитием определенных умений и навыков учащихся главные задачи составляют развитие их пространственного воображения, логического мышления и понимания того, что геометрия изучает свойства реального мира. Эта точка зрения нашла яркое воплощение в пробных учебниках геометрии, написанных авторским коллективом во главе с академиком А. Д. Александровым [13], [12], [14].

Программа по геометрии дает такие же целевые установки на преподавание геометрии в средней школе. Таким образом, основными задачами курса геометрии являются:

— систематическое изучение основных фактов геометрии, методов их получения и возможностей их применения;

— развитие умений и навыков учащихся, обеспечивающих применение полученных знаний для изучения смежных дисциплин и в сфере производства;

— развитие пространственного воображения и логического мышления учащихся.

При этом основой для развития пространственного воображения и логического мышления учащихся является овладение ими основными фактами и методами геометрии.

В высказываниях ряда ученых и в учебниках, написанных ими, можно заметить определенные акценты, которые они делают на отдельных задачах преподавания геометрии в школе. Так, у академика А. Д. Александрова — это «лед и пламень» органического единства строгой логики и живого восприятия реального мира.

Академик А. В. Погорелов на первое место ставит развитие логического мышления учащихся. Он пишет: «Предлагая настоящий курс, мы исходили из того, что главная задача преподавания геометрии в школе — научить учащихся логически рассуждать, аргументировать свои утверждения, доказывать. Очень немногие из оканчивающих школу будут математиками, тем более геометрами. Будут и такие, которые в их практической деятельности ни разу не воспользуются теоремой Пифагора. Однако вряд ли найдется хотя бы один, которому не придется рассуждать, анализировать, доказывать» [136, с. 8].

Стремлением к форсированному развитию логического мышления учащихся обусловлено в его учебнике [134] «основное учебное

требование» — доказывать все, особенно в начале обучения; повышенное внимание к строгости доказательств «очевидных» фактов (например, связанных с отношением «лежать между»); широкое использование способа доказательства от противного с первых шагов обучения; сознательный отрыв мышления от чертежа как «эффективное обучающее средство» [119, с. 12—15].

Отметим, что такие «средства» развития логического мышления школьников, начинающих изучать систематический курс геометрии, в корне противоречат позиции А. Д. Александрова, который считает, что в определенных условиях «ради наглядности можно жертвовать логической точностью и обоснованностью» [11, с. 59].

Академик А. Н. Колмогоров и его соавторы озабочены в первую очередь внедрением в школьный курс геометрии новых идей и методов, важнейших общематематических понятий, позволяющих сблизить этот курс с другими разделами школьной математики и избавиться от традиционной громоздкости традиционного изложения [101].

Другой авторский коллектив — профессора Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов и др.— акцентирует свое внимание на развитии умений и навыков учащихся, на доступности изложения [33], [30], [31], [32].

Профессор В. Г. Болтянский и его соавторы считают, что главная задача преподавания геометрии в школе — дать учащимся «представление о том, как нужно рассуждать при решении задач, как делать правильные умозаключения, или, как говорят, логически мыслить... Мы хотим,— пишут авторы, обращаясь к ученикам,— чтобы вы смогли применять свои геометрические и логические знания в жизни, в вашей будущей работе...» [43, с. 3—4].

В одном из своих недавних выступлений В. Г. Болтянский отмечал важную роль геометрии как способа осмысливания негеометрической информации в различных областях современной науки (теории игр, теории оптимизации и др.). Иллюстрацией этого может служить следующая задача:

Сумма n чисел равна 1. В каком случае сумма их квадратов минимальна?

При $n=3$ эта задача имеет простое геометрическое истолкование. Числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x+y+z=1$. Значит, точки с координатами (x, y, z) лежат в плоскости $x+y+z-1=0$. Сумма квадратов этих чисел есть квадрат расстояния точки (x, y, z) до начала координат. Это расстояние минимально, когда точка (x, y, z) является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на указанную плоскость. Отсюда находим $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{3}$. В n-мерном пространстве задача решается аналогично.

Поэтому В. Г. Болтянский ставит вопрос о воспитании «геометрического мышления» учащихся как главной задаче преподавания геометрии в школе. «Для решения этой задачи,— говорит

он,— не так важно 50 или 58 теорем будет знать ученик, сколько он решит задач. Здесь важны форма подачи материала, овладение учащимися определенными эффективными методами». К ним он относит метод геометрических преобразований (группы преобразований, в том числе группы самосовмещенных фигур) и векторный метод [43], [42], [41].

Следует сказать, что целевые установки преподавания геометрии в школе не являются неизменными: они определяются целями, которые общество ставит перед школой в каждый конкретный исторический период его развития.

Так, до конца 50-х годов основной целью школьного математического образования было привитие основной массе учащихся элементарных математических навыков, достаточных для практической жизни и приобретения простейших профессий. При этом обучение в старших классах было ориентировано на продолжение образования в вузах.

В этот период школа удовлетворялась учебниками математики, созданными еще до революции. Преподавание геометрии велось по учебнику А. П. Киселева [90], [91], [92], первое издание которого относится к 1893 г. Он был построен в духе «Начал» Евклида.

В 60-х годах было принято направление на укрепление связи школы с жизнью. В соответствии с этим изменился и школьный курс математики, что выразилось, главным образом, в усилении общеобразовательной и прикладной направленности курса, исключением из него излишне сложного, второстепенного и устаревшего материала.

Доступность курса планиметрии в учебнике Н. Н. Никитина [128] была повышена в результате значительного сокращения теоретического материала, усиления наглядности его изложения и прикладной направленности (правда, за счет заметного снижения научного уровня). Стереометрия по-прежнему преподавалась по учебнику А. П. Киселева. Кратковременная попытка внедрения в школьный курс геометрии геометрических преобразований и векторов [44] оказалась безуспешной.

Однако эпоха научно-технической революции требовала кардинального изменения школьного математического образования, внедрения в него современных идей и методов. Поэтому в 1964 г. была создана совместная Комиссия Академии наук и Академии педагогических наук СССР во главе с академиком А. Н. Колмогоровым по определению содержания школьного математического образования. Результатом ее работы явились новая программа и новые учебники по математике, на которые школа перешла в начале 70-х годов.

Школьный курс геометрии стал строиться на строгой аксиоматической основе с широким использованием метода геометрических преобразований, координатного и векторного методов, методов математического анализа. Планиметрия преподавалась по учебнику под редакцией А. Н. Колмогорова [101], стереометрия — по учебнику под редакцией З. А. Скопеца.

В 1982 г. их сменил учебник геометрии А. В. Погорелова [134], причем в школах РСФСР начался широкий эксперимент преподавания геометрии по учебнику Л. С. Атанасяна и др.

В ряде школ продолжалось экспериментальное преподавание по учебнику В. Г. Болтянского и др., начался эксперимент по учебнику А. Д. Александрова и др.

Современные требования ускорения социально-экономического развития страны на базе научно-технического прогресса, определенные апрельским (1985 г.) Пленумом ЦК КПСС и XXVII съездом КПСС, Основные направления реформы общеобразовательной и профессиональной школы, внедрение в школу компьютеров несомненно окажут влияние на целевые установки школьного курса математики, и в частности геометрии.

§ 54. Различные способы построения школьного курса геометрии

1°. «Начала» Евклида

Исторически первым дошедшим до нашего времени систематическим курсом геометрии (точнее, основ математики) были знаменитые «Начала» Евклида [126]. Созданные в III в. до н. э., они до сих пор продолжают оказывать влияние на содержание и методику построения школьного курса геометрии.

Евклид первым поставил задачу построения геометрии как дедуктивно-аксиоматической системы и решил ее на таком высоком логическом уровне, который считался образцом более 2000 лет. Известно, что с современной точки зрения система Евклида несовершенна: это относится и к определениям, и к аксиомам, и к выводам, которые делаются на их основе.

Определения, предшествующие дальнейшему изложению, в значительной части являются просто пояснениями вводимых понятий, призванными вызвать определенный чувственный образ, и не используются при доказательстве теорем. Некоторые из них в своих формулировках содержат другие понятия, смысл которых не разъясняется. Например:

«Точка есть то, что не имеет частей»,

«Линия же — длина без ширины»,

«Концы же линии — точки»,

«Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней»,

«Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину»,

«Концы же поверхности — линии»,

«Тело есть то, что имеет длину, ширину и глубину»,

«Граница же тела — поверхность» и др.

Но наряду с ними мы находим у Евклида определения, которыми пользуемся до сих пор: это относится к определению прямого угла как каждого из равных смежных углов, тупого и острого углов как углов соответственно больше и меньше прямого, окружности и круга, цилиндра и конуса как тел вращения и др.

Обращают на себя внимание и такие определения:

«Граница есть то, что является оконечностью чего-либо»,

«Фигура есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ» (в частности, треугольник!).

Определения в «Началах» Евклида отражают разнообразие исторически сложившихся к III в. до н. э. абстракций. В них зафиксированы представления, почерпнутые из жизненной практики. Не так ли и сейчас дети начинают знакомиться с геометрическими понятиями в школе?

Вслед за определениями в «Началах» Евклида следуют постулаты и аксиомы, принимаемые без доказательства.

Постулаты

I. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.

II. Прямую можно продолжить[1].

III. Из всякого центра всяким радиусом можно описать окружность.

IV. Все прямые углы равны между собой.

V. Если при пересечении двух прямых третьей прямой сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых, то первые две прямые при продолжении пересекаются с той стороны от третьей прямой, где лежат эти внутренние односторонние углы.

Аксиомы

I. Равные порознь третьему равны между собой.

II. И если к равным прибавим равные, то получим равные.

III. И если от равных отнимем равные, то получим равные.

IV. И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.

V. И если удвоим равные, то получим равные.

VI. И половины равных равны между собой.

VII. И совмещающиеся равны.

VIII. И целое больше части.

IX. И две прямые не могут заключать пространства.

Хорошо известна недостаточность постулатов и аксиом Евклида для строго логического построения геометрии: они не описывают свойства отношений порядка, непрерывности и, в должной мере, совмещения, которые явно или неявно используются при построении теории. За две с лишним тысячи лет научный анализ «Начал» обогатил их недостающими аксиомами и исключил излишние, способствовал более логичному подходу к определениям, а великая история V постулата привела в конце концов систему Евклида к логическому совершенству в виде «Оснований геометрии» Д. Гильберта.

Однако наша цель состоит не в логическом анализе «Начал» Евклида, а в ознакомлении читателей с теми методическими принципами, которые обеспечили «Началам» столь долгую жизнь в

[1] По Евклиду, всякая прямая является конечной — отрезком, как мы сейчас говорим. Но она может быть «неопределенно», «непрерывно» продолжена. Бесконечность не соответствовала античным представлениям, так как связанные с ней факты «не могут быть проверены».

качестве основ систематического курса геометрии. Для этого обратимся вновь к постулатам и аксиомам Евклида.

Принцип отнесения основных положений к постулатам или к аксиомам до сих пор считается, по существу, невыясненным. Заметим, однако, что книги Евклида дошли до нас в различных копиях многочисленных его комментаторов. Поэтому берется под сомнение, например, принадлежность аксиом IV, V, VI, IX Евклиду. В некоторых изданиях «Начал» постулаты IV и V относят к числу аксиом. В этом случае выявляется удивительная вещь: постулаты теперь выражают возможность геометрических построений линейкой и циркулем (из которых вытекает существование фигур, получившихся в результате этих построений), а аксиомы являются предложениями, лежащими в основе логических доказательств.

При таком понимании геометрия у Евклида не является чисто логической теорией: логические операции сочетаются в ней с конструктивными, причем самым фундаментальным образом.

Евклид признает существование только тех фигур, которые могут быть построены, и при доказательстве какой-либо теоремы начинает с построения нужной геометрической фигуры. Подтверждение этому мы находим с самых первых шагов развития теории. Она начинается с решения трех задач на построение: в современной терминологии — это построение равностороннего треугольника на заданной его стороне; откладывание от данной точки отрезка, равного данному[1]; откладывание на данном луче от его начала отрезка, равного данному. Затем построения используются при доказательстве первого признака равенства треугольников, теоремы об углах при основании равнобедренного треугольника и др. Использование построений позволяет обойти тонкие логические вопросы теории, связанные с существованием, непрерывностью и порядком, которые в античные времена еще не были разработаны.

«Евклид не задавался целью вывести все свои положения **силлогистически** из немногих высказанных им определений, постулатов и аксиом. Его целью было лишь **убедить читателя в определенных истинах,** и он вовсе не считал единственным способом убеждения формально логический вывод положений из признанных читателем в начале изложения истин, но считал, что убедить можно специальной операцией с непосредственно очевидным свойством» [126, комментарии к книге I, с. 237].

Добиваться убедительности рассуждений, опираясь не столько на аксиомы (которые иногда оказываются столь сложными, что их смысл не доходит до сознания учащихся), сколько на построения и основанные на них наглядные представления,— основной методический принцип построения школьного курса геометрии по классической схеме Евклида.

Успех и долголетие систематических курсов геометрии, построенных по классической схеме (А. П. Киселев [90], [91], Ж. Адамар [8], [9] и др.), с нашей точки зрения во многом объясняются

[1] В силу постулата III циркулем можно проводить любые окружности, но не откладывать отрезки, равные произвольно заданному отрезку.

тем, что в них был использован исторический опыт, воплощенный в «Началах» Евклида.

Принцип органического сочетания конструктивных и логических начал мы видим в пяти «постулатах Александрова», положенных им в основу построения школьного курса геометрии [12, с. 9]:

I. Каждые две точки можно соединить отрезком и только одним.

II. Каждый отрезок можно продолжить за каждый из его концов.

III. На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному.

IV. От каждого луча по любую сторону от него можно отложить угол, равный данному.

V. Можно построить прямоугольник со сторонами, равными любым двум данным отрезкам.

В «Началах» Евклида можно обнаружить истоки разных подходов к доказательству равенства фигур в школьных учебниках. По Евклиду, равными являются такие фигуры, которые можно совместить (аксиома VII). Как понимать совмещение фигур? Методом совмещения Евклид доказывает признаки равенства треугольников. Если согласиться с тем, что Евклид мыслил геометрические фигуры существующими лишь с того момента, как они построены (чему и служат постулаты), то тогда следует считать, что признаки равенства двух треугольников он доказывает построением треугольника, равного первому и совпадающего со вторым. Именно такой подход мы обнаруживаем в учебнике А. Д. Александрова[1] [12] при доказательстве первого и второго признаков равенства треугольников, а также в учебнике А. В. Погорелова [134], в котором лишь построение треугольника заменяется ссылкой на аксиому существования треугольника, равного данному.

Другие считают, что при доказательстве равенства треугольников Евклид пользовался интуитивным представлением о движении, мысленно перенося один треугольник с одного места на другое для совмещения его со вторым. Эту точку зрения аргументируют ссылкой на аксиому VII как определение равных фигур и постулат IV, выражающий одно из основных свойств движений. С таким толкованием совмещения мы встречаемся в учебниках А. П. Киселева [91], [92] и Л. С. Атанасяна [30].

В учебнике А. Н. Колмогорова [101] движение (перемещение) рассматривается как некоторое соответствие, свойства которого прямо или косвенно аксиоматизируются. Доказательство равенства (конгруэнтности[2]) фигур производится указанием перемещения,

---

[1] В дальнейшем для удобства ссылок на учебники, написанные коллективом авторов, мы ограничимся указанием фамилии первого автора или того, под редакцией которого написан учебник.

[2] Этот термин был введен Г. Лейбницем в XVII в. для фигур, которые отличаются только своим положением. Для него Г. Лейбниц употреблял знак 8. Этот термин наряду с термином «равенство» использовал Д. Гильберт в «Основаниях геометрии» [63, с. 66], употребляя знак $\equiv$, а также авторы школьных учебников А. Давидов со знаком $\cong$, А. П. Киселев [90, с. 48] со знаком $=$, А. Н. Колмогоров [101, с. 64], В. Г. Болтянский [43, с. 21], [42, с. 122], А. Д. Александров [15, с. 27] со знаком $\cong$.

отображающего одну фигуру на другую. Впрочем в этом учебнике нет доказательств признаков конгруэнтности треугольников. Их предлагается доказать именно таким способом в учебнике В. Г. Болтянского [43, с. 164].

Этот небольшой анализ показывает, как школьные учебники все дальше уходят от изначальных конструктивных идей Евклида. Заметим, что Д. Гильберт в «Основаниях геометрии» уходит еще дальше, вводя равенство (конгруэнтность) отрезков и углов как неопределяемое отношение, подчиненное определенным аксиомам.

Влияние «Начал» Евклида на школьные учебники геометрии не ограничивается указанными фактами. Традиционное содержание школьного курса геометрии в большой мере воспроизводит содержание первых книг «Начал» Евклида вплоть до последовательности предложений, их формулировок и даже доказательств. Мы уже упоминали признаки равенства треугольников. Укажем еще в качестве примера на доказательство теоремы о внешнем угле треугольника, которое идентично у Евклида, Киселева, Атанасяна.

В логической структуре «Начал» Евклида отражается исторический путь ранних этапов формирования математических теорий. Процесс обучения (в широком смысле слова) есть процесс передачи исторического опыта предшествующих поколений последующим. Обучение становится более успешным тогда, когда в процессе его воспроизводится в кратком, сжатом, конспективном виде исторический процесс приобретения этого опыта, знаний. В противном случае знания отрываются от их корней, от их источников, приобретают догматический характер, что затрудняет их восприятие, применение и дальнейшее развитие.

2°. Методические особенности построения геометрии в учебнике А. П. Киселева

Учебник геометрии А. П. Киселева [90], [91], [92] составил этап школьного геометрического образования в нашей стране, по нему обучалось несколько поколений. Этот учебник был наиболее популярным учебником геометрии в русской дореволюционной школе, а с 1938 г.— стабильным учебником в советской школе.

Написанный в 1893 г., он выдержал огромное количество изданий, непрерывно при этом совершенствуясь. В 1938 г. он был частично переработан профессором Н. А. Глаголевым. Поэтому в дальнейшем мы будем ссылаться как на учебник [90] издания 1931 г., так и на стабильный учебник [91][1].

Переиздание в 1980 г. учебника [90] явилось выражением признания выдающегося педагогического достижения А. П. Киселева. В предисловии к этому изданию академик А. Н. Тихонов пишет:

«Со времени выхода первых учебников А. П. Киселева и математика и школьное образование далеко шагнули вперед. Возрастание роли математики в жизни современного общества вызвало новые требования к постановке математического образования

[1] Учебник [90] во многом сложнее учебников [91], [92], рассчитанных на массовое обучение, и содержит значительно больше теоретического материала.

в средней школе. Поэтому содержание книг А. П. Киселева можно считать в какой-то мере устаревшим. Однако благодаря высокому педагогическому мастерству, с которым они были написаны, простоте, доходчивости и логичности изложения книги эти не потеряли своей значимости и в настоящее время».

С этим нельзя не согласиться. Методическая грамотность в преподавании геометрии невозможна для молодого поколения учителей без ознакомления хотя бы в общих чертах с учебником А. П. Киселева, тем более что новые учебники геометрии в той или иной мере используют его опыт.

Учебник геометрии А. П. Киселева состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. Его содержание обычно и называют традиционным, о нем мы говорили в § 53. Как и в «Началах» Евклида, изложение в учебнике А. П. Киселева начинается с пояснения основных понятий, используемых при построении теории. Здесь, по существу, и сосредоточены идейные основы теории.

«Часть пространства, ограниченная со всех сторон, называется **геометрическим телом.** Геометрическое тело отделяется от окружающего пространства **поверхностью.** Часть поверхности отделяется от смежной части **линией.** Часть линии отделяется от смежной части **точкой.**

Геометрическое тело, поверхность, линия и точка не существуют раздельно. Однако при помощи отвлечения мы можем рассматривать поверхность независимо от геометрического тела, линию — независимо от поверхности и точку — независимо от линии. При этом поверхность мы должны представлять себе не имеющей толщины, линию — не имеющей ни толщины, ни ширины и точку — не имеющей ни длины, ни ширины, ни толщины.

Совокупность каких бы то ни было точек, линий, поверхностей или тел, расположенных известным образом в пространстве, называется вообще геометрической **фигурой.** Геометрические фигуры могут перемещаться в пространстве, не подвергаясь никаким изменениям. Две геометрические фигуры называются **равными,** если перемещением одной из них в пространстве ее можно совместить со второй фигурой так, что обе фигуры совместятся во всех своих частях... Наука, рассматривающая свойства геометрических фигур, называется **геометрией**...» [91, с. 4].

Нельзя не заметить здесь ряда определений из «Начал» Евклида, которым лишь придана несколько иная форма. Обратим еще внимание на следующие три особенности:

1) Как и в «Началах» Евклида, пространство здесь мыслится как «место» для всех фигур. Еще более отчетливо эта мысль выражена в учебнике [90, с. 4]:

«Часть пространства, занимаемая физическим телом, называется геометрическим телом».

При таком подходе пространство является базовым понятием, понимаемым в физическом смысле. Заметим, что при строго логическом построении геометрии, например по Гильберту, пространство рассматривается как совокупность основных объектов — точек,

прямых и плоскостей, а также фигур, определенных с помощью этих понятий [63, с. 56]. Подобная точка зрения проводится и в учебнике геометрии А. Н. Колмогорова [101, с. 10]:

«В геометрии множество всех точек называют **пространством.** Каждая геометрическая фигура есть подмножество пространства».

В других учебниках для введения понятия геометрической фигуры обычно рассматривают физические модели этих фигур, а затем отвлекаются от всех их свойств, кроме формы и размеров, т. е. рассматривают геометрические фигуры в реальном физическом пространстве.

2) Ограниченность тела влечет за собой ограниченность поверхностей и линий, в частности плоскостей и прямых, которые в дальнейшем будет разрешено «неограниченно продолжать». Отсюда проистекают многочисленные неточности в употреблении термина «прямая»: то она мыслится как отрезок, то как луч, то как неограниченная прямая (причем наряду с употреблением терминов «отрезок» и «луч»). Заметим, что такие «вольности речи» также восходят к «Началам» Евклида.

3) Понятие равенства фигур основано на понятии перемещения фигуры в пространстве как твердого тела, и совмещение фигур понимается в физическом смысле. Такая точка зрения поддерживается последующим разрешением «перевертывать» всякую часть плоскости при наложении ее на другое место этой же или другой плоскости.

Далее в учебнике А. П. Киселева на основе наглядных представлений о плоской поверхности и прямой линии перечисляются их основные свойства, которые в дальнейшем будут отнесены к аксиомам:

1. Всякую часть плоскости можно наложить всеми ее точками на другое место этой или другой плоскости, причем накладываемую часть можно предварительно перевернуть другой стороной.

2. Через всякие две точки пространства можно провести прямую и притом только одну.

3. Если на плоскости взять какие-либо две точки и провести через них прямую линию, то все точки этой прямой будут находиться в этой плоскости.

Значительно позже к указанным аксиомам добавляются аксиома параллельных линий и аксиома измерения (аксиома Архимеда):

4. Через одну и ту же точку нельзя провести двух различных прямых, параллельных одной и той же прямой.

5. Как бы велик ни был большой отрезок и как бы мал ни был меньший отрезок, всегда, откладывая меньший на большем последовательно 1, 2, 3 и так далее раз, мы получим, что после некоторого m-го отложения или не получится никакого остатка, или получится остаток, меньший меньшего отрезка.

К этим аксиомам добавляется еще несколько свойств геометрических величин из аксиом Евклида, и этим исчерпывается весь список аксиом в систематическом курсе планиметрии А. П. Киселева.

При этом аксиомы трактуются как «вполне очевидные» истины, которые принимаются без доказательства. В отличие от них «теоремами называются предложения, истинность которых обнаруживается только после некоторого рассуждения (доказательства)». Определениям отводится роль разъяснения смысла, который придают тому или другому названию или выражению [91, с. 17—18].

Таким образом, в учебнике А. П. Киселева не разъясняется сущность аксиоматического метода в современном понимании: выделение неопределяемых понятий, описание их свойств в виде аксиом, логический вывод теорем на их основе и определение новых понятий на основе исходных понятий, аксиом и выводов из них[1].

А. П. Киселев этого сделать не может, так как его аксиом недостаточно для строго логического построения теории, и часть выводов делается на основе наглядных представлений. При этом появляется возможность что-то еще считать «вполне очевидным» и, следовательно, убеждать «некоторыми рассуждениями» в истинности доказываемых предложений. Что именно считать «вполне очевидным», в доказательствах не уточняется, поэтому список аксиом, используемых в учебнике А. П. Киселева, является, по существу, неопределенным и в тексте учебника аксиомам уделяется очень мало внимания. Доказательства на основе неопределенного списка аксиом порождали в сознании учащихся убежденность в строгой «логичности изложения» геометрии по Киселеву, и это впечатление сохранялось у них на всю жизнь.

Основной методический принцип в проведении доказательства — доведение рассуждений до очевидности на основе наглядных представлений, а не с помощью последовательных ссылок на аксиомы, и в учебнике А. П. Киселева это сделано с большим мастерством. Приведем пример одного из первых доказательств [91, с. 15, 16].

«Докажем, что **из всякой точки, лежащей вне прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один.**

Пусть дана какая-нибудь прямая AB (рис. 193) и вне ее произвольная точка M; требуется показать, что, во-первых, из этой точки можно опустить на прямую AB перпендикуляр и, во-вторых, что этот перпендикуляр может быть только один.

Вообразим, что мы перегнули чертеж по прямой AB так, чтобы верхняя его часть упала на нижнюю. Тогда точка M займет некоторое положение N. Отметив это положение, приведем чертеж в прежний вид и затем соединим точки M и N прямой. Теперь убедимся, что полученная прямая MN перпендикулярна к AB, а всякая иная прямая, исходящая из M, например MD, не перпендикулярна к AB.

[1] Собственно говоря, такие разъяснения в учебниках А. П. Киселева есть, но они входят в разряд необязательного материала и никак не используются при доказательствах. В учебнике [92] они помещены в самом конце курса — в дополнении к учебнику стереометрии, а в учебнике [90] в первой половине курса планиметрии, но в таком изложении, которое явно недоступно учащимся на этой стадии обучения.

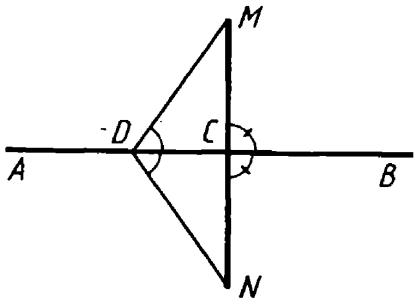


Рис. 193

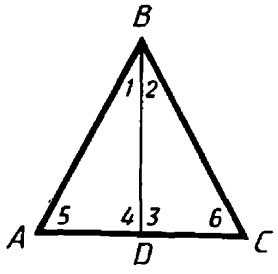


Рис. 194

Для этого перегнем чертеж вторично. Тогда точка M снова совместится с N, а точки C и D останутся на своих местах; следовательно, прямая MC совпадет с NC, а MD — с ND. Из этого следует, что $\angle MCB = \angle BCN$ и $\angle MDC = \angle CDN$. Но углы MCB и BCN смежные и, как теперь видим, равные; следовательно, каждый из них есть **прямой**, а потому $MN \perp AB$. Так как линия MDN не прямая (потому что не может быть двух различных прямых, соединяющих точки M и N), то сумма двух равных углов MDC и CDN не равна $2d$; поэтому угол MDC не есть прямой, и, значит, MD не перпендикулярна к AB. Таким образом, другого перпендикуляра из точки M на прямую AB опустить нельзя».

Обратим внимание на то, что в этом доказательстве, предшествующем введению понятий аксиомы и теоремы, А. П. Киселев воспроизводит методы, которые историки считают самыми первыми методами геометрических доказательств в античной науке [142, с. 106].

Таким же путем доказываются теоремы о равнобедренном треугольнике:

1) В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине есть одновременно и медиана и высота.

2) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Треугольник ABD (рис. 194) поворачивают вокруг биссектрисы BD и доказывают совмещение отрезков DA и DC, углов 4 и 3, 5 и 6, откуда следует их равенство [91, с. 23—24].

Теорему о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника Ж. Адамар доказывает еще проще [8, с. 37]: «Перевернем угол ABC и наложим его самого на себя так, чтобы сторона BA пошла по BC, и обратно. Так как BA и BC равны, то точка A займет положение точки C, и наоборот. Следовательно, угол BAC совместится с углом BCA, так что эти два угла равны».

Известно и доказательство Прокла (V в.), основанное на том, что $\triangle ABC = \triangle CBA$ по третьему признаку равенства треугольников [126, комментарии к кн. I, с. 258]. С таким же успехом можно сослаться на первый признак равенства треугольников, как это делает А. В. Погорелов.

Путь, выбранный А. П. Киселевым, более экономный, так как позволяет доказать сразу две теоремы. Но, по нашему мнению,

дело здесь даже не в этом: по-видимому, А. П. Киселев считает более абстрактной мыслительную операцию перемещения треугольника в произвольное новое положение, к тому же с перевертыванием его «другой стороной». Такую мыслительную операцию он использует лишь на следующем шаге обучения — при доказательстве признаков равенства треугольников.

Таким образом, в развертывании школьного курса геометрии А. П. Киселев предпочитает следовать историческому пути развития геометрии.

В учебнике А. П. Киселева весьма искусно используются построения, на основе которых наглядные представления приобретают «полную очевидность». В качестве примера рассмотрим схему доказательства теоремы о внешнем угле треугольника [91, с. 27, 28].

Т е о р е м а. **Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла его, не смежного с этим внешним.**

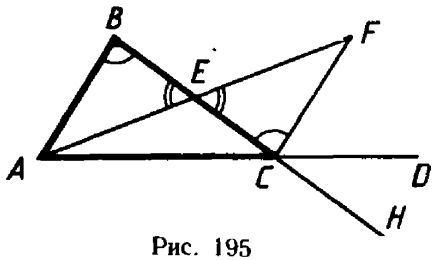


Рис. 195

Докажем, что для $\triangle ABC$ $\angle B < \angle BCD$ (рис. 195).

1) E — середина отрезка BC.

2) На продолжении отрезка AE за точку E отложим отрезок $EF = AE$.

3) Очевидно, что точка F лежит внутри угла BCD.

4) Поэтому $\angle ECF < \angle BCD$.

Но $\triangle ABE = \triangle FCE$ по первому признаку равенства треугольников. Поэтому $\angle B = \angle ECF$. Заменяя в неравенстве 4 угол ECF равным ему углом B, получаем требуемое утверждение. Аналогично докажем, что угол A меньше угла ACH, который равен углу BCD.

Доказательство кажется достаточно убедительным. Но с точки зрения современного научного подхода оно совершенно несостоятельно. В самом конце этого учебника [92] помещена аксиоматика Д. Гильберта, которая является научной основой курса. Анализ пунктов 1—4 доказательства, проведенный нами на основе системы аксиом Гильберта, показывает, что для их обоснования нужно доказать более 23 теорем из теории Гильберта, причем 18 из них в учебнике А. П. Киселева даже не упоминаются. Таким образом, теория Киселева не менее далека от ее обоснования по Гильберту, чем «Начала» Евклида.

Как же аргументируется потребность в логических доказательствах при отсутствии разъяснения сущности дедуктивно-аксиоматического метода построения геометрии? При конкретно-физическом истолковании геометрических фигур возникает возможность убедиться в справедливости некоторых истин опытным путем: измерением или построением. Но, во-первых, не любые объекты доступны для опытной проверки (например, если требуется вычислить диаметр Луны), во-вторых, любые измерения или построения дают лишь приближенные результаты, в-третьих, они позволяют убедиться в какой-то истине лишь для одной или нескольких фигур

(например, для одного или нескольких треугольников), а не для всего класса таких фигур (всех треугольников), в-четвертых, измерения или построения применяются к реальным фигурам, а не к идеальным, которые мыслятся в геометрии. Поэтому доказательства путем рассуждений являются основным средством изучения свойств фигур в геометрии. Такая методика использовалась при обучении геометрии по Киселеву и нашла свое отчетливое выражение в учебнике [149, с. 53].

Анализ методических особенностей учебника геометрии А. П. Киселева позволяет указать причины, обеспечившие ему высокую репутацию и долговечность.

1) Теоретической основой учебника А. П. Киселева были «Начала» Евклида, отшлифованные многими веками. Они сочетали в себе предельную наглядность с достаточно высоким логическим уровнем. А. П. Киселев в определенной мере воспроизводил исторический опыт накопления человечеством геометрических знаний и методов их получения.

Содержание учебника не ограничивается адаптированием «Начал» для преподавания геометрии в школе. Он включает в себя элементы тригонометрии, применение алгебры (уравнений) к решению геометрических проблем, знакомит с некоторыми геометрическими преобразованиями и методами изображения пространственных фигур на плоскости, на основе измерения отрезков вводит понятие иррационального числа, дает представление о предельном переходе и его применении к вычислению длин, площадей и объемов.

2) Сложные в теоретическом плане вопросы обоснования взаимного расположения фигур, связанные с отношением «лежать между», решались на основе наглядности: существования — на основе построений; равенства (конгруэнтности) — на основе интуитивно ясного понятия возможности их совмещения как физических объектов.

3) Теория и применяемые в ней методы органически сочетались с набором задач, которые рождались вместе с теорией и проходили естественный отбор в том же многовековом процессе, в котором совершенствовалась сама теория[1]. Одни и те же методы доказательства теорем и решения задач обеспечивали дидактическое единство курса: чем лучше учащиеся усваивали доказательства теорем, тем лучше они решали задачи, и, наоборот, решение задач способствовало усвоению доказательств теорем.

4) Применяемые методы идейно просты и не требуют дополнительного времени на их изучение. Основные из них — это признаки равенства и подобия треугольников, выявляемые обычно с помощью дополнительных построений. Они позволяют переходить от отрезков к углам и наоборот и оказываются весьма эффективными при решении широкого класса традиционных геометрических задач. Таким образом, и здесь мы обнаруживаем определенное

[1] В преподавании геометрии по Киселеву использовались упражнения из этого учебника, а также задачники Н. А. Рыбкина [144], [145]. Отличный набор классических задач имеется в книгах Ж. Адамара [8], [9].

единство логических и конструктивных начал в преподавании геометрии.

5) Вообще учебник А. П. Киселева отличается единством формы и содержания, высокой степенью согласованности в теоретическом и методическом плане, своей внутренней стройностью.

Это его сильная и наиболее уязвимая сторона, ибо «монолитность» учебника не позволяет его радикально усовершенствовать в соответствии с новыми потребностями ни в методическом плане, ни, что особенно важно, в плане внедрения в него нового содержания, идей, методов. Например, попытки Н. А. Глаголева «выдвинуть на первый план основные геометрические идеи о движении, о симметрии, о подобии как геометрическом преобразовании» [91, с. 3] оказались безуспешными. Они не занимали такого места в учебнике А. П. Киселева [90], построенном в традициях Евклида, и в учебнике [91] под редакцией Н. А. Глаголева остались на периферии курса. Практически этот материал не привился в практике преподавания по Киселеву.

В 1963/64 учебном году В. Г. Болтянский и И. М. Яглом предприняли попытку «вклинить» в IX классе в курс геометрии А. П. Киселева преобразования и векторы [44]. Но от нее быстро пришлось отказаться не столько из-за возврата средней школы к десятилетнему сроку обучения, сколько, по нашему мнению, из-за «сопротивления» самого курса А. П. Киселева: он не нуждался в функциональных и аналитических методах и поэтому не испытывал потребности в них. Возникали большие трудности в преподавании.

Подтверждение указанному тезису мы видим и в пособии А. В. Погорелова «Элементарная геометрия», построенном на оригинальной системе аксиом, но по традиционной схеме Евклида — Гильберта. В изданиях [135], [136], [137] векторному и координатному методам не нашлось места. В издании [137] 1977 г. векторное исчисление и метод координат помещены в третью, заключительную часть курса (первые две части составляют планиметрия и стереометрия) наряду с тригонометрией, объемами тел вращения и площадями их поверхностей.

В преподавании геометрии по Киселеву встречались и другие трудности, не связанные с потребностью внедрения в учебники нового материала. Одна из таких трудностей возникала из-за трактовки аксиом как «вполне очевидных» истин, в результате чего при доказательствах список аксиом неявно непрерывно пополнялся, становясь неопределенным. И для учащегося становилось непонятным, зачем нужно доказывать, например, такое «вполне очевидное» для него предложение, как «В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон».

Таким образом, практически становилось неопределенным различие между аксиомой и теоремой, и доказывать теоремы самостоятельно учащиеся в принципе были не в состоянии: они должны были запоминать, что подлежит доказательству, а что «очевидно», т. е. должны были заучивать доказательства, приведенные в учебнике. Это отчетливо обнаруживалось в преподавании геомет-

рии по Киселеву, особенно в начале курса, и вызывало очень большие трудности [168, с. 29, 35].

Кроме того, трактовка аксиом как «вполне очевидных» истин влекла за собой непонимание логической структуры геометрии. В такое представление об аксиомах не укладывалась аксиома параллельных. Поэтому она истолковывалась как «недоказуемая» истина (т. е. истина, которую нельзя доказать) [96, с. 38]. Истолкование аксиом как «вполне очевидных» или «недоказуемых» истин при неопределенном в целом списке аксиом приводило к формированию представления об аксиомах как «абсолютных истинах». Между тем свойство предложения «быть аксиомой» относительно: одно и то же предложение в теории, построенной на разных системах аксиом, может быть либо аксиомой, либо теоремой.

К недостаткам курса геометрии А. П. Киселева относят также исторически обусловленное слитное существование в нем двух точек зрения на геометрию: как на физику реального пространства и как на его математическую модель. Многие наглядно-очевидные факты принимаются в этом курсе на равных правах с логическими выводами. Таким образом, дедуктивный характер геометрии сливается в нем с конкретно-физическим истолкованием геометрических фактов и методов их получения.

Несмотря на это, в учебнике А. П. Киселева и сопровождающих его задачниках отсутствуют задачи с практическим содержанием, позволяющие видеть «геометрию вокруг нас». Он построен в традиционном или, как иногда говорят, академическом стиле. В нем не делается попыток мотивировать изучение той или иной проблемы, такая работа перекладывается на плечи учителя.

Так как основные неопределяемые понятия в нем не выделяются, то ряд понятий курса остается, по существу, без точных определений. Отмечались также его идейная бедность, отсутствие современных математических методов (векторов, координат, интеграла), недостатки в изложении и применении геометрических преобразований.

По мере развития и совершенствования курсов алгебры и физики курс геометрии А. П. Киселева перестал с ними гармонировать.

Появившаяся в последние годы легенда о том, что преподавание геометрии по Киселеву проходило вполне успешно, что учащиеся хорошо усваивали теорию и легко решали трудные задачи, лишена реальных оснований. Геометрия и в то время представляла для учащихся наибольшие трудности при обучении математике.

Усвоение учащимися систематического курса геометрии вызывает наибольшие трудности и в настоящее время. Это связано прежде всего с тем, что геометрия — единственная школьная дисциплина, которая строится на дедуктивно-аксиоматической основе и поэтому предъявляет повышенные требования к развитию логического мышления учащихся.

Легкий путь овладения геометрией не найден. Возможно, что его и не существует, и прав был Евклид, который по извест-

ной легенде ответил царю Птолемею: «Нет царского пути в геометрию». Но, может быть, именно в этом и состоит главная воспитательная ценность систематического курса геометрии в школе?

3°. Основные направления обновления школьного курса геометрии за рубежом

Преподавание геометрии в школе является самой острой и самой сложной проблемой школьного математического образования как в нашей стране, так и за рубежом. К 60-м годам во всем мире сложилось твердое убеждение в том, что традиционная система Евклида построения систематического курса геометрии изжила себя. Она не отвечает потребностям научно-технического прогресса ни в логическом отношении, ни перечнем используемых понятий, ни применяемыми методами. Начались поиски новых теоретических основ для построения школьного курса геометрии.

Классическая аксиоматика Д. Гильберта [63], обосновывающая построение геометрии «в духе самого Евклида», непригодна для первоначального изучения систематического курса геометрии. Известный голландский математик Г. Фройденталь пишет о ней так: «Наиболее впечатляющее в системе аксиом Гильберта и многих последующих системах — это, пожалуй, их достаточная сложность. Большое количество аксиом, одни из которых столь тривиальны, что легко забываются при перечислении, а другие столь сложны (особенно аксиомы порядка), что их с трудом удается запомнить. Все в целом настолько запутано, что работать с этой системой очень нелегко... и лишь с большим трудом удается проводить доказательства. Строгая дедуктивность наполовину увязла в аксиоматике, а дедуктивная структура оказалась весьма схематичной... Эта система аксиом создана не для того, чтобы с ней работать» [163, с. 60].

Напомним, что основными понятиями в системе аксиом Д. Гильберта являются «точка», «прямая» и «плоскость». Точка и прямая, точка и плоскость могут находиться в отношении «принадлежности», три точки одной прямой — в отношении «лежать между», два отрезка или два угла — в отношении «конгруэнтности». Свойства этих трех основных отношений описываются системой из 20 аксиом, разбитых на 5 групп: аксиомы принадлежности, порядка, конгруэнтности, параллельности и непрерывности. В построении оснований геометрии Д. Гильберт практически не пользуется теоретико-множественным подходом. К этому обязывают аксиомы непрерывности, но он исследует именно те вопросы, которые от них не зависят.

Система аксиом Д. Гильберта громоздка и сложна. Не менее сложна и теория, развиваемая на ее основе: нужно обладать большим терпением и потратить много сил, чтобы добраться до узловых теорем геометрии и при этом не запутаться в огромном количестве промежуточных лемм, теорем и следствий[1]. Поэтому нельзя

[1] С построением развернутой теории на основе аксиоматики Д. Гильберта можно познакомиться по книге Н. В. Ефимова [82, с. 41—90].

не согласиться с Г. Фройденталем о нецелесообразности построения курса геометрии по Гильберту.

Иной, векторный способ обоснования евклидовой геометрии был предложен Г. Вейлем. В аксиоматике Г. Вейля — два основных понятия — «точка» и «вектор», причем векторы удовлетворяют аксиомам евклидова векторного пространства определенной размерности. Основным отношением между точками и векторами является отображение, которое каждой упорядоченной паре точек (A, B) сопоставляет вектор $\overrightarrow{AB}$. Аксиомы Г. Вейля требуют, чтобы для произвольной фиксированной точки A это отображение становилось биекцией и выполнялось условие $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ для любых точек A, B, C. Теория Вейля строится на теоретико-множественной основе и использует понятие действительного числа.

Аксиоматика Г. Вейля свободна от указанных выше недостатков аксиоматики Д. Гильберта и получила широкое распространение в науке. Наиболее сильной стороной теории Вейля является ее алгебраизация. Она обеспечивает возможность в значительной мере алгоритмизировать доказательства и поэтому, по образному выражению Г. Шоке, открывает «царский путь» в геометрию.

Однако при первоначальном изучении геометрии указанное достоинство теории Вейля (алгебраизация) оборачивается ее существенным недостатком: она не способствует развитию пространственных представлений учащихся, их геометрической интуиции. Сильная алгебраизация теории предъявляет повышенные требования к алгебраической и общелогической культуре учащихся, которая не достигается к началу изучения систематического курса геометрии. Впрочем построение школьного курса геометрии на векторной основе продолжает испытываться на «дидактическую прочность» [160], [42]. С различными модификациями аксиоматики Г. Вейля и построением геометрии на ее основе можно познакомиться по книге [55, с. 148—172].

Стремление усилить логическую обоснованность школьного курса геометрии, насытить его современными идеями и методами нашло свое выражение в работах зарубежных математиков Ф. Бахмана [37], Г. Шоке [171], Ж. Дьедонне [78], А. Донеддю [75] и др. В этих книгах не строится школьный курс геометрии, а лишь излагаются те теоретические основы и некоторые методические принципы, на основе которых он может быть построен.

Ф. Бахман в основу построения теории кладет центральные и осевые симметрии, играющие роль «точек» и «прямых», и на теоретико-групповой основе развивает геометрию на плоскости как своеобразное «исчисление симметрий».

Г. Шоке ищет обходной путь к векторному обоснованию геометрии. Он пишет: «Сегодня мы владеем простым «царским путем» в геометрию, ведущим через понятия «векторного пространства» и «скалярного произведения», однако этими понятиями нельзя «овладеть штурмом», без всякой подготовки, особенно в том возрасте, когда у ученика еще не совсем сформировалось понятие алгебраической

операции. Тем не менее эти понятия будут служить нам путеводной нитью. Мы попытаемся, избегая излишеств, так одеть сам по себе совершенный, но слишком абстрактный для ребенка логический каркас, чтобы он превратился в нечто знакомое и приветливое» [171, с. 14].

Аксиоматика Г. Шоке основана на понятиях параллельности, перпендикулярности и расстояния в таком виде, «который позволяет естественным образом быстро перейти к алгебраической структуре плоскости и пространства» [171, с. 10].

Ж. Дьедонне, отдавая должное остроумию аксиоматики Г. Шоке, расценивает ее, однако, как ненужный и даже вредный компромисс между построением геометрии по Евклиду — Гильберту и «голой» аксиоматикой линейной алгебры [78, с. 24]. Он идет дальше Г. Вейля в алгебраизации геометрии, отождествляя элементарную геометрию с линейной алгеброй [78, с. 8].

А. Донеддю занимает более умеренную позицию в обосновании евклидовой геометрии. Плоскость рассматривается им как множество точек, из которого выделяются некоторые подмножества, называемые прямыми, полупрямыми, полуплоскостями. Их свойства описываются аксиомами соединения и порядка. При этом отношение «лежать между» определяется с помощью аксиомы о разбиении прямой на две полупрямые.

Из группы преобразований плоскости выделяется подгруппа «изометрий», которая последующими аксиомами превращается в группу перемещений. Изометричные фигуры играют роль «равных» фигур.

Длина определяется как класс эквивалентности изометричных отрезков. Аксиома Архимеда позволяет измерять длины, а аксиома Кантора обеспечивает непрерывность. Аксиоматика завершается аксиомой параллельных Евклида.

Подход А. Донеддю к обоснованию геометрии евклидовой плоскости во многом созвучен идеям А. Н. Колмогорова, но они резко различаются способом введения длины (расстояния).

Рассмотренные выше различные подходы к построению теоретических основ школьного курса геометрии объединяются рядом общих принципов.

1) Главный принцип — явная алгебраизация геометрии.

2) Использование действительного числа как уже известного, а не рожденного в рамках геометрической теории, что характерно для традиционного построения евклидовой геометрии (см. по этому поводу, например, [171, с. 17]). Заметим, однако, что построение геометрии по Бахману не использует понятия числа и вообще стоит особняком по отношению к другим подходам к обоснованию евклидовой геометрии.

3) Явное выделение ряда основных алгебраических, топологических и геометрических структур, причем геометрические структуры играют подчиненную роль вплоть до объявления их моделями соответствующих алгебраических структур [78], [75, с. 12], [160, с. 417].

4) В построении основ теории отдается «предпочтение методам, основанным на фундаментальных понятиях, выкристаллизовавшихся за двадцать веков развития математики: понятиях множества, отношений эквивалентности и порядка, алгебраических законах, векторном пространстве, симметрии и геометрических преобразованиях» [171, с. 13—14].

5) Стремление изменить основное содержание исторически сложившегося традиционного школьного курса геометрии в пользу теории групп, групп преобразований, векторного пространства, линейной алгебры [37, с. 17], [171, с. 13—14], [78, с. 11—13, 22, 26], [75, с. 12].

6) Преувеличение педагогической эффективности применения аксиоматического метода, когда с самого начала четко разъясняются правила игры — «этой королевской игры математиков нашего времени», как заметил академик Лихнерович...» [75, с. 7].

При этом ссылаются на то, что «многочисленные эксперименты показали, что некоторые дети определенно обладают вкусом к строгой дедукции: математика кажется им игрой со строгими правилами, и им очень нравится играть в эту игру, соблюдая все ее правила» [171, с. 12].

А вот мнение Ж. Дьедонне по поводу значения логических умозаключений: «В первую очередь нужно убедить учащегося в том, что из предположений, допущенных **по какой угодно причине** (выделено автором.— *К. Д.*) и происхождение которых никак не учитывается, пользуясь исключительно одними рассуждениями, можно вывести другие предложения» [78, с. 23].

Однако существуют и иные мнения на этот счет. Мы уже приводили высказывания академика А. Д. Александрова о необходимости строить геометрию на основе органического единства строгой логики и живого восприятия реального мира. Крайней точки зрения в этом вопросе придерживается Г. Фройденталь, который пишет: «Если хотят изложить школьнику геометрию в виде строгой логической системы, то лучше действительно отказаться от изложения вообще. Существуют более убедительные системы, чем геометрическая. Обучение геометрии может иметь смысл, если только используются связи геометрии с привычным пространством.

Если педагог упустит это, то он упустит незаменимую возможность: геометрия является одной из лучших возможностей математизировать реальную действительность... Конечно, можно исследовать и царство чисел, можно учиться думать в процессе счета, но открытия, которые делаются глазами и руками, более убедительны и более неожиданны. Фигуры в пространстве являются, пока в них нуждаются, незаменимым средством, чтобы вести исследования и делать открытия» [163, с. 40].

Выдвигая на первый план аксиоматический метод в школьном преподавании геометрии, не следует забывать и о том, что этот метод обусловливает не столько повышение требований к логической строгости теории (для «строгости» существуют разные уровни!) и к ее дедуктивному упорядочению, сколько усиление абстракт-

ности интерпретаций теории, значительно превышающей потребности преподавания геометрии в школе.

7) Авторы анализируемых книг предполагают, что разработанные ими схемы построения геометрии в полной мере относятся к преподаванию геометрии в старших классах. В средних классах должны строиться лишь фрагменты дедуктивной теории на основе тех понятий и аксиом, которые будут использованы при дедуктивном построении геометрии в старших классах [171, с. 11—12, 215], [78, с. 21—22], [75, с. 7].

Однако воплощение этих идей в школьных учебниках наряду с модернизацией всего школьного курса математики за рубежом под лозунгом Ж. Дьедонне «Долой Евклида!» (см., например, [150], [131], [52], [151]) не привело к положительным результатам в преподавании геометрии и вызвало резкую критику в широких научных и общественных кругах [127], [157], [139, с. 107—108].

Причины неудачи многообразны и носят принципиальный характер. Это прежде всего аксиоматический метод сам по себе, резко отличающий геометрию от других разделов школьной математики.

Абстрактный логический каркас геометрии не удалось превратить в «нечто знакомое и приветливое» или так «подсластить», чтобы сделать вполне доступным для учащихся, на что рассчитывали Г. Шоке и А. Донеддю. Кроме того, «каркас» составляет очень важную, но малую часть всего «здания геометрии», которое еще нужно строить, ибо в преподавании геометрии в школе основное место занимает само ее построение.

Высокий уровень абстрактности курса геометрии, насыщенного различными алгебраическими структурами, его оторванность в значительной мере от интуиции учащихся, их жизненного опыта и пространственного воображения оказались непосильными для учащихся не только средних, но и старших классов (даже в условиях дифференцированного обучения по нескольким линиям). Геометрия утратила свою привлекательность, у большинства учащихся не хватало терпения и сил преодолевать постоянно возрастающие и накапливающиеся логические трудности. По-видимому, здесь сказался и определенный перекос в преподавании в сторону изучения теории в ущерб самостоятельной деятельности учащихся по ее применению.

На Западе началась «вторая волна» модернизации школьного курса математики, о которой пока можно лишь сказать, что она характеризуется отказом от крайностей «модернизма» и общей умеренностью.

Заметно изменилась и точка зрения «апостола» математического модернизма Ж. Дьедонне [79]. Напомним, что его книга «Линейная алгебра и элементарная геометрия», на которую мы ссылались ранее, вышла в свет первым изданием в 1964 г. В 1973 г. он выступает за то, что «пока детям не исполнится пятнадцать лет, никакая аксиоматическая **система** вообще не должна вводиться в школу», а «детям старше пятнадцати лет, кроме тех учащихся, которые собираются получить научную или техническую специальность, вооб-

ще не нужно преподавать математику». К ним он относит 90% школьников.

Ж. Дьедонне уже не столь категорично выступает против занятий учащихся старших классов специализированных научных школ классическими задачами геометрии треугольника, «если им уж так хочется ими заниматься». Он не отождествляет элементарную геометрию с линейной алгеброй, а лишь подчеркивает преимущества последней как метода изучения геометрии. «Исключается не геометрия Евклида,— утверждает он,— а **устаревшая методика ее преподавания** (бывшая традиционной со времен Евклида) и тем самым выясняется роль геометрии, укрепляется ее центральное положение в математике и ее универсальная сила».

В заключение статьи он выражает надежду, «что существующая неразбериха в конце концов приведет к умеренно разумному компромиссу».

Противоположную позицию занял известный бельгийский педагог-математик Ж. Папи [131]. Он утверждает, что традиционное обучение школьников до 15 лет «отравило» их (так в оригинале статьи.— *К. Д.*), сделав невосприимчивыми к усвоению современной математики, и выражает уверенность в усвоении ее идей учащимися в возрасте от 12 до 15 лет. Однако его позиция не находит заметной поддержки.

Крайности модернизма в преподавании геометрии и несовершенство ее традиционного построения привели в некоторых странах к полному отказу от преподавания систематического курса геометрии. Отдельные дедуктивные фрагменты, основанные на использовании геометрических преобразований, векторов, координат и элементов анализа, включены в общий курс математики вместе с рядом основных геометрических фактов, сообщаемых без доказательства.

Однако этот путь начинает приводить к резкому снижению логических возможностей учащихся при изучении других разделов школьной математики. Альтернативы систематическому курсу геометрии здесь пока не найдено, и, по-видимому, ее не существует. В этом нас убеждает историческая роль геометрии в развитии науки и ее преподавания в школе.

Проведенный анализ различных направлений обновления школьного курса геометрии показывает, что на этом пути возникают две основные методические проблемы:

1) Соотношение интуитивно-наглядного и логического.

2) Соотношение традиционного и нового содержания, традиционных и новых идей, понятий и методов.

Реформа школьного математического образования 60—70-х годов за рубежом не смогла оптимально решить эти проблемы.

1. Маркс К. Математические рукописи.— М., 1968.

2. Программа по математике для средней школы // Математика в школе.— 1968.— № 2.

3. Программа по математике для IV—X классов средней общеобразовательной школы // Математика в школе. 1979.— № 2.

4. Программа по математике для V—XI классов средней общеобразовательной школы // Математика в школе. — 1985. — № 6.

5. Базисная программа содержания математического образования в средней школе // Математика в школе. — 1981. — № 4.

6. Основные направления реформы общеобразовательной и профессиональной школы // Математика в школе.— 1984.— № 3.

7. Абугова Х. Б., Щукина М. А. Сборник упражнений по геометрии для 8—10 классов.— М.: Учпедгиз, 1960.

8. Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. I. Планиметрия.— М.: Учпедгиз, 1948.

9. Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. II. Стереометрия. — М.: Учпедгиз, 1952.

10. Александров А. Д. Понятие вектора в физике и геометрии // Математика в школе.— 1985. — № 5.

11. Александров А. Д. О геометрии // Математика в школе. — 1980. — № 3.

12. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: Пробный учебник для 6 класса средней школы. — М.: Просвещение, 1984.

13. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: Пробный учебник для 7 класса средней школы. — М.: Просвещение, 1985.

14. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: Пробный учебник для 8 класса средней школы. — М.: Просвещение, 1986.

15. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Начала стереометрии, 9: Пробный учебник. —М.: Просвещение, 1981.

16. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Начала стереометрии, 10: Пробный учебник. — М.: Просвещение, 1982.

17. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия для 9—10 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. — М.: Просвещение, 1984.

18. Александров П. С.; Колмогоров А. Н. Алгебра: Пособие для учащихся средней школы.— М.: Наука, 1972.

19. Макарычев Ю. Н. и др. Алгебра: Учебник для 6 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского.— М.: Просвещение, 1985.

20. Алимов Ш. А. и др. Алгебра: Пробный учебник для 6 8 классов средней школы. М.: Просвещение, 1981.

21. Макарычев Ю. Н. и др. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского. М.: Просвещение, 1985.

21а. Макарычев Ю. Н. и др. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского.— М.: Просвещение, 1986.

21б. Макарычев Ю. Н. и др. Алгебра: Учебник для 6 класса средней школы / Под ред. А. И. Маркушевича. М.: Просвещение, 1982.

23. Алимов Ш. А. и др. Алгебра и начала анализа: Пробный учебник для 9 10 классов средней школы.— М.: Просвещение, 1985.

24. Колмогоров А. Н. и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / Под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: Просвещение, 1985.

25. Колмогоров А. Н. и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 класса средней школы / Под ред. А. Н. Колмогорова — М.: Просвещение, 1975.

26. Колмогоров А. Н. и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 10 класса средней школы / Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1978.

27. Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г., Смышляев В. К. Алгебра и начала анализа: Пробный учебник для 9—10 классов средней школы.— М.: Просвещение, 1981.

28. Андронов И. К. Арифметика натуральных чисел.— М.: Учпедгиз, 1954.

29. Андронов И. К. Арифметика дробных чисел и основных величин.— М.: Учпедгиз, 1955.

30. Атанасян Л. С. и др. Геометрия: Пробный учебник для 6 класса средней школы.— М.: Просвещение, 1985.

31. Атанасян Л. С. и др. Геометрия: Пробный учебник для 7 класса средней школы.— М.: Просвещение, 1986.

32. Атанасян Л. С. и др. Геометрия: Пробный учебник для 8 класса средней школы.— М.: Просвещение, 1987.

33. Атанасян Л. С. и др. Геометрия: Пробный учебник для 9—10 классов средней школы.— М.: Просвещение, 1982.

34. Аргунов Б. И. О некоторых путях и средствах воспитательных функций школьного курса математики // Преподавание геометрии в 9—10 классах.— М.: Просвещение, 1980.

35. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия.— М.: Просвещение, 1966.

36. Барыбин К. С. Методика преподавания алгебры: Пособие для учителя.— М.: Просвещение, 1965.

37. Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. — М.: Наука, 1969.

38. Бескин Н. М. О некоторых основных принципах преподавания математики.— Математика в школе.— 1985.— № 1.

39. Богачева Г. И. К методике обучения школьников IV—V классов анализу текстовых задач // Математика в школе.—1984.— № 1.

40. Болтянский В. Г. Нужна ли проверка при решении текстовых задач? // Математика в школе.— 1971.— № 3.

41. Болтянский В. Г. Элементарная геометрия.— М.: Просвещение, 1985.

42. Болтянский В. Г., Волович М. Б., Семушин А. Д. Векторное изложение геометрии (в 9 классе средней школы): Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1982.

43. Болтянский В. Г., Волович М. Б., Семушин А. Д. Геометрия: Пробный учебник для 6—8 классов.— М.: Просвещение, 1979.

44. Болтянский В. Г., Яглом И. М. Геометрия: Учебное пособие для 9 класса средней школы.— М.: Учпедгиз, 1963.

45. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия, ч. II. — М.: Просвещение, 1975.

46. Барчунова Ф. М., Ройтман П. Б. Некоторые рекомендации по повторению курса геометрии в 10 классе // Математика в школе.—1976. — № 5.

47. Бескин Н. М. Стереометрия.— М.: Учпедгиз, 1960.

48. Борисов Н. И. О некоторых практических задачах по геометрии на тела вращения // Повышение вычислительной культуры учащихся средней школы.— М.: Просвещение, 1985.

49. Бухштаб А. Д. Теория чисел.— М.: Просвещение, 1966.

50. Брадис В. М. Методика преподавания математики в средней школе.— М.: Учпедгиз, 1954.

51. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые.— М.: Наука, 1978.

52. Верченко А. И. Преобразование содержания курса математики в средних школах Франции // Математика в школе.—1974.— № 1.

53. Виленкин Н. Я. Математика: 4—5 классы: Теоретические основы.— М.: Просвещение, 1974.

54. Виленкин Н. Я., Абайдулин С. К., Таварткиладзе Р. К. Определения в школьном курсе математики и методика работы над ними.// Математика в школе.— 1984.— № 4

55. Виленкин Н. Я., Чесноков А. С., Шварцбурд С. И. Математика: Учебник для 4 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1984.

56. Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г. Производная и интеграл: Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1976.

57. Виленкин Н. Я. и др. Современные основы школьного курса математики. М.: Просвещение, 1980.

58. Виленкин Н. Я., Чесноков А. С., Шварцбурд С. И. Математика: Учебник для 5 класса средней школы.— М.: Просвещение, 1984.

59. Виленкин Н. Я., Шварцбурд С. И. Высказывания, выражения, переменные // Математика в школе. – 1970.— № 3.

60. Виленкин Н. Я., Шварцбурд С. И. Равенства, тождества, уравнения, неравенства // Математика в школе. – 1970.— № 4.

61. Вирт Н. Систематическое программирование: Введение.— М.: Мир, 1977.

62. Возняк Г. М., Гусев В. А. Прикладные задачи на экстремум.— М.: Просвещение, 1985.

63. Гильберт Д. Основания геометрии. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

64. Глаголев Н. А., Глаголев А. А. Геометрия, ч. I. Планиметрия: Учебник для 6–9 классов средней школы. – М.: 1958.

65. Глаголев Н. А., Глаголев А. А. Геометрия, ч. II. Стереометрия: Учебник для 9 10 классов средней школы.— М.: 1958.

66. Глейзер Г. И. История математики в школе: IX—X классы: Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1983.

67. Гончаренко Б. Г. Задачи и вопросы по стереометрии.— М.: Просвещение, 1981.

68. Готман Э. Г., Скопец З. А. Решение геометрических задач аналитическим методом: Пособие для учащихся 9 и 10 классов.— М.: Просвещение, 1979.

69. Гончаров В. Л. Начальная алгебра.— М.: Изд. АПН РСФСР, 1955.

70. Груденов Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем.— М.: Просвещение, 1981.

71. Гусев В. А., Иванов А. И., Шебалин О. Д. Изучение величин на уроках математики и физики.— М.: Просвещение, 1981.

72. Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по решению математических задач: Геометрия.— М.: Просвещение, 1985.

73. Гусев В. А., Орлов А. И., Розенталь А. Л. Внеклассная работа по математике в 6—8 классах.— М.: Просвещение, 1984.

74. Гусев В. А., Хана Д. И. Методика решения геометрических задач с помощью векторов // Математика в школе.— 1978.— № 3.

75. Донеддю А. Евклидова планиметрия.— М.: Наука, 1978.

76. Дорофеев Г. В. Проверка решения текстовых задач // Математика в школе.— 1974.— № 5.

77. Дорофеев Г. В. Понятие функции в математике и в школе // Математика в школе.— 1978.— № 2.

78. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия.— М.: Наука, 1972.

79. Дьедонне Ж. Надо ли учить «современной» математике? // На путях обновления школьного курса математики.— М.: Просвещение, 1978.

80. Евсин Н. Г. Об использовании скалярного произведения векторов при решении задач по стереометрии // Математика в школе.— 1975. – № 5.

81. Ершов А. П. Человек и машина. – М.: Знание. Сер. Математика и кибернетика. – 1985.— № 4.

82. Ефимов Н. В. Высшая геометрия.— М.: Физматгиз, 1961.

83. Жаров В. А., Марголите П. С., Скопец З. А. Вопросы и задачи по геометрии.— М.: Просвещение, 1965.

84. Изаак Д. Ф. К методике решения задач на построение сечений призм и пирамид // Математика в школе.— 1978.— № 5.

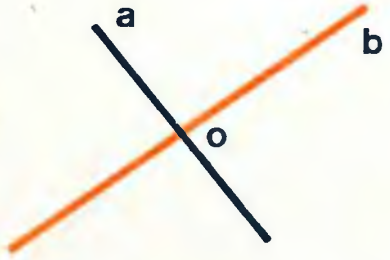
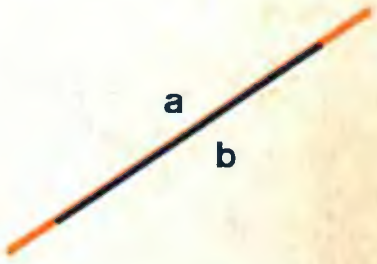
85. Изаак Д. Ф. О применении скалярного произведения при решении задач на многогранники // Математика в школе.— 1977.— № 6.

86. Кашаев П. М., Лоповок Г. Г. Учебное оборудование для IX и X классов // Математика в школе.— 1982.— № 3.
87. Квасникова З. Я. и др. Сборник задач по геометрии.— М.: Просвещение, 1968.
88. Киппнис И. М. Задачи на составление уравнений и неравенств.— М.: Просвещение, 1980.
89. Киселев А. П. Арифметика.— М.: Учпедгиз, 1951.
90. Киселев А. П. Элементарная геометрия.— М.: Просвещение, 1980.
91. Киселев А. П. Геометрия / Под ред. Н. А. Глаголева.— М.: Учпедгиз, 1958.— Ч. I.
92. Киселев А. П. Геометрия / Под ред. Н. А. Глаголева.— М.: Учпедгиз, 1959.— Ч. II.
93. Клейн Ф. Вопросы элементарной и высшей математики.— Одесса, 1912.
94. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей.— М.: ГТТИ, 1935.
95. Кованцов Н. И. Математика и романтика.— Киев.: Виша школа, 1980.
96. Коксетер Г. Новые встречи с геометрией.— М.: Наука, 1980.
97. Коксетер Г. Введение в геометрию.— М.: Наука, 1966.
98. Колягин Ю. М. Преподавание математики в сельской школе.— М.: Просвещение, 1984.
99. Клопский Б. М., Скопец З. А., Ягодовский М. И. Геометрия: Учебное пособие для 9 и 10 классов.— М.: Просвещение, 1980.
100. Колмогоров А. Н. Научные основы школьного курса математики // Математика в школе.— 1969.— № 3 и 5; 1970.— № 2.
101. Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Черкасов Р. С. Геометрия: Учебное пособие для 6—8 классов средней школы.— М.: Просвещение, 1979.
102. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике.— М.: Просвещение, 1977.— Ч. I.
103. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике.— М.: Просвещение, 1977.— Ч. II.
104. Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л. Основные понятия современного школьного курса математики.— М.: Просвещение, 1974.
105. Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика.— М.: Просвещение, 1975.
106. Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики.— М.: Просвещение, 1977.
107. Коровкин П. П. Математический анализ.— М.: Просвещение, 1972.— Ч. I.
108. Коровкин П. П. Математический анализ.— М.: Просвещение, 1973.— Ч. II.
109. Теоретические основы содержания общего среднего образования.— М.: Педагогика, 1983.
110. Крайзман М. Л. Письменные работы по геометрии для 8—10 классов.— М.: Учпедгиз, 1960.
111. Ладенко И. С. Интеллектуальные системы и логика.— Новосибирск: 1973.
112. Ларичев П. А. Сборник задач по алгебре: Для 8—10 классов средней школы.— М.: Учпедгиз, 1964.— Ч. II.
113. Лоповок Л. М. Сборник задач по геометрии.— М.: Просвещение, 1968.
114. Ляпин Е. Е. и др. Методика преподавания математики.— Л.: Учпедгиз, 1956.— Ч. II.
115. Преподавание алгебры в 6—8 классах / Сост. Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк.— М.: Просвещение, 1980.
116. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Суворова С. Б. О преподавании темы «Тригонометрические выражения и их преобразования» в курсе алгебры VIII класса // Математика в школе.— 1986.— № 1.
117. Малкова Т. В., Монахов В. М. Математическое моделирование — необходимый компонент современной подготовки школьника // Математика в школе.— 1984.— № 3.
118. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для подготовительных отделений высших учебных заведений.— М.: Высшая школа, 1979.

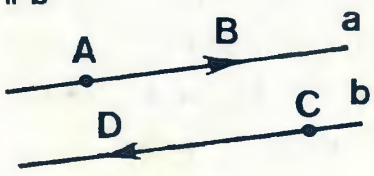
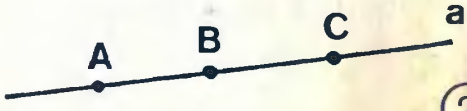
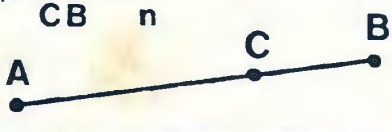
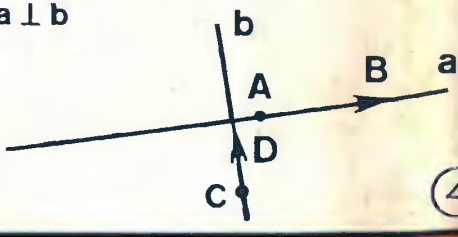
119. Медяник А. И. Учителю о школьном курсе геометрии.— М.: Просвещение, 1984.
120. Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы / Под ред. А. И. Фетисова.— М.: Просвещение, 1967.
121. Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении.— М.: Знание, 1985.
122. Машбиц Е. И. Компьютеризация обучения: проблемы и перспективы.— М.: Знание, 1985.
123. Миндюк Н. Г. Основные этапы формирования навыков тождественных преобразований // Математика в школе.— 1985.— № 5.
124. Моисеев Н. Н. Математика ставит эксперимент.— М., 1979.
125. Монахов В. М. и др. Формирование алгоритмической культуры школьника при обучении математике.— М., 1978.
126. Начала Евклида. - М.; Л.: Гостехиздат, 1949 -1950.
127. Неванлинна Р. Реформа в преподавании математики // На путях обновления школьного курса математики.— М.: Просвещение, 1978.
128. Никитин Н. Н. Геометрия: Учебное пособие для 6—8 классов.— М.: Просвещение, 1964.
129. Никольский С. М., Потапов М. К. Алгебра: Пособие для самообразования.— М.: Наука. 1984.
130. Об использовании микрокалькуляторов в учебном процессе // Математика в школе.— 1982.— № 3.
131. Папи Ж. Геометрия в современном преподавании математики // На путях обновления школьного курса математики.— М.: Просвещение, 1978.
132. Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии.— М.; Л.: 1948.— Ч. I, II.
133. Перышкин А. В., Родина И. А. Физика: Учебник для 6—7 классов средней школы / Под ред. акад. И. И. Кикоина.— М.: Просвещение, 1980.
134. Погорелов А. В. Геометрия: Учебное пособие для 6—10 классов средней школы.— М.: Просвещение, 1987.
135. Погорелов А. В. Элементарная геометрия: Планиметрия.— М.: Наука, 1969.
136. Погорелов А. В. Элементарная геометрия: Стереометрия.— М.: 1970.
137. Погорелов А. В. Элементарная геометрия.— М.: Наука, 1977.
137а. Погорелов А. В. Геометрия: Учебное пособие для вузов.— М.: Наука, 1984.
138. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения.— М.: Просвещение, 1957.
139. Понтрягин Л. С. О математике и качестве ее преподавания // Коммунист.— 1980.— № 14.
140. Понтрягин Л. С. Метод координат.— М.: Наука, 1977.
141. Понтрягин Л. С. Математический анализ для школьников. М.: Наука, 1980.
142. Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии.— М.: Наука, 1976.
143. Рыбкин Н. А. Сборник задач по геометрии: Планиметрия.— М.: Просвещение, 1964.— Ч. I.
144. Рыбкин Н. А. Сборник задач по геометрии: Стереометрия.— М.: Просвещение, 1969.— Ч. II.
145. Преподавание геометрии в 6—8 классах / Сост. В. А. Гусев.— М.: Просвещение, 1979.
146. Саранцев Г. И. Сборник задач на геометрические преобразования.— М.: Просвещение, 1981.
147. Семушин А. Д. Обучение геометрии в IV—V классах // Преподавание математики в 4—5 классах / Сост. К. И. Нешков и С. И. Шварцбурд.— М.: Просвещение, 1975.
148. Из опыта преподавания математики в школе / Сост. А. Д. Семушин, С. Б. Суворова.— М.: Просвещение, 1978.
149. Семенович А. Ф., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р. С. Геометрия: Пробный учебник для 6—8 классов. М.: Просвещение, 1967.

150. Серве В. Аксиоматика и элементарная геометрия // Математика в школе.— 1967.— № 6.
151. Сосинский А. Б. Новые учебники по математике во французской средней школе // Математика в школе.— 1975.— № 5.
152. Современные проблемы методики преподавания математики / Сост. И. С. Антонов, В. А. Гусев.— М.: Просвещение, 1985.
153. Столяр А. А. Методы обучения математике.— Минск: Вышейшая школа, 1966.
154. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики.— М.: Наука, 1978.
155. Суворова С. Б., Леонтьева М. Р. Упражнения в обучении алгебре.— М.: Просвещение, 1986.
156. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Рассказы о прикладной математике.— М.: Наука, 1979.
157. Том Р. Современная математика — существует ли она? // На путях обновления школьного курса математики.— М.: Просвещение, 1978.
158. Туманов С. И. Поиски решения задачи.— М.: 1969.
159. Фаддеев Д. К. Алгебра 6—8: Материалы для ознакомления.— М.: Просвещение, 1983.
160. Феликс Л. Элементарная математика в современном изложении.— М.: Просвещение, 1967.
161. Фирсов В. В. О прикладной ориентации курсов математики // Углубленное изучение алгебры и анализа / Сост. С. И. Шварцбурд, О. А. Боковнев.— М.: Просвещение, 1977.
162. Фридман Л. М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач.— М.: Просвещение, 1977.
163. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача.— М.: Просвещение, 1983.— Ч. II.
164. Хахамов Л. Р. Преобразования плоскости.— М.: Просвещение, 1979.
165. Хинчин А. Я. Педагогические статьи.— М.: Учпедгиз, 1956.
166. Черкасов Р. С. Сборник задач по стереометрии.— М.: Учпедгиз, 1956.
167. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / Сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр.— М.: Просвещение, 1985.
168. Чичигин В. Г. Методика преподавания геометрии: Планиметрия.— М.: Учпедгиз, 1959.
169. Шварцбурд С. И., Ковалев М. П. Электроника помогает считать.— М.: Просвещение, 1978.
170. Шевченко И. Н. Арифметика.— М.: Учпедгиз, 1956.
171. Шоке Г. Геометрия.— М.: Мир, 1970.
172. Эдвин Э. и др. Геометрия / Пер. с англ. И. А. Вайнштейна.— М.: Просвещение, 1972.
173. Эрднисв П. М. Методика упражнений по арифметике и алгебре.— М.: Просвещение, 1965.

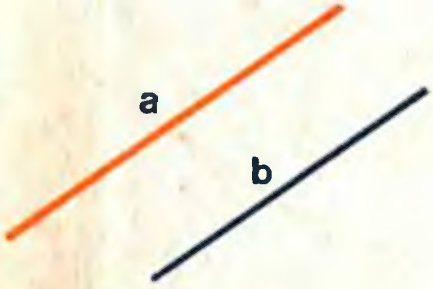
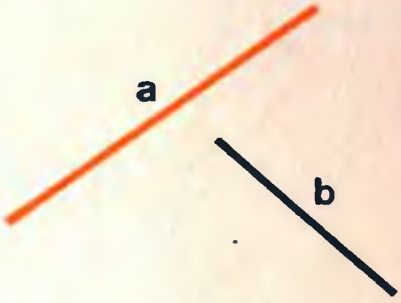
Взаимное расположение

Лежат в одной плоскости	
	
a и **b** имеют только одну общую точку: **a** и **b** пересекаются	Все точки прямых **a** и **b** общие: **a** и **b** совпадают

Использование векторов в геом

Что требуется доказать (на геометрическом языке)	
a ∥ **b**  ①	Точки **A**, **B** и **C** принадлежат прямой **a**  ②
Точка **C** принадлежит отрезку **AB**, где $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$  ③	**a** ⊥ **b**  ④

ие прямых в пространстве

	Не лежат в одной плоскости
	
a и **b** не имеют общих точек: **a** и **b** параллельны	**a** и **b** не имеют общих точек: **a** и **b** скрещиваются

еометрических доказательствах

	Что достаточно доказать (на векторном языке)
$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, где отрезки **AB** и **CD** принадлежат соответственно прямым **a** и **b**, **k** -число ①	Установить справедливость одного из равенств: $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ ②
$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ или $\overrightarrow{QC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{QA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{QB}$, где **Q** -произвольная точка ③	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, где точки **A** и **B** принадлежат прямой **a**, а точки **C** и **D** - прямой **b** ④